R 48. 1989.
F 2587

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1

TOMUL 48

ianuarie—februarie

1989

1989 -05- 30

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. RADU C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION
Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa la: ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P. O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 48, nr. 1 anuarie — februarie 1989

Institutul de Cercetare Ştiinţifică şi Inginerie Tehnologică pentru Aviaţie — INCREST 1968—1988, douăzeci de ani de activitate

SUMAR

STUDII

L. Z. DUMITRESCU, Analiza, sinteza şi optimizarea aripilor delta în zbor supersonic . . 3

V. GIURGIUŢIU, P. KALMUŢCHI, Calculul modurilor proprii de vibraţie ale palelor de elicopter cu diverse condiţii la limită 21

IRINA-CARMEN ANDREI, Despre stratul limită turbulent incompresibil, cu gradient de presiune 35

I. ŢEPOSU, Determinarea componentelor sarcinilor aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor neliniare arbitrare cu variaţii mici de altitudine şi viteză . . . 51

FELICIA MOCANU, Studiul desprinderii turbulente a stratului limită pe un profil aerodinamic cu gradient de presiune 73

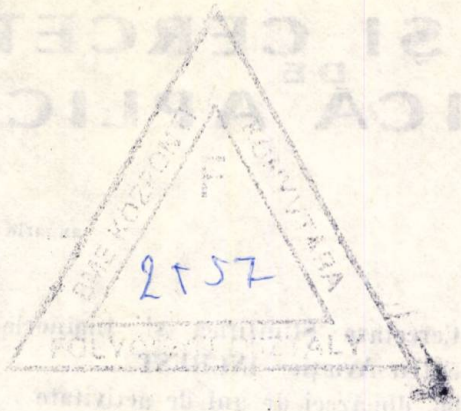
OLGA MARTIN, Flambajul panourilor sandwich cu feţe din plăci de plastic laminate, rigidizate cu fibre de carbon 79

C. DIMA, Efecte de perete asupra curgerilor bidimensionale subsonice 97

E. ŢURLEA, Metoda de determinare experimentală a caracteristicilor de vibraţii ale unei pale în rotaţie 103

ŞT. BOGOS, Studiu teoretic asupra caracteristicilor aerodinamice ale unui sistem de hipersustentaţie de tip Fowler. Efectul suflării voletului cu fantă şi recul. . . . 109

RECENZII 119



BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
FOLYÓIRAT ÚSTALY
2557
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MAGYARI MŰSZAKI EGYETEM
1848

ANALIZA, SINTEZA ŞI OPTIMIZAREA ARIPILOR DELTA ÎN ZBOR SUPERSONIC

de L. Z. DUMITRESCU

Institutul de Aviaţie — INCREST, Bucureşti

În lucrare se studiază aripile delta subţiri, în zbor supersonic, în cadrul teoriei liniarizate a mişcărilor conice.

Se formulează următoarele probleme : (i) *analiză* — determinarea distribuţiei vitezelor şi caracteristicilor aerodinamice globale, dîndu-se geometria scheletului aripii ; (ii) *sinteză* — problema inversă celei precedente ; (iii) *adaptare* — determinarea regimului de zbor la care viteza nu prezintă singularităţi la bordurile de atac, evitîndu-se astfel formarea pînzelor de vîrtej „în cornet" ; (iv) *optimizare* — găsirea formei aripii care satisface un criteriu de optim (de ex. : rezistenţă minimă) cu eventuale restricţii (de ex. portanţă dată).

Pentru o abordare matematic consistentă, este convenabil să se pornească de la cazul (ii), ce este redus la o problemă Dirichlet pentru exteriorul cercului unitate, cu anumite condiţii de compatibilitate. Soluţiile generale ale problemelor enunţate sînt apoi ilustrate cu exemple numerice, obţinîndu-se, prin cambrarea optimală a aripii, cîştiguri de performanţă de ordinul a 15—20%.

1. INTRODUCERE

Actualmente, la avioanele supersonice moderne, atît civile, cît şi militare, se generalizează configuraţiile cu aripi delta, ce se caracterizează printr-o săgeată accentuată, astfel încît, în zborul supersonic de croazieră, întreaga aripă se află în interiorul conului Mach cu originea în vîrful („apexul") aripii ; respectiv, bordurile de atac sînt, după terminologia curentă, subsonice. Această soluţie prezintă avantajul esenţial al eliminării undelor de şoc, ce apar la bordurile de atac în cazul cînd acestea sînt supersonice (deci, dacă săgeata este mai mică), reducîndu-se astfel substanţial rezistenţa la înaintare a avionului. Configuraţia delta mai posedă şi alte caracteristici favorabile, cum ar fi evoluţia lină a poziţiei punctului neutru, în toată gama vitezelor de zbor, de la subsonic la supersonic.

În cazul general, calculul aerodinamic al unor asemenea aripi se face cu ajutorul unor metode de discretizare în panouri, pe care se dispun singularităţi ; dintre aceste procedee, programul NASA — Woodward este, poate, cel mai cunoscut. Dacă însă generarea geometriei scheletului aripii se face cu simetrie conică, se poate beneficia de teoria clasică liniarizată a mişcărilor conice în regim supersonic [1], [2], care permite obţinerea rezultatelor sub o formă mai comodă pentru punerea în evidenţă a unor importante aspecte calitative, ce pot fi apoi transpuse şi la configuraţii mai complicate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 3—20

Oricare ar fi însă metoda efectivă de calcul, teoria pune în evidență apariția, la bordurile de atac ale aripii, a unor singularități ale distribuției de presiuni; aceste singularități sînt integrabile, astfel încît portanța globală rezultă finită, dar ele nu pot corespunde unei situații fizice reale. În fapt, de la bordurile de atac ale aripii se desprind două pînze de vîrtejuri „în cornet" (fig. 1), al căror efect este de a elimina singularitatea vitezelor; în același timp însă, dispare și efectul de succiune de la bordul de atac (echivalent cu cel de la profilele subțiri, în mișcare subsonică). Ca urmare, rezistența la înaintare a aripilor delta crește, peste valoarea rezistenței induse propriu-zise.

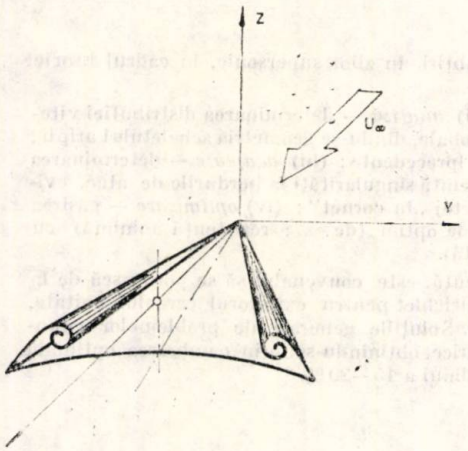


Fig. 1

La viteze subsonice, vîrtejurile în cornet produc un spor de portanță, peste valoarea prezisă de teoria liniară [3], astfel încît acest efect poate deveni avantajos; dar, în zborul supersonic de croazieră, este de evitat orice creștere de rezistență. Aceasta se poate obține prin aplicarea unei cambrări a scheletului aripii, la bordurile de atac, astfel încît tangenta profilului să fie paralelă cu direcția locală a vitezei (perturbate) a curentului. Evident, în alt regim de zbor decît cel nominal, adaptarea nu mai este perfectă, dar avantajele rămîn sensibile. De altfel, s-au dezvoltat și construcții cu bordurile de atac mobile, pentru a beneficia de efectul descris într-o gamă mai largă de numere Mach.

În lumina discuției de mai sus, principalele probleme ce se pot pune, pentru calculul unor asemenea aripi, sînt următoarele:

(i) *Analiză*: determinarea vitezelor de perturbație, a coeficienților de presiune și a caracteristicilor aerodinamice globale, fiind dată geometria aripii și numărul Mach de zbor.

(ii) *Sinteză* (design): găsirea acelei forme geometrice a aripii care produce, în condiții date, o distribuție de viteze cerută arbitrar. Corelat cu aceasta, este necesar să se stabilească și eventualele restricții pe care matematica problemei le impune asupra alegerii acestei distribuții de viteze.

(iii) *Adaptare*: determinarea regimurilor de zbor (număr Mach, incidență) la care, pe o aripă dată, singularitatea vitezelor la bordul de atac se anulează.

(iv) *Optimizare*: determinarea geometriei aripii (și implicit, a distribuției de viteze), astfel încît caracteristicile sale aerodinamice să satisfacă un criteriu de optim, de pildă să prezinte o rezistență la înaintare minimă, pentru o portanță dată, eventual cu anumite restricții de natură geometrică sau aerodinamică.

În cele ce urmează, aceste chestiuni se vor aborda pe baza unei noi formulări a teoriei clasice, ușor de transpus sub forma unui program FORTRAN. Esențial este însă că, atît la punerea problemei, cît și la rezolvarea acesteia, s-a urmărit menținerea unei cît mai bune consistențe matematice, și asupra acestui aspect vom insista în cele de mai jos.

După cum se va vedea, dezvoltarea teoriei se face mai convenabil dacă se abordează mai întîi problema de sinteză (design), rezolvarea problemei directe decurgînd apoi în mod elementar.

2. PROBLEMA DE SINTEZĂ

Problema pe care ne-o propunem este următoarea :

> Pentru o aripă delta subțire cu simetrie conică, în cadrul teoriei liniarizate, să se determine geometria scheletului, astfel încît, la un anumit număr Mach de zbor supersonic, distribuția vitezelor să fie egală cu cea impusă.

În prealabil însă va trebui să se determine care este forma cea mai generală a expresiei matematice, pentru distribuția de viteze, ce poate fi impusă, pentru a fi compatibilă cu restricțiile matematice ale teoriei.

În continuare, se vor scrie relațiile care fac trecerea la geometria scheletului aripii și, în sfîrșit, se vor da formulele pentru caracteristicile aerodinamice globale.

2.1. ECUAȚIILE PROBLEMEI

Principalele relații și formule de plecare se vor da aici în mod succint ; pentru detalii și demonstrații, precum și pentru bibliografie, se pot consulta lucrările de referință [1, 2, 4].

Se consideră obstacole conice alungite, cu grosimi mici transversal pe curentul supersonic neperturbat avînd viteza U_∞ (respectiv, numărul Mach M) ; în acest caz ecuațiile sînt omogene de ordinul întîi, astfel încît este suficient ca mișcarea să fie studiată într-un plan perpendicular pe U_∞, la o distanță egală cu unitatea de la vîrful aripii (fig. 2 *a*).

Introducînd variabilele complexe $x = y + \mathrm{i}z$ și $\xi = \eta + \mathrm{i}\zeta$, legate între ele prin transformarea lui Busemann :

$$Bx = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}, \quad (B^2 = M^2 - 1), \tag{1}$$

se știe că, în teoria liniarizată, viteza axială de perturbație u, adimensionalizată prin raportare la U_∞, satisface ecuației lui Laplace în variabilele η, ζ astfel încît se poate defini un potențial complex $f(\xi)$, a cărui parte reală să fie u :

$$f(\xi) = u + \mathrm{i}u'. \tag{2}$$

Aici u', partea imaginară a lui f, nu are semnificație fizică.

De asemenea, și pentru vitezele transversale de perturbație, v și w, se pot defini asemenea potențiale complexe, cu părțile imaginare v' și w'; se arată că între aceste potențiale subzistă relații de compatibilitate, de forma:

$$w + iw' = \frac{iB}{2} \int \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) df. \tag{3}$$

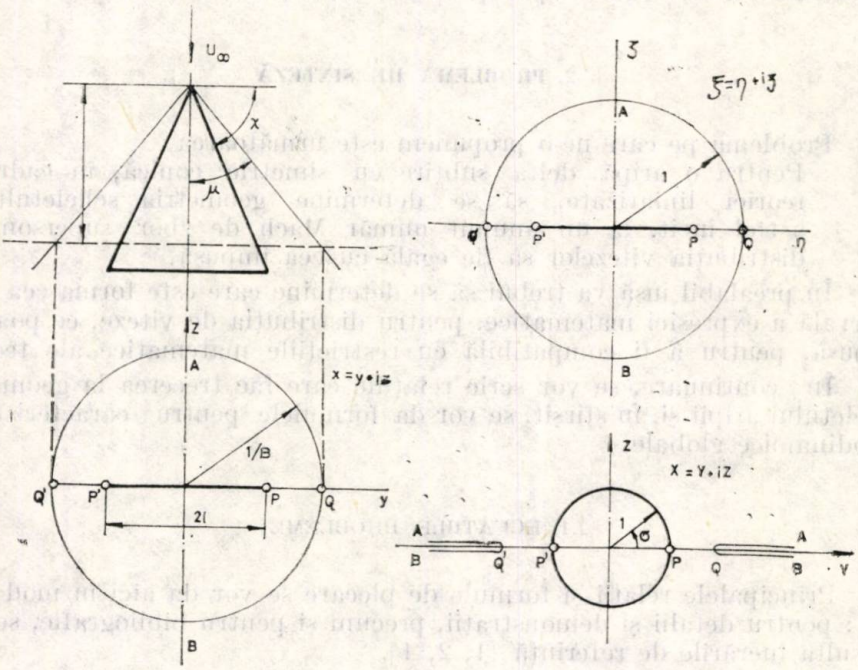


Fig. 2

Se reamintește că, în teoria micilor perturbații, coeficientul local de presiune $C_p = -2u$.

În fiecare punct de pe suprafața aripii, condiția la limită se exprimă prin egalitatea vitezei verticale de perturbație, w, cu panta locală a scheletului, α.

Se știe [2] că această condiție se poate impune, nu pe urma reală a aripii în planul x, ci pe proiecția acesteia pe axa Oy, care devine o tăietură între punctele de abscisă $\pm l$.

Urma conului Mach în planul transversal $x = y + iz$, este un cerc cu raza $1/B$, care trece în cercul unitate din planul $\xi = \eta + i\zeta$ (fig. 2 *b*).

Calculele ulterioare sînt mult simplificate dacă se mai efectuează încă o transformare conformă [2], prin care imaginea aripii este adusă pe cercul unitate în planul complex $X = Y + iZ$ (fig. 2 *c*):

$$x = \frac{1}{2} \left(X + \frac{1}{X} \right). \tag{4}$$

Introducînd notațiile :

$$k = Bl, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \tag{5}$$

se arată că, în planul X, urma conului Mach se transformă în două tăieturi, practicate de-a lungul axei reale ; $(-\infty, -(1 + k')/k)$ și $((1 + k')/k, +\infty)$.

Urma aripii este cercul

$$X = e^{i\sigma}; \quad \cos\sigma = y/l, \tag{6}$$

iar termenul din integrala (3) se scrie :

$$\xi - \frac{1}{\xi} = -\frac{2}{k}\,\frac{\sqrt{4X^2 - k^2(1 + X^2)^2}}{1 + X^2}. \tag{7}$$

Pentru determinarea completă a curgerii, este suficient să se cunoască expresia potențialului $f(X)$, a cărui parte reală, u, reprezintă chiar distribuția de presiuni pe aripă, dîndu-se distribuția pantelor locale, $w(y)$. La un examen mai atent, rezultă însă că este necesar să fie satisfăcute și următoarele condiții suplimentare :

(i) : $u = v = w = 0$ pe urma conului Mach, respectiv pe tăieturile corespunzătoare din planul X ;

(ii) : $\dfrac{df}{d\xi} = 0$ pentru $\xi = 0$, pentru ca integrala din ecuația (3) să nu fie singulară ;

(iii) : la bordurile de atac ($y = \pm l$), viteza axială de perturbație poate avea o comportare singulară, dar integrabilă ; deci, u poate tinde spre infinit, dar numai proporțional cu $1/\sqrt{l^2 - y^2}$.

Cu aceste pregătiri, problema de sinteză (design) se poate reformula astfel :

Să se determine potențialul complex $f(X)$, dîndu-se partea sa reală $u(\sigma)$ pe semicercul unitate superior, cu restricțiile suplimentare (i), (ii), (iii), precum și cu anumite condiții de simetrie ce decurg din geometria problemei :

(iv) :

$$u(-\sigma) = -u(\sigma) \tag{8}$$

căci, aripa fiind presupusă subțire, vitezele axiale de perturbație trebuie să fie antisimetrice față de axa reală ;

(v) :

$$u(\pi - \sigma) = u(\sigma) \tag{9}$$

în cazul unei aripi fără derapaj.

Geometria aripii care realizează această distribuție de viteze se obține apoi cu ajutorul ecuației (3), care devine o simplă cvadratură.

În continuare, această problemă va fi redusă la o formulare mai simplă, corespunzătoare unei probleme la limită standard pentru ecuația lui Laplace.

2.2. DETERMINAREA FORMEI POTENȚIALULUI COMPLEX

Să examinăm acum problema mai în detaliu.

(a) Ecuația care guvernează fenomenul fiind liniară (ecuația lui Laplace), iar condițiile pe frontiere fiind antisimetrice (iv), rezultă că și soluția problemei va trebui să fie tot antisimetrică față de axa reală, deci că $u(-\xi) = -u(\xi)$ în tot domeniul de definiție.

b) Pe de altă parte, în interiorul aripii, între extremitățile acesteia și urma conului Mach (segmentele PQ, $P'Q'$ în fig. 2) neexistînd obstacole, vitezele trebuie să fie continue la traversarea axei reale. Din (a) rezultă deci că, pe aceste segmente, trebuie să avem $u = 0$.

(c) Mai departe, în planul X, pe ambele margini ale tăieturilor care reprezintă imaginea conului Mach, subzistă condiția (i), $u = 0$; deci, și la traversarea acestor tăieturi, partea reală a potențialului este continuă, iar tăieturile își pierd semnificația.

În acest mod, partea reală u, a potențialului este definită pe toată frontiera domeniului din semiplanul superior, mărginit de semicercul unitate și de porțiunile de pe axa reală exterioare acestuia. Fie $f(X)$ acest potențial; datorită condiției de antisimetrie (iv) și faptului că $u = 0$ pe axa reală, f poate fi prelungit, conform principiului de simetrie al lui Schwartz, și în semiplanul inferior, rămînînd continuu la traversarea axei reale.

Problema noastră este atunci echivalentă cu o problemă Dirichlet pentru $f(X)$ în exteriorul cercului unitate, pe conturul căruia se dau valorile părții reale $u(\sigma)$, cu respectarea simetriilor (iv) și (v). Prin aceasta se satisface în mod automat și condiția $u = 0$ pe conul Mach (i).

Astfel pusă, problema are, după cum se știe, o soluție unică [2], în condiții foarte generale pentru valorile la limită $u(\sigma)$; dar nu este sigur că această soluție va satisface toate restricțiile suplimentare (i) — (v). Cu alte cuvinte, aceste condiții restrîng libertatea de a prescrie arbitrar distribuția de presiuni de pe aripă.

(i'): Condiția (i) pusă pe conul Mach impune ca la $X \to \mathrm{i}\,\infty$, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}X$ să tindă către zero cel puțin la fel de repede ca $1/X^2$, deci, ca $f(X)$ să tindă către zero cel puțin ca $1/X$.

(ii'): La $X = \pm \mathrm{i}$, care corespunde la $\xi = 0$, condiția $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi = 0$ revine la a impune ca, în vecinătatea acestui punct, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}X$ să aibă o dezvoltare de forma $(1 + X^2)F(X)$, unde $F(X)$ este o funcție regulată în $X = \pm \mathrm{i}$.

(iii'): Condiția impusă la bordurile de atac se poate satisface dacă potențialul conține un termen ce posedă singularitatea dorită astfel încît să se scrie sub forma:

$$f(X) = \frac{2\mathrm{i}\, b_0 X}{X^2 - 1} + g(X), \tag{10}$$

funcția $g(X)$ fiind mărginită în $X = \pm 1$.

Primul termen reprezintă chiar potențialul aripii delta plane [1] pentru care viteza are expresia:

$$u(\sigma) = b_0/\sin\sigma. \tag{11}$$

(iv′) : Din condiția de antisimetrie rezultă, în continuare că, la bordurile de atac, funcția $g(X)$ trebuie, ori să se anuleze, ori să aibă, cel mult, un salt mărginit, de la $-\Delta u/2$ la $+\Delta u/2$. O asemenea comportare a funcției s-ar obține dacă aceasta ar conține un termen logaritmic, de forma: $\frac{2i\,\Delta u}{\pi} \ln\frac{X-1}{X+1}$. Se observă însă că acest potențial nu satisface condițiile (i,ii) de mai sus, nefiind nul pentru $X = \pm i\,\infty$. Prin urmare, trebuie să se admită că, exceptînd polii simpli din $X = \pm 1$, funcția $f(X)$ este regulată pe cercul unitate și în exteriorul acestuia, iar $g(X)$ se anulează în $X = \pm 1$.

Ar rezulta de aici că g se poate dezvolta în serie

$$g(X) = \sum_{1}^{\infty} \frac{ib_n}{X^n}. \tag{12}$$

Această dezvoltare satisface condiția impusă pe conul Mach, ca și relațiile de simetrie (iv, v) dacă se ia n impar, dar nu și condiția (ii′). Defectul se remediază ușor, grupînd termenii în mod convenabil :

$$g(X) = \sum_{1}^{\infty} ib_n \left(\frac{1}{nX^n} + \frac{1}{(n+2)X^{n+2}}\right) \quad (n \text{ impar}). \tag{13}$$

Se deduce imediat

$$\frac{dg}{dX} = -i \Sigma\, b_n \frac{X^2+1}{X^{n+3}}, \tag{14}$$

ceea ce, după cum se observă, satisface condiției (ii′) și rezolvă în principiu problema, deoarece forma generală a potențialului complex este determinată.

Se ajunge astfel la următoarea dezvoltare, ca fiind cea mai generală expresie admisibilă a distribuției de viteze pe aripă, compatibilă cu toate restricțiile problemei :

$$u(\sigma) = \frac{b_0}{\sin\sigma} + \sum_{1}^{\infty} b_n\, S_n(\sigma) \quad (n \text{ impar}), \tag{15}$$

unde funcțiile S_n au expresiile :

$$S_n(\sigma) = \frac{1}{n}\sin n\sigma + \frac{1}{n+2}\sin(n+2)\sigma. \tag{16}$$

Se poate arăta că această dezvoltare este suficient de generală pentru a acoperi toate cazurile practice. Într-adevăr, este evident că orice distribuție de viteze dată, care respectă condițiile de simetrie și restricția (iii) la bordurile de atac, se poate scrie sub forma unei dezvoltări Fourier, la care se adaugă termenul singular :

$$u = \frac{B_0}{\sin\sigma} + \sum_{1}^{\infty} B_n \sin n\sigma \quad (n \text{ impar}). \tag{17}$$

Observăm, în treacăt, că, deși această dezvoltare face ca termenul nesingular să se anuleze la bordurile de atac, ea poate aproxima, la nevoie, așa cum se cunoaște din teoria seriilor Fourier, și o variație a lui u având un salt finit, antisimetric.

Rezolvarea formală a problemei, în cazul general, este acum imediată, și constă din identificarea coeficienților în dezvoltările (15) și (17) :

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0, \\ B_1 &= b_1, \\ 3B_3 &= b_1 + b_3, \qquad (n \text{ impar}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ nB_n &= b_{n-2} + b_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Se va vedea că, pentru aplicațiile practice, este mai avantajos să se procedeze altfel.

2.3. DEFINIREA GEOMETRIEI ARIPII

Presupunînd acum că, în conformitate cu cele de mai sus, expresia potențialului $f(X)$ a fost găsită, se poate determina forma aripii care realizează distribuția de viteze impusă. În acest scop se utilizează ecuația 3, calculîndu-se vitezele verticale de perturbație în punctele de pe aripă. Mai întîi, se exprimă această viteză, w_0, în centrul aripii ($y = 0$), egalînd-o cu incidența centrală α_0 prin integrarea ecuației (3) pe axa Oz, între cercul Mach și aripă, ținînd seama de condiția $w = 0$ pe cercul Mach :

$$-w_0 = Re\,\frac{iB}{2}\int_{z=0}^{1/B}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\mathrm{d}f = -\alpha_0, \tag{19}$$

înlocuind f cu expresia sa (ec. (10) și (13)), rezultă :

$$-w_0 = \frac{2B}{k}\left[b_0 J_0 + \sum_1^{\infty} b_n J_n\right] \quad (n \text{ impar}), \tag{20}$$

unde

$$J_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k'^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}E(k'), \tag{21}$$

$$J_n = (-1)^{\frac{n+3}{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{(1+\sin\alpha)^2}\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\alpha\,. \tag{22}$$

E este chiar integrala eliptică de speța doua și modul k', iar integralele J_n se pot reduce și ele la combinații de integrale eliptice. Întrucît însă

funcțiile respective nu au singularități, este mai comod ca aceste integrale să fie evaluate direct, numeric.

Într-un punct curent de pe aripă, avem analog :

$$w(\sigma) - w_0 = \frac{2B}{k} \sum_1^\infty b_n L_n(k, \sigma), \tag{23}$$

unde

$$L_n(k, \sigma) = \int_\sigma^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2\sigma}\ \sin(n+1)\sigma\, d\sigma \tag{24}$$

(n impar).

Integrala termenului singular nu are parte reală, astfel încît viteza w dată de acest termen rămîne constantă pe toată aripa și egală cu w_0, așa cum era de așteptat, deoarece acest termen corespunde aripii delta plane.

Se introduce acum variabila auxiliară φ :

$$\cos\varphi = k\ \cos\sigma = By \tag{25}$$

în funcție de care integralele L_n capătă următoarea formă generală :

$$L_n(\varphi) = \sum_{m=3}^{n+2} l_{nm}\,(1 - \sin^m\varphi) \qquad (n, m, \text{impari}). \tag{26}$$

În anexa 1 se dau expresiile coeficienților $l_{nm}(k)$ pentru primele cîteva funcții L_n.

Expresia finală a vitezelor verticale de perturbație (respectiv a pantelor locale ale aripii) este deci :

$$w = w_0 \left[1 - \frac{\sum_1^\infty b_n L_n(\sigma)}{b_0 J_0 + \sum_1^\infty b_n J_n} \right]. \tag{27}$$

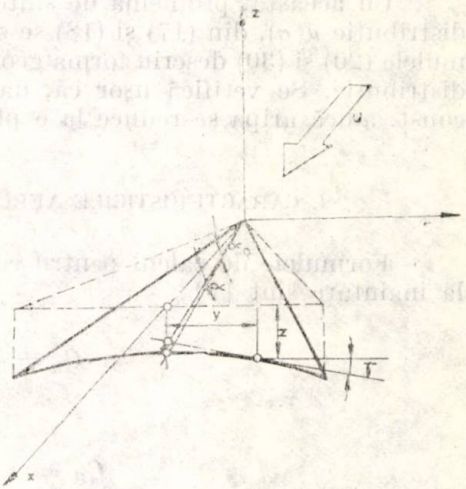


Fig. 3

De aici se poate deduce forma geometrică a scheletului aripii, definită prin curba sa directoare în planul yOz ; pentru aceasta se exprimă faptul că, în fiecare punct, tangenta la suprafața aripii face, într-un plan vertical, un unghi egal cu w, față de direcția curentului neperturbat, $U\infty$. Cu referire la figura 3, se obține :

$$z = \operatorname{tg}\alpha + y \operatorname{tg}\gamma = w + y\frac{dz}{dy}. \tag{28}$$

Pe axa aripii avem $z = z_0 = w_0 = \alpha_0$, astfel încît soluția ecuației (28) se scrie :

$$z = w_0 \left\{ 1 + \frac{1}{b_0 J_0 + \sum_1^\infty b_n J_n} \sum_1^\infty \left[b_n \cos \sigma \int_\sigma^{\pi/2} \frac{L_n(\sigma) \sin \sigma}{\cos^2 \sigma} \mathrm{d}\sigma \right] \right\}. \tag{29}$$

Se verifică faptul că integralele din formulă nu sînt singulare pentru $\sigma = \pi/2$; ținînd seama de expresiile funcțiilor L_n, expresia liniei directoare a aripii capătă forma :

$$z(y) = w_0 \left[1 + \frac{\sum_{n=1}^\infty b_n \sum_{m=3}^{n+2} l_{nm} K_m(\varphi)}{b_0 J_0 + \sum_{n=1}^\infty b_n J_n} \right], \tag{30}$$

unde

$$K_m(\varphi) = \cos \varphi \int_\varphi^{\pi/2} \frac{(1 - \sin^m \varphi) \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \mathrm{d}\varphi. \tag{31}$$

În anexa 2 sînt date expresiile analitice ale primelor cîteva integrale $K_m(\varphi)$.

Cu aceasta, problema de sinteză este rezolvată : dacă se prescrie o distribuție $u(\sigma)$, din (17) și (18) se obțin coeficienții b_0, b_n, iar apoi, formulele (20) și (30) descriu forma geometrică a aripii care realizează această distribuție. Se verifică ușor că, dacă $b_n = 0$ $(n > 0)$, rezultă $z = \alpha_0 =$ const. adică aripa se reduce la o placă plană.

2.4. CARACTERISTICILE AERODINAMICE GLOBALE ALE ARIPII

Formulele de calcul pentru coeficienții de portanță și de rezistență la înaintare sînt [1] :

$$C_L = \frac{4}{l} \int_0^l u \mathrm{d}y, \tag{32}$$

$$C_D = -\frac{4}{l} \int_0^l uw \mathrm{d}y. \tag{33}$$

Introducînd expresia generală a vitezei u, (15), rezultă imediat :

$$C_L = \pi(2 B_0 + B_1) = \pi (2b_0 + b_1). \tag{34}$$

Pentru calculul rezistenței, folosind și expresia lui w, (27), rezultă un șir de integrale ce se pot explicita, dar care se evaluează mai comod direct numeric, nefiind singulare.

Trebuie precizat că relația (33) nu ține seama de succiunea de la bordul de atac, ce subzistă în cazul cînd vitezele devin infinite, iar termenul $b_0/\sin\sigma$ nu este nul; dar, așa cum s-a menționat mai sus, acest efect nu se regăsește experimental. De asemenea, în calcul nu se include și rezistența suplimentară produsă de pierderea de energie din nucleul vîrtejurilor în cornet.

3. PROBLEMA DE ANALIZĂ

Rezultatele capitolului precedent se constituie într-o teorie completă a aripii delta în zbor supersonic, pe baza căreia orice problemă pusă se rezolvă în mod elementar. Astfel, în cazul analizei, se cere să se determine distribuția de viteze (și caracteristicile globale), cunoscîndu-se, de data aceasta, geometria aripii. În acest scop, se pornește de la ecuația (30), care poate fi privită ca fiind o dezvoltare a funcției $z(y)$, date, într-un șir de funcții $M_n(\varphi)$:

$$z(y) = z_0 - \frac{2B}{k} \sum_1^N b_n M_n(\varphi). \tag{35}$$

Aici s-a notat $\varphi = \arccos(By)$, z_0 este cota aripii în planul central de simetrie, egală numeric cu incidența α_0, iar funcțiile M_n au expresiile :

$$M_n(\varphi) = \sum_{m=3}^{n+2} l_{nm} K_m(\varphi). \tag{36}$$

Presupunînd dezvoltarea (35) efectuată (de ex. prin scrierea acestei ecuații într-un număr convenabil de puncte și rezolvarea sistemului algebric liniar rezultant), coeficienții $b_n (n = 1, N)$ sînt determinați. Apoi din (20), se găsește și coeficientul b_0 :

$$b_0 = -\frac{1}{J_0}\left(\frac{k}{2B} z_0 + \sum_1^N b_n J_n\right). \tag{37}$$

Cu aceasta, problema este complet rezolvată, căci folosind coeficienții b_n, se poate calcula distribuția vitezelor (ec. 15) precum și coeficienții aerodinamici globali.

Desigur este greu să se dea o justificare riguroasă a convergenței și unicității dezvoltării unei funcții arbitrare $z(y)$, cu ajutorul funcțiilor M_n. Remarcăm însă, că acestea din urmă conțin, în esență, termeni de forma $\sin n\varphi$, astfel încît, în mod aproximativ, dezvoltarea (35) este echivalentă unei reprezentări cu ajutorul unor polinoame trigonometrice, despre care se știe că posedă proprietățile cerute. De altfel, o serie de experimentări numerice au confirmat gradul de aproximare foarte satisfăcător al unor curbe directoare arbitrare, prin metoda propusă.

Pentru a evita orice confuzie, este însă necesar să se precizeze că, dată fiind forma curbei directoare a unei aripi, sub forma unei funcții $z(y)$ $(0 < y < 1)$, dezvoltarea (35) trebuie efectuată din nou pentru fiecare număr Mach de zbor; într-adevăr, în formule intră unghiul φ, ce are valori diferite, la un y dat, în funcție de $B = \sqrt{M^2 - 1}$. Ca urmare, coeficienții b_n trebuie priviți ca funcții (neexplicitate) de M.

4. REGIMUL DE ZBOR ADAPTAT

Această problemă se formulează (și se rezolvă) acum imediat : pentru un număr Mach de zbor dat (cu condiția ca bordurile de atac ale aripii să fie subsonice) se cere să se determine incidența la care singularitatea distribuției de viteze dispare.

Aceasta revine la a impune $b_0 = 0$, de unde rezultă valoarea incidenței în planul de simetrie :

$$\tilde{\alpha}_0 = -\frac{2B}{k} \sum_1^N b_n J_n. \tag{38}$$

Este clar că $\tilde{\alpha}_0$ depinde de M, prin intermediul valorilor lui B, k, dar și al coeficienților b_n, ce trebuie calculați dîndu-se curba directoare a aripii, pentru numărul Mach dat.

5. PROBLEMA DE OPTIMIZARE

La ora actuală, sînt disponibile metode puternice de rezolvare a unor probleme de optimizare complexe, neliniare, avînd un grad înalt de generalitate, ca, de exemplu, procedeul Davidon-Fletcher-Powell (vezi de ex. [5]). Acestea determină minimul unei mărimi F, funcția obiectiv, care reprezintă rezultatul unui algoritm dat, oricît de general, aplicat unei probleme ce se poate formula ca depinzînd de un număr nu excesiv de mare de parametri, în prezența unor condiționări (restricții), de asemenea în număr limitat, dar foarte generale. Condiția esențială pentru a se putea aplica o asemenea procedură este de a se dispune de un algoritm rapid pentru calculul funcției obiectiv și al restricțiilor, dîndu-se valorile parametrilor problemei ; aceasta deoarece derivatele parțiale ale funcției obiectiv, după acești parametri, trebuie evaluate numeric, prin aplicarea repetată a algoritmului după incrementarea, pe rînd, a fiecărui parametru, cu o cantitate mică.

În cazul nostru, teoria prezentată mai sus pune la dispoziție un asemenea algoritm de analiză, rapid și eficient, cu ajutorul căruia se pot evalua caracteristicile unei aripi delta, parametrii problemei fiind coeficienții b_n. Ca atare, devine posibil să se formuleze diverse probleme de optimum, dintre care, în cele ce urmează, se va discuta ca exemplu, următoarea :

> Fiind dată o aripă delta cu săgeata cunoscută, la un anumit număr Mach de zbor, să se determine forma scheletului său, astfel încît rezistența sa la înaintare să fie minimă, cu condiția ca portanța să aibă o valoare impusă.

Funcția obiectiv a problemei este, evident, C_D, restricția constă din valoarea impusă pentru C_L, iar parametri liberi sînt coeficienții b_n.

Pentru rezolvarea problemei s-a cuplat un program standard de optimizare după metoda citată (programul SUMT, într-o variantă adaptată și dezvoltată de M. P. Dumitrescu), cu programul de calcul pentru aripile delta, scris în conformitate cu teoria din prezenta lucrare și introdus în programul SUMT sub formă de subrutină.

Programul include opțiunea de a se impune ca mișcarea să nu prezinte viteze infinite la bordurile de atac ale aripii, pentru a nu se introduce o rezistență la înaintare suplimentară, ce nu este prinsă în calcul. În acest caz, se face $b_0 = 0$, parametri problemei rămînînd $b_n (n = 1, 3, \ldots, N)$.

Experimentări numerice au arătat că este suficient ca dezvoltările să fie limitate la șase termeni ($N = 9$), pentru a se putea descrie forme destul de generale ale scheletului aripilor; în aceste condiții analiza se face în cîteva secunde CPU, iar programul de optimizare necesită o durată de calcul moderată.

După obținerea convergenței și determinarea coeficienților b_n ce satisfac condiția de optimum, aplicarea formulelor de mai sus determină forma scheletului aripii, precum și valorile coeficienților aerodinamici globali. Ulterior, este posibil să se efectueze și o analiză „off design" a aripii rezultante, pentru a se verifica buna ei comportare în alte regimuri de zbor (număr Mach, incidență), decît cel specificat.

6. EXEMPLE NUMERICE

În cele ce urmează se vor prezenta rezultatele cîtorva exemple de calcul, corespunzătoare cazurilor de mai sus.

6.1. SINTEZA ARIPILOR DELTA

În principiu, orice distribuție de viteze, ce satisface condițiilor discutate în capitolul 2, poate fi impusă și realizată; considerente de natură aerodinamică restrîng însă această libertate de alegere.

Astfel, este necesar ca, în curgerea transversală față de bordul de atac, să nu se depășească viteza locală a sunetului, pentru a nu se genera unde de șoc locale, care ar mări rezistența la înaintare. Pentru determinarea valorii maxime admisibile, în acest sens, a vitezei axiale de perturbație, se consideră, prin analogie cu teoria clasică a aripilor în săgeată, componenta normală la bordul de atac, a vitezei curentului : $U'_\infty = U_\infty \cos\chi$ (respectiv, numărul Mach $M' = M \cos\chi$). Viteza locală de perturbație, raportată la U'_∞, devine $u' = u/\cos\chi$, iar coeficientul de presiune, $C'_p = -2u'$. Acesta din urmă trebuie să fie, în valoare absolută, mai mic decît coeficientul de presiune critic C'^*_p, a cărui valoare este cunoscută [1] astfel încît, pînă la urmă, rezultă :

$$u_{max} < u^*_{max} = \frac{1}{\gamma M^2 \cos^2\chi} \left[\left(\frac{2 + (\gamma - 1) M^2 \cos^2\chi}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right]. \quad (39)$$

În cazul general, întrucît, teoretic, viteza la bordurile de atac tinde spre infinit, s-ar depăși întotdeauna viteza critică; în realitate însă, apariția vîrtejurilor în cornet limitează intensitatea depresiunilor.

Ar rezulta, de aici, că este avantajos ca distribuția de viteze aleasă să prezinte variații cît mai mici, de-a lungul anvergurii, precum și să realizeze cerința de adaptare ($u = 0$ la bordurile de atac). Calculele au arătat însă că, în asemenea cazuri, aripa rezultantă prin operația de design se abate mult de la forma aripii plane, ceea ce ar conduce la o comportare nesatisfăcătoare în zborul la viteze mici, cînd existența vîrtejurilor în cornet, la bordurile de atac, este dezirabilă.

Aceste considerente ne-au condus să încercăm a impune, drept distribuţie a vitezelor de-a lungul anvergurii, o curbă care să se apropie de cea a aripii delta plane (a cărei expresie este $u = B_0/\sin\sigma$), eliminînd, însă singularitatea de la bordurile de atac. Aceasta se realizează uşor dacă se aproximează expresia de mai sus printr-un polinom de funcţii b_n (ec. (15)), limitat la cîţiva termeni. Coeficienţii b_n se obţin prin egalarea celor două expresii într-un număr convenabil de puncte; luînd numai trei termeni în dezvoltare, se obţine:

$$b_1 = 1{,}73698 B_0, \quad b_3 = 1{,}26302\ B_0, \quad b_5 = 0{,}18229\ B_0. \tag{40}$$

Factorul de proporţionalitate B_0 se calculează cu ajutorul valorii cerute a portanţei, C_L. În figura 4 s-a reprezentat distribuţia de viteze în anvergură, precum şi curba directoare a scheletului aripii, obţinută conform

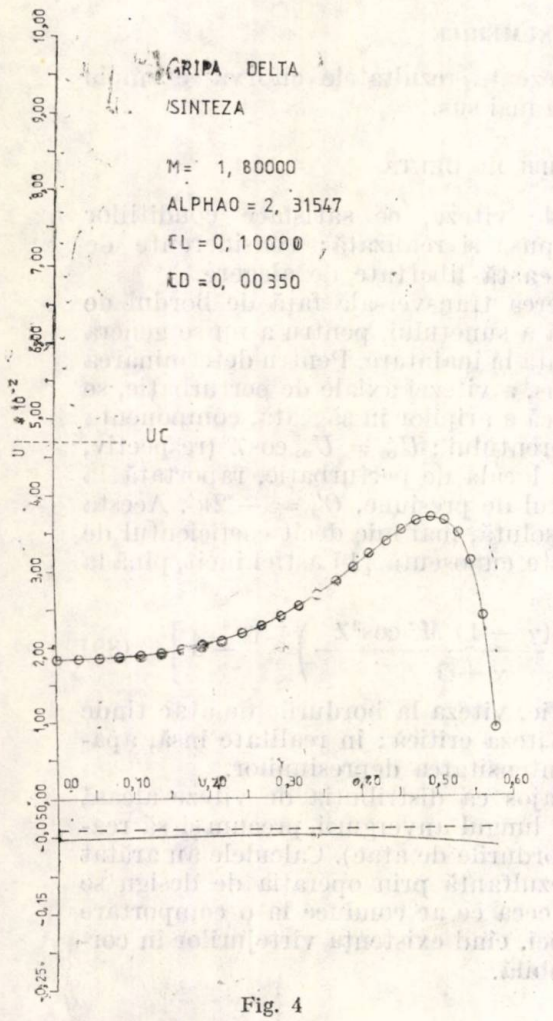


Fig. 4

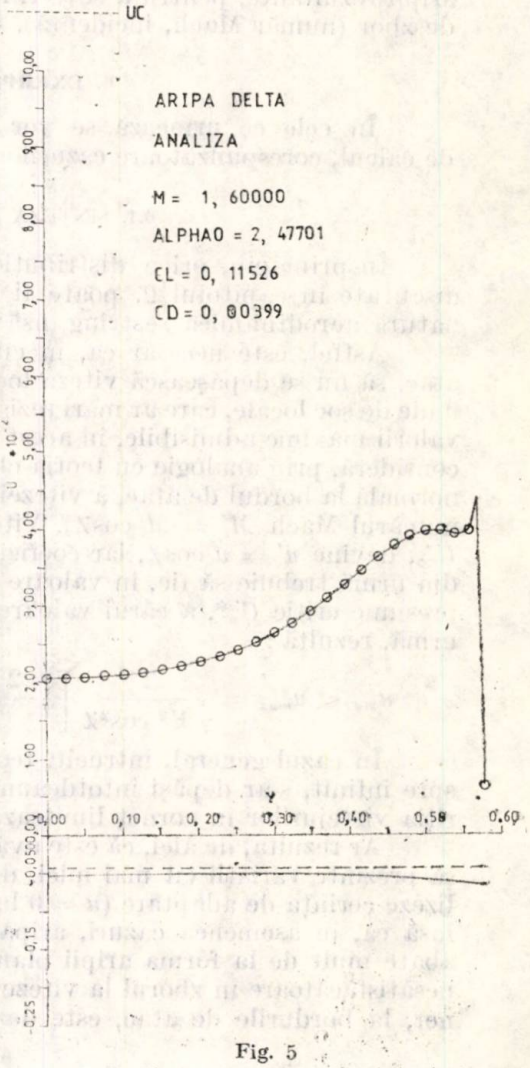


Fig. 5

teoriei expuse mai sus. De asemenea, s-a trasat și urma aripii delta plane ce realizează aceeași portanță. Rezistența la înaintare a acesteia din urmă este $C_{D_0} = 0{,}0404$, în timp ce aripa curbată are $C_D = 0{,}035$, ceea ce reprezintă un cîștig sensibil. Reamintim însă că, în calcule nu s-a inclus rezistența de frecare, iar, în cazul aripii plane. s-a considerat că tot efectul de succiune se pierde. Se observă, de asemenea, că modificarea formei aripii este minimală, astfel încît buna ei comportare la viteze mici nu este compromisă.

6.2. ANALIZA „OFF-DESIGN"

Mai departe, aripa generată după procedura de mai sus poate fi investigată în alte regimuri de zbor, iar în figura 5 se prezintă rezultatele pentru un număr Mach mai mic decît cel nominal ($M = 1{,}6$), dar la aceeași portanță ($C_L = 0{,}1$).

Se observă că vitezele de la bordurile de atac nu mai sînt nule; totuși comportarea aripii rămîne satisfăcătoare.

6.3. REGIMUL DE ADAPTARE

Pentru același număr Mach, se poate determina incidența la care se obține, din nou, anularea vitezelor la bordurile de atac.

Valoarea obținută este de 2,244°, la care portanța este $C_L = 0{,}08$, iar rezistența $C_D = 0{,}00195$. Comparînd această din urmă cifră cu rezistența unei aripi plane avînd aceeași portanță, $C_{D_0} = 0{,}00241$, constatăm că aripa curbată își menține avantajul și în alte regimuri de zbor decît cel nominal.

6.4. OPTIMIZAREA UNEI ARIPI CU SCHELET ELIPTIC

O posibilitate simplă de definire a unei probleme de optimizare, în cazul nostru, este de a se căuta minimizarea rezistenței aripii, atunci cînd scheletul acesteia are forma unui segment de elipsă, variabilele problemei fiind cele două semiaxe ale elipsei generatoare. Este ușor de intuit că se obține o gamă largă de forme ale scheletului prin varierea parametrilor aleși, astfel încît se poate căuta un optimum, impunînd, eventual, și restricția de viteză nulă la bordurile de atac.

Dat fiind numărul mic de parametrii ai problemei, programul converge în cîteva secunde CPU, iar în figura 6 este arătat scheletul aripii rezultante, precum și distribuția de viteze. Se observă că rezistența la înaintare, deși mai mică decît cea a aripii plane ($C_D = 0{,}0368$) depășește valoarea obținută pentru aripa din exemplul 1 (fig. 4); aceasta este consecința restrîngerii impuse a familiei de curbe dintre care se face alegerea formei scheletului.

MUSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR KÖZPONTI 1848

6.5. OPTIMIZAREA UNEI ARIPI DELTA DE FORMĂ GENERALĂ

O altă modalitate, mai generală, de a defini o aripă optimală, constă în a admite că dezvoltarea în serie a expresiei distribuției de viteze este limitată la primii 6 termeni. Impunerea restricției de viteză nulă la bordul de atac revine la a lua $B_0 = 0$, astfel încît, în acest caz, rămîn 5 parametrii liberi, pe care îi poate modifica programul de optimizare. Rezultatul este reprezentat în figura 7, observîndu-se că rezistența la înaintare a scăzut la 0,00333 (față de 0.0040 la aripa delta plană), la o incidență globală $\alpha_0 = 2{,}9082°$ (incidența aripii plane fiind $\alpha_{00} = 2{,}30774°$).

Rezultatul este interesant din mai multe puncte de vedere : în primul rînd, el pune în evidență, posibilitățile (și limitele) procedurii de optimizare propuse, cîștigul de rezistență (excluzînd rezistența de frecare) fiind de circa 30%.

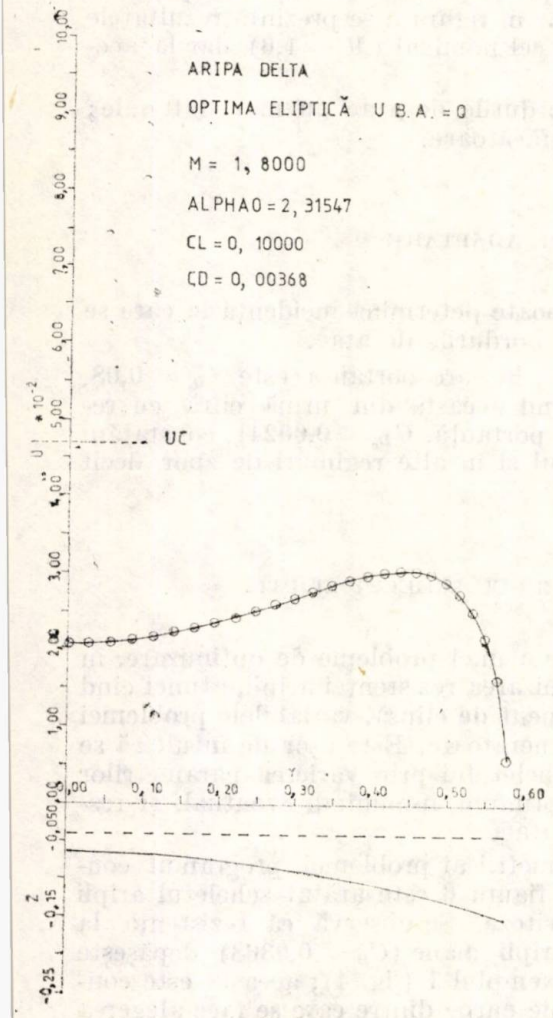


Fig. 6

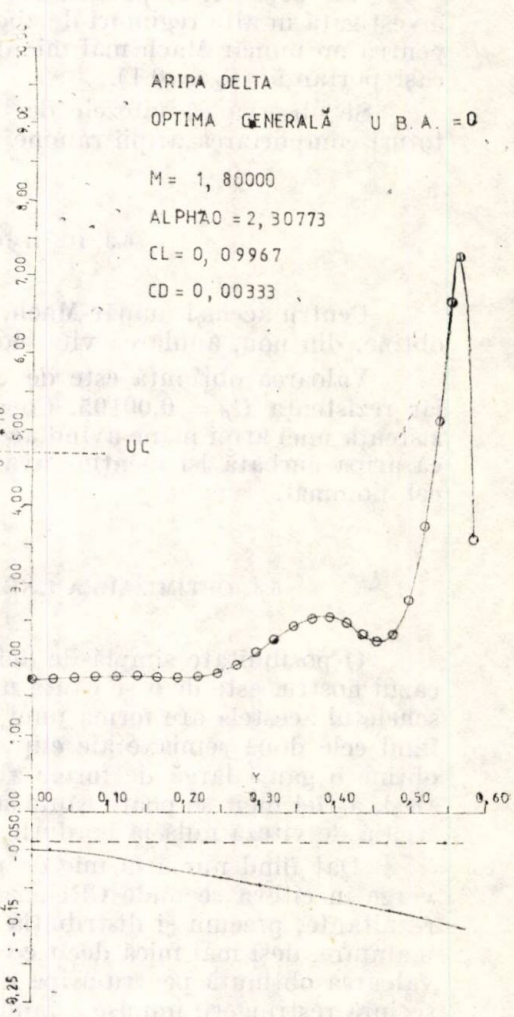


Fig. 7

În al doilea rînd, se observă că aripa optimală dezvoltă o distribuție de viteze ce prezintă maxime pronunțate în apropierea bordurilor de atac; caracterul nemonoton al curbei $u(y)$ trebuie pus pe seama trunchierii seriei coeficienților b_n.

Vîrful de depresiune depășește, de altfel, valoarea critică, astfel încît, practic, configurația obținută s-ar putea să trebuiască amendată. Încercări de a introduce o restricție suplimentară ($u < u^*$) au făcut însă ca programul să nu mai conveargă. Ca urmare, s-au prelucrat rezultatele obținute, trasînd o curbă ce aproximează distribuția de viteze găsită (fig. 7), dar care să nu mai depășească viteza critică (și cu aceeași ocazie, să nu mai fie nemonotonă).

Această curbă a fost apoi considerată ca reprezentînd o distribuție de viteze impusă, intrînd cu ea în programul de calcul în opțiunea „design". Rezultatul este reprezentat în figura 8. Se observă că distribuția de viteze este mult mai „curată", valoarea maximă este, practic, egală cu viteza critică, iar rezistența la înaintare nu crește semnificativ față de cea optimă ($C_D = 0{,}034$).

Ca o observație generală, se poate constata că, la toate aripile obținute, reducerea rezistențelor la înaintare este însoțită de o cambrare în jos a bordului de atac; această formă de aripă este, de altfel, favorabilă și pentru regimurile de zbor subsonice.

În rezumat, metoda propusă își dovedește utilitatea și versatilitatea, întrucît permite să se abordeze (și să se rezolve) un evantai larg de probleme din teoria aripilor delta conice.

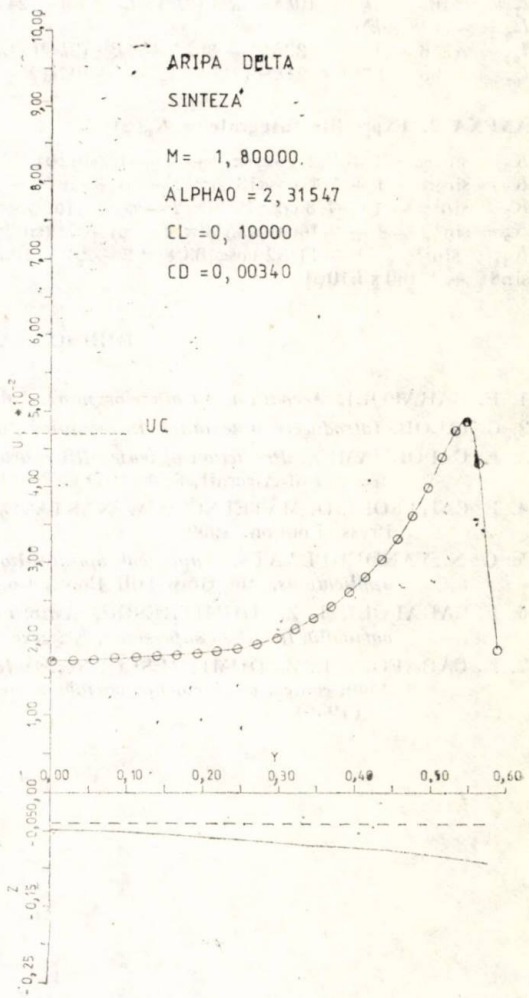


Fig. 8

★

Autorul dedică această lucrare memoriei veneratului său magistru, academicianul Elie Carafoli, unul dintre creatorii fundamentelor teoriei aripilor delta supersonice; pentru noi a constituit un privilegiu posibilitatea de a ne începe cariera științifică, acum peste 35 de ani, chiar în acest domeniu, cercetînd alături de Profesor, probleme înrudite cu cele de azi [6,7].

Primit în redacție la 10 octombrie 1988

ANEXA 1. Expresiile coeficienților funcțiilor $L_n(\varphi)$

$l_{13} = 2/(3k^2)$,
$l_{33} = 4(2 - k^2)/(3k^4)$; $l_{35} = -8/(5k^4)$,
$l_{53} = 2(3k^4 + 16(1 - k^2))/(3k^6)$; $l_{55} = 32(k^2 - 2)/(5k^6)$; $l_{57} = 32/(7k^6)$,
$l_{73} = 8(16 - 24k^2 + 10k^4 - k^6)/(3k^8)$; $l_{75} = 16(-24 + 24k^2 - 5k^4)/(5k^8)$; $l_{77} = 192(2-k^2)/(7k^8)$;
$l_{79} = -128/(9k^8)$,
$l_{93} = 2(256 - 512k^2 + 336k^4 - 80k^6 + 5k^8)/(3k^{10})$; $l_{95} = -32(64 - 96k^2 + 42k^4 - 5k^6)/(5k^{10})$;
$l_{97} = 32(96 - 96k^2 + 21k^4)/(7k^{10})$; $l_{99} = -1024(2 - k^2)/(9k^{10})$; $l_{911} = 512/(11k^{10})$.

ANEXA 2. Expresiile integralelor $K_n(\varphi)$

$K_3 = \sin^3\varphi - 1 + 3/2\ \cos\varphi(\pi/2 - \varphi + 1/2\sin2\varphi)$,
$K_5 = \sin^5\varphi - 1 + 5/4\ \cos\varphi[3/2(\pi/2 - \varphi) + \sin2\varphi - 1/8\sin4\varphi]$,
$K_7 = \sin^7\varphi - 1 + 7/8\ \cos\varphi[5/2(\pi/2 - \varphi) + \sin2\varphi - 3/8\ \sin4\varphi + 1/24\ \sin6\varphi]$,
$K_9 = \sin^9\varphi - 1 + 9/16\cos\varphi[35/8(\pi/2 - \varphi) + 7/2\sin2\varphi - 7/8\sin4\varphi + 1/6\sin6\varphi - 1/64\sin8\varphi]$,
$K_{11} = \sin^{11}\varphi - 1 + 11/32\ \cos\varphi[63/8(\pi/2 - \varphi) + 105/16\ \sin2\varphi - 15/8\sin4\varphi - 45/96\sin6\varphi - 5/64\ \sin8\varphi + 1/160\ \sin10\varphi]$.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Aerodinamica vitezelor mari*, Editura Academiei, București, 1956.
2. C. JACOB, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Editura Academiei, București, 1956.
3. E. C. POLHAMUS, *Prediction of vortex-lift characteristics by a leading-edge suction analogy*, Journal of Aircraft, **8**, 4 (1971).
4. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, A. NĂSTASE, *Wing theory in supersonic flow*, Pergamon Press, London, 1969.
5. G. N. VANDERPLAATS, *Numerical optimisation techniques for engineering design: with applications*, Mc Graw-Hill Books Co., N. Y., 1984.
6. E. CARAFOLI, L. Z. DUMITRESCU, *Asupra aripii delta subțiri dublu-conice cu incidența variabilă, în curent supersonic*, St. cerc. mec. apl., **VI**, 3—4 (1955).
7. E. CARAFOLI, L. Z. DUMITRESCU, *Rezistența de undă a unei clase de aripi delta subțiri dublu-conice, cu incidența variabilă, în curent supersonic*, St. cerc. mec. apl. **VII**, 4 (1956).

CALCULUL MODURILOR PROPRII DE VIBRAȚIE ALE PALELOR DE ELICOPTER CU DIVERSE CONDIȚII LA LIMITĂ

de V. GIURGIUȚIU

Întreprinderea de avioane, București

P. KALMUȚCHI

ICSITAv — INCREST, București

Lucrarea de față își propune să prezinte o abordare mai generală a condițiilor la limită cu aplicație la cazul complex al palei neuniforme și torsionate, cu unghi de pas diferit de zero. În acest fel, atît palele de elicopter, cît și cele de elice pot fi rezolvate în mod unitar.

În procesul de analiză aeroelastică a palelor de elicopter, determinarea frecvențelor și modurilor proprii de vibrație ocupă un loc important. Aceste caracteristici, proprii fiecărei pale, constituie elementele de bază ale unei analize aeroelastice care folosește reprezentarea modală ca mijloc de abordare. În cazul palelor de elice și de elicopter dificultatea problemei aflării frecvențelor și modurilor proprii este amplificată de faptul că, datorită prezenței cîmpului centrifugal, complexitatea ecuațiilor diferențiale este atît de mare încît ele nu au soluții analitice nici măcar pentru o pală cu geometrie simplă, cum este de exemplu pala uniformă, pentru care, în cazul staționar, există cunoscutele soluții Krîlov Timoshenko exprimate în funcție de sinusuri și cosinusuri hiperbolice și trigonometrice.

De aceea, găsirea unor metode cît mai eficiente de rezolvare a acestor ecuații constituie și în prezent o preocupare continuă a cercetărilor în domeniu, pînă în prezent fiind propuse diverse metode aproximative (variaționale, modale, element finit, integrarea numerică etc. [1]).

Într-o comunicare anterioară [2] autorul a prezentat o metodă originală de rezolvare a acestor ecuații bazată pe o abordare semianalitică care permite programarea directă pe calculator și obținerea rezultatelor cu mare precizie (limitată practic doar de precizia mașinii de calcul folosite). Utilizînd dezvoltarea soluției în serii de puteri, autorul a definit patru funcții proprii vibrațiilor palelor în rotație, funcții ce joacă același rol cu funcțiile Krîlov/Timoshenko pentru studiile vibrațiilor grinzilor staționare.

În formularea ei originală, metoda semianalitică menționată mai sus — ca și programul de calcul aferent — era folosită pentru aflarea frecvențelor și modurilor proprii [3] ale unei pale neuniforme în rotație avînd unghi de pas zero și condiții la limită tip „încastrat" în butucul de prindere.

Într-o lucrare ulterioară [6] autorul a extins metoda și la pala de elicopter cu condiții la limită tip „articulat" în butuc, cu și fără excentricitate de prindere.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 21—33

Rezultatele teoretice expuse în lucrarea de față sînt implementate pe calculator sub forma unor pachete de programe introduse în biblioteca SICPAC a institutului. Aceste programe sînt supuse unei continue actualizări.

MODELUL MATEMATIC

Se consideră ecuațiile generale de mișcare ale unui element infinitezimal de pală în rotație (fig. 1) avînd proprietățile uniforme pe porțiuni [3], în ipoteza aplicării corecțiilor Timoshenko de forfecare și inerție rotațională :

$$T' - m\ddot{u} + 2\,m\,\Omega(\dot{v}\cos\theta - \dot{w}\sin\theta) + m\Omega^2 u = -\,m\Omega^2 x\,,$$

$$EI_v v_b'''' - (Tv')' + mK_v^2(-\ddot{v}_b'' + \Omega^2 v_b'' + 2\Omega\varphi'\sin\theta) + m\ddot{v} +$$
$$+ 2\,m\,\Omega\dot{u}\cos\theta - m\Omega^2\cos\theta(v\cos\theta - w\sin\theta) = 0\,,$$

$$EI_w w_b'''' - (Tw')' + mK_w^2(-\ddot{w}_b'' + \Omega^2 w_b'' + 2\Omega\dot{\varphi}'\cos\theta) + \qquad (1)$$
$$+ m\ddot{w} - 2\,m\Omega\dot{u}\sin\theta + m\Omega^2\sin\theta\,(v\cos\theta - w\sin\theta) = 0,$$

$$GJ\varphi'' + K_A^2(T\varphi')' - mK^2\ddot{\varphi} + 2m\Omega\,(K_v^2\,\dot{v}_b'\sin\theta + K_w^2\,\dot{w}_b'\cos\theta) -$$
$$- m\Omega^2(K_v^2 - K_w^2)\varphi\cos 2\theta = -\,\frac{1}{2}\,\Omega^2\,(K_v^2 - K_w^2)\sin 2\theta\,,$$

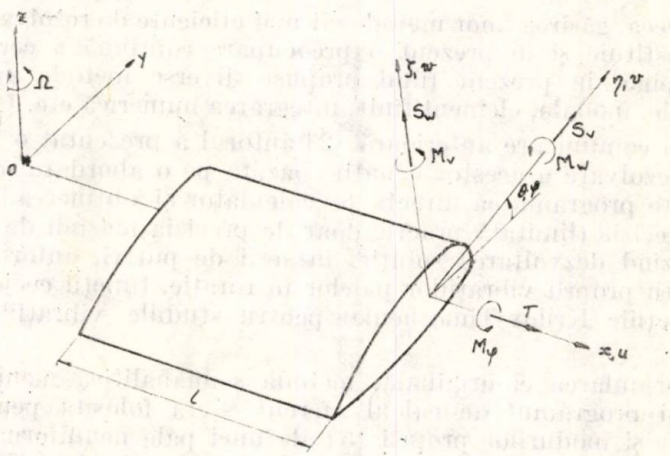


Fig. 1

unde cu b s-a indexat componenta de încovoiere a deplasărilor laterale v și w.

Neglijînd ca de obicei efectele secundare (vibrația axială pe direcția u, efectele Coriolis etc.) rezultă că, în prima aproximație, forța centrifugă

nu depinde de mișcarea de vibrație și de aceea se poate obține prin integrarea directă sub forma

$$T(x) = \Omega^2 \int_x^R mx \, \mathrm{d}x.$$

Pentru simplificarea exprimării vom folosi ipoteza vibrațiilor armonice și vom introduce parametrii adimensionali din tabelul 1 pe care îi înlocuim în ecuațiile (1) pentru a obține :

$$v'''' - \alpha_v(\tau v')' - (\lambda_v + \alpha_v \cos^2\theta)\, v + \mu_v(\lambda_v + \alpha_v)\, v_b + (\alpha_v \sin\theta\cos\theta)\, w = 0, \tag{2a}$$

$$w'''' - \alpha_w(\tau w')' - (\lambda_w + \alpha_w \sin^2\theta)\, w + \mu_w(\lambda_w + \alpha_w)\, w_b + (\alpha_w \sin\theta\cos\theta)\, v = 0, \tag{2b}$$

$$\varphi'' + \alpha_\varphi \mu_A(\tau\varphi')' + (\lambda_\varphi \mu)\, \varphi - (\alpha_\varphi \mu_{vw} \cos 2\theta)\, \varphi = 0. \tag{2c}$$

Menționăm că termenul liber și constant din partea stîngă a ecuației torsiunii a fost omis deoarece nu aduce contribuții la soluția vibratorie. Deplasările v, w și φ au rămas în formă dimensională pentru a facilita satisfacerea condițiilor la limită.

Tabelul 1

Parametrii adimensionali

	Baleiaj	Bătaie	Torsiune
Viteză de rotație	$\alpha_v = \dfrac{ml^4\Omega^2}{EI_v}$	$\alpha_w = \dfrac{ml^4\Omega^2}{EI_w}$	$\alpha_\varphi = \dfrac{ml^4\Omega^2}{GJ}$
Pulsația	$\lambda_v = \dfrac{ml^4\omega^2}{EI_v}$	$\lambda_w = \dfrac{ml^4\omega^2}{EI_w}$	$\lambda_\varphi = \dfrac{ml^4\omega^2}{GJ}$
Inerție	$\mu_v = k_v^2/l^2$	$\mu_w = k_w^2/l^2$	$\mu_A = k_A^2/l^2$, $\mu = \mu_v + \mu_w$, $\mu_{vw} = \mu_v - \mu_w$
Flexibilitate la forfecare	$\delta_v = \dfrac{EI_v}{Gk_1Al^2}$	$\delta_w = \dfrac{EI_w}{Gk_2Al^2}$	
Coordonata și forță axială	$\xi = \dfrac{x}{l}$		$\tau(\xi) = T(x)/m\,\Omega^2 l^2$

Din examinarea ecuațiilor (2) rezultă că vibrația de torsiune (2c) este independentă (decuplată) de cea de încovoiere (2a), (2b) și de aceea poate fi considerată separat [3]. De aceea în continuare ne vom focaliza atenția numai asupra vibrațiilor de încovoiere descrise de ecuațiile (2a) și (2b).

Se observă că termenii de cuplaj între vibrațiile de încovoiere (baleiaj și bătaie) sînt proporționali cu produsul $\sin\theta\cos\theta$ (termenii subliniați).

În pozițiile extreme ale palei ($\theta = 0°$ și $\theta = 90°$) cuplajul între vibrația de baleiaj și cea de bătaie este nul, iar în pozițiile intermediare $0° < \theta < 90°$ el ia o valoare ce nu depășește 0,5.

Pentru a putea rezolva ecuațiile de vibrații cuplate la $\theta \neq 0$ cu ajutorul metodelor și programelor de calcul dezvoltate anterior [3] pentru vibrații decuplate la $\theta = 0$, vom apela în continuare la reprezentarea palei torsionate printr-un număr de segmente drepte avînd între ele discontinuitate de unghi de pas corespunzătoare torsiunii incrementale (fig. 2). Segmentele au proprietăți diferite, astfel încît cu această metodă se modelează și neuniformitatea palei.

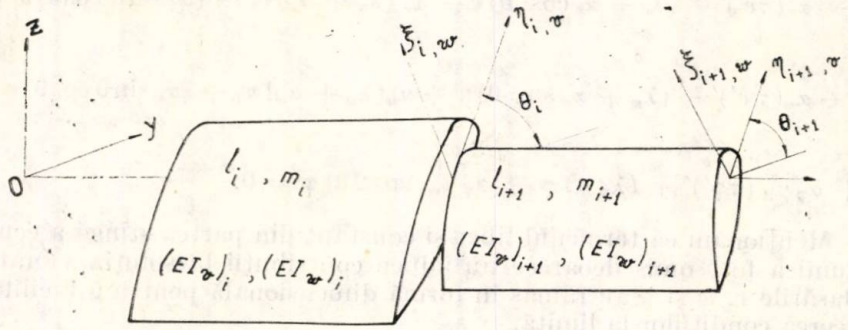


Fig. 2

Reamintind că deplasările v și w sînt definite în lungul axelor principale de inerție locale, rezultă că, de la un segment la altul, deplasările v și w se transformă prin rotire și se amalgamează, corectîndu-se astfel, de fiecare dată, efectul torsiunii local neglijate. Pe aceste considerente apreciem de asemenea că putem neglija termenii de cuplaj ($\sin\theta \cos\theta$) din ecuațiile (2a) și (2b). În acest fel ecuațiile (2a) și (2b) se pot rezolva direct cu metodele și programele de calcul deja dezvoltate pentru vibrațiile independente de baleiaj și de bătaie.

METODA DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Conform argumentației prezentate anterior considerăm spre rezolvare sistemul :

$$v'''' - \alpha_v(\tau v')' - (\lambda_v + \alpha_v \cos^2\theta)\, v = 0, \tag{3a}$$

$$w'''' - \alpha_w(\tau w')' - (\lambda_w + \alpha_w \sin^2\theta)\, w = 0, \tag{3b}$$

în care, în scopul ușurării expunerii și fără a pierde din generalitatea metodei, am neglijat deocamdată corecțiile Timoshenko ($v_b \approx v$, $w_b \approx w$, $\mu_v = \mu_w = 0$).

Aplicînd metoda semianalitică [3] considerăm soluția de forma

$$X(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n. \tag{4}$$

Prin înlocuirea lui (4) în (3a), respectiv (3b), se obțin formulele de recurență pentru fiecare tip de vibrație în parte rezultînd și funcțiile de vibrație $F_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3, 4$, astfel că

$$v(\xi) = C_1^v F_1^v(\xi) + C_2^v F_2^v(\xi) + C_3^v F_3^v(\xi) + C_4^v F_4^v(\xi),$$

$$w(\xi) = C_1^w F_1^w(\xi) + C_2^w F_2^w(\xi) + C_3^w F_3^w(\xi) + C_4^w F_4^w(\xi),$$

cu mențiunea că la stabilirea funcțiilor F_i^v și F_i^w se iau parametrii indexați cu v, respectiv w.

Constantele C_j^v, C_j^w nu sînt independente unele de altele, ci trebuie luate în ansamblu astfel încît condițiile la limită sînt satisfăcute în mod cuplat.

Detalii asupra formulelor de recurență și modului de construire a funcțiilor $F_j(\xi)$ au fost date anterior [1] și de aceea nu vor mai fi repetate aici.

FOLOSIREA MATRICELOR DE TRANSFER PENTRU PALE NEUNIFORME ȘI TORSIONATE

S-a arătat într-o lucrare anterioară [3] că, pentru aplicarea metodei semianalitice la studiul palelor neuniforme, se poate face apel la metoda matricelor de transfer aplicată la o reprezentare segmentată a palei reale. Ecuațiile diferențiale se rezolvă astfel exact pe parcursul fiecărui segment, condițiile de capăt (bilocale) transmițîndu-se de la un segment la altul prin continuitatea vectorului de stare,

$$Z = \begin{Bmatrix} d \\ f \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

unde d este vectorul deplasărilor generalizate, iar f cel al forțelor generalizate. În cazul de față, cînd considerăm mișcarea cuplată de baleiaj — bătaie a unei pale torsionate, mărimea vectorului Z se dublează față de cazul mișcărilor independente [3] astfel că

$$Z^T = \{v, w, v', w', M_v, M_w, S_v S_w\}. \tag{6}$$

În interiorul segmentului indice i, vectorul de stare se exprimă sub forma

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\, c_i, \tag{7}$$

unde $B_i(\xi)$ este o matrice ce conține funcțiile F_j^v și F_j^w $j = 1, \ldots, 4$ și derivatele acestora (tabelul 2), iar c_i este vectorul constantelor (C_j^v) și (C_j^w), $j = 1, \ldots, 4$ specifice fiecărui segment i în parte:

$$c_i = \{C_1^v,\ C_2^v,\ C_3^v,\ C_4^v,\ C_1^w,\ C_2^w,\ C_3^w,\ C_4^w\}^T. \tag{8}$$

Rezultă că, fiind dat vectorul c_i al constantelor specifice segmentului i, putem calcula vectorul de stare $Z_i(\xi)$ pentru orice punct al segmentului dînd lui ξ valori în intervalul $[0, 1]$ și evaluînd matricea $B_i(\xi)$, iar apoi pe $Z_i(\xi)$ folosind (7).

Tabelul 2

Matricea $B_f(\xi)$

$F_1^v(\xi)$	$F_2^v(\xi)$	$F_3^v(\xi)$	$F_4^v(\xi)$	0	0	0	0
0	0	0	0	$F_1^w(\xi)$	$F_2^w(\xi)$	$F_3^w(\xi)$	$F_4^w(\xi)$
$\frac{1}{l}F_1'^v(\xi)$	$\frac{1}{l}F_2'^v(\xi)$	$\frac{1}{l}F_3'^v(\xi)$	$\frac{1}{l}F_4'(\xi)$	0	0	0	0
0	0	0	0	$\frac{1}{l}F_1'^w(\xi)$	$\frac{1}{l}F_2'^x(\xi)$	$\frac{1}{l}F_3'^w(\xi)$	$\frac{1}{l}F_4'^w(\xi)$
$\frac{EI_v}{l^2}F_1''^v(\xi)$	$\frac{EI_v}{l^2}F_2''^v(\xi)$	$\frac{EI_v}{l^2}F_3''^v(\xi)$	$\frac{EI_v}{l^2}F_4''^v(\xi)$	0	0	0	0
0	0	0	0	$\frac{EI_w}{l^2}F_1''^w(\xi)$	$\frac{EI_w}{l^2}F_2''^w(\xi)$	$\frac{EI_w}{l^2}F_3''^w(\xi)$	$\frac{EI_w}{l^2}F_4''^w(\xi)$
$\frac{EI_v}{l^3}(\alpha_v\tau_vF_1'^v - F_1'''^v)$	$\frac{EI_v}{l^3}(\alpha_v\tau_vF_2'^v - F_2'''^v)$	$\frac{EI_v}{l^3}(\alpha_v\tau_vF_3'^v - F_3'''^v)$	$\frac{EI_v}{l^3}(\alpha_v\tau_vF_4'^v - F_4'''^v)$	0	0	0	0
	0	0	0	$\frac{EI_w}{l^3}(\alpha_w\tau_wF_1'^w - F_1'''^w)$	$\frac{EI_w}{l^3}(\alpha_w\tau_wF_2'^w = F_2'''^w)$	$\frac{EI_w}{l^3}(\alpha_w\tau_wF_3'^w - F_3'''^w)$	$\frac{EI_w}{l^3}(\alpha_w\tau_wF_4'^w - F_4'''^w)$

În particular, pentru $\xi = 0$, putem evalua pe $B_i(0)$ în mod analitic și putem rezolva apoi sistemul liniar

$$B_i(0)\, c_i = Z_i(0) \tag{9}$$

pentru a afla vectorul c_i al constantelor în funcție de valoarea $Z_i(0)$ a vectorului de stare la începutul segmentului astfel că

$$c_i = B_i^{-1}(0)\, Z_i(0) \tag{10}$$

și deci

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\, B_i^{-1}(0)\, Z_i(0). \tag{11}$$

Pentru primul segment ($i = 1$) valoarea vectorului de stare la $\xi = 0$ rezultă direct din condițiile la limită, iar pentru următoarele segmente această valoare rezultă prin transfer din segmentul precedent.

În acest sens se presupune o reuniune de n segmente ($i = 1, \ldots, n$) având $m = n + 1$ interfețe ($n - 1$ între segmente și 2 la capete). La fiecare interfață se efectuează o rotație de unghi $\Delta\theta_i$ ($i = 1, \ldots, n + 1$).

Condițiile la limită bilocale la $x = r_0$ și $x = R$ sînt impuse prin intermediul vectorilor de stare extremali Z_0 și, respectiv, Z_R. Transferul peste o interfață de rotații ΔQ_i se face cu matricea $T_i(\Delta\theta_i)$ dată de

$$T_i = \begin{bmatrix} \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} \end{bmatrix},$$

unde $c = \cos(\Delta\theta_i)$, $s = \sin(\Delta\theta_i)$.

Punînd $\xi = 1$ în (11), obținem relația de transfer peste întreg segmentul i:

$$Z_i(1) = B_i(1)\, B_i^{-1}(0)\, Z_i(0), \tag{13}$$

în timp ce transferul de la un segment la următorul îl facem cu formula

$$Z_{i+1}(0) = T_{i+1}\, Z_i(1). \tag{14}$$

Apoi prin recurență, scriem:

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\, B_i^{-1}(0) \left[\prod_{j=1}^{i-1} T_{j+1}\, B_j(1)\, B_j^{-1}(0) \right] Z_1(0). \tag{15}$$

Formula (15) ne permite să scriem vectorul de stare în orice punct în lungul palei cu condiția cunoașterii vectorului de stare la bază.

APLICAREA CONDIȚIILOR BILOCALE

Avînd în vedere că sistemul de ecuații diferențiale (3) este de ordinul 8 rezultă că la extremitățile palei se impun în total 8 condiții la limită. Considerînd caracterul bilocal al condițiilor la limită rezultă că, în principiu, nici unul din cei 2 vectori de stare extremali Z_0 și Z_R nu sînt complet definiți, acest aspect fiind o dificultate în plus în rezolvarea problemei.

Remarcînd că, din cele 16 elemente conținute în total în vectorii Z_0 și Z_R, 8 sînt cunoscute prin intermediul condițiilor bilocale, rezultă că alte 8 elemente sînt necunoscute urmînd a fi determinate prin rezolvarea problemei. Grupînd elementele necunoscute într-un vector σ, vom putea exprima apoi vectorii de stare la capete folosind vectorul necunoscut σ și condițiile la limită sub forma

$$Z_0 = A_0\sigma; \quad Z_R = A_R\,\sigma. \tag{16}$$

Exemplu 1. *Pală articulată* avînd condițiile la limită date de

$$x = r_0,\ v_0 = w_0 = M_{v_R} = M_{w_0} = 0,$$

$$x = R,\ M_{v_R} = M_{w_R} = S_{v_R} = S_{w_R} = 0\,.$$

Atunci

$$Z_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ w_0 \\ v_0' \\ w_0 \\ M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0' \\ w_0' \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \\ v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{bmatrix},$$

$$Z_R = \begin{bmatrix} v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \\ M_{v_R} \\ M_{w_R} \\ S_{v_R} \\ S_{w_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0' \\ w_0' \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \\ v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{bmatrix}, \tag{17}$$

adică

$$\sigma = \{v_0', w_0', S_{v_0}, S_{w_0}, v_R, w_R, v_R', w_R'\}^T,$$

iar A_0 și A_R așa cum rezultă din (17).

STABILIREA ECUAȚIEI FRECVENȚELOR

Procedînd în continuare la aplicarea metodei matricelor de transfer scriem, la capetele palei,

$$Z_1(0) = T_1 Z_0\,;\quad Z_R = T_{n+1} Z_n(1) \tag{18}$$

și atunci

$$Z_R = D\,Z_0\,, \tag{19}$$

unde, folosind (15) și (18), avem

$$D = T_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} B_i(1)\,B_i^{-1}(0)\,T_i\right). \tag{20}$$

Înlocuind (16) în (19), obținem ecuația necunoscutelor :

$$A_R\sigma = DA_0\sigma\,, \tag{21}$$

care se poate rescrie sub forma sistemului omogen :

$$D^*(\omega)\sigma = 0, \tag{22}$$

unde

$$D^*(\omega) = D(\omega)A_0 - A_R \tag{23}$$

este o matrice ce depinde doar de frecvența de vibrație și de condițiile la limită.

Conform procedurii obișnuite, sistemul (22) admite soluții $\sigma \neq 0$ numai dacă determinantul său este nul, și de aceea putem stabili ecuația frecvențelor sub forma

$$|D^*(\omega)| = 0\,. \tag{24}$$

Ecuația (24) este neliniară în ω și se rezolvă numeric cu ajutorul unor programe de calcul specializate [6], rezultatul fiind frecvențele proprii $\omega_k, k = 1,2,\ldots N_\omega$ ale palei considerate, la o turație Ω prestabilită și la un unghi de pas θ_0 dat.

În cazul cînd se dorește studierea parametrică a variației frecvențelor proprii cu turația, la diferite unghiuri de pas, procedura de mai sus se va repeta corespunzător, obținîndu-se cîte un set de frecvențe ω_k pentru fiecare combinație (Ω, θ_0).

CALCULUL MODURILOR PROPRII

Pentru fiecare frecvență proprie ω_k, care anulează determinantul sistemului (23) ($|D^*(\omega_k)| = 0$) există o soluție nenulă σ_k a acestui sistem, soluție ce reprezintă vectorul propriu al sistemului. Acesta poate fi folosit la reconstituirea modului propriu de vibrație al palei la frecvența ω_k.

Avînd în vedere că sistemul (23) rămîne totuși cu un grad de nedeterminare chiar și pentru $\omega = \omega_k$, rezultă că numai 7 din cele 8 compo-

nente ale vectorului σ_k pot fi calculate în mod unic. În practică, noi punem de obicei $w_R = 1$ apoi rezolvăm sistemul redus aflînd astfel restul de 7 necunoscute.

În acest scop se construiește matricea D^{**} prin permutarea în termenul liber a coloanei corespunzătoare necunoscutei fixate ($\sigma_\sigma = w_R = 1$) și apoi eliminarea uneia din cele 8 linii cu 7 coloane rămase în partea stîngă (se va avea în vedere însă ca termenul liber rămas să fie în continuare nenul). Sistemul redus astfel obținut, de ordinul 7×7, este rezolvat aflîndu-se astfel vectorul necunoscutelor

$$\sigma^{**} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_8\}^T, \tag{25}$$

O eficiență sporită se obține remarcînd că numai necunoscutele de la baza palei sînt necesare pentru construirea modului propriu și de aceea, în practică, partiționăm

$$\sigma^{**} = \{\sigma_0 \vdots \sigma_R^{**}\} \tag{26}$$

și apoi rezolvăm sistemul și mai redus (4×4) dat de ecuația :

$$D_{Ro}^{**}\ \sigma_0 = b. \tag{27}$$

Acest lucru va fi ilustrat în exemple.

După aflarea necunoscutelor de la baza palei conținute în vectorul σ_0 se trece la formarea vectorului Z_0 și apoi la evaluarea formei modale prin calculul vectorului de stare $Z_i(\xi)$ într-un număr de puncte plasate echidistant în cadrul fiecărui segment. În acest scop se folosește formula (15), unde $Z_1(0) = T_1 Z_0$.

Vectorul de stare astfel calculat este stocat împreună cu valoarea corespunzătoare a lui x, în vectorul formei modale, a_{mode}. După terminarea calculului în toate punctele alese, vectorul a_{mode} este compactat pentru eliminarea eventualelor puncte duble și apoi este reprezentat grafic la plotter.

De remarcat că vectorul propriu stocat în a_{mode} este calculat în raport cu coordonatele locale (axele principale) ale fiecărui segment. Acestea diferă de la segment la segment datorită torsiunii palei. În anumite situații prezintă interes și calculul formei modale raportată la triedrul rotoric, respectiv la planul de rotație și la normala la aceasta, Oz. În acest caz se calculează vectorul de stare raportat la triedrul global prin aplicarea rotației inverse :

$$\bar{Z}_i(\xi) = T(-\theta_i) Z_i(\xi), \tag{28}$$

unde $\bar{Z}_i(\xi)$ este vectorul de stare în triedrul global. Valorile lui $Z_i(\xi)$ sînt stocate în modul propriu în coordonate globale, g_{mode}, și apoi procesate ca și cele din a_{mode}.

CAZUL PALEI ARTICULATE

Pentru exemplificarea metodei vom considera mai întîi cazul palei articulate avînd condițiile la limită :

$$\begin{aligned} x &= r_0, \qquad v_0 = w_0 = M_{v_0} = M_{w_0} = 0, \\ x &= R, \quad M_{v_R} = M_{w_R} = S_{v_R} = S_{w_R} = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

pentru care matricele A_0 și A_R au fost redate în (17).

Aplicînd condițiile la limită asupra matricei produs D, se obține sistemul omogen :

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} D_{13} & D_{14} & D_{17} & D_{18} & -1 & & & \\ D_{23} & D_{2} & D_{27} & D_{2} & & -1 & & \\ D_{33} & D_{3} & D_{37} & D_{3} & & & -1 & \\ D_{43} & D_{4} & D_{47} & D_{48} & & & & 1 \\ \hdashline D_{53} & D_{5} & D_{57} & D_{58} & & & & \\ D_{63} & D_{6} & D_{67} & D_{6} & & & 0 & \\ D_{73} & D_{7} & D_{77} & D_{7} & & & & \\ D_{83} & D_{8} & D_{87} & D_{88} & & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \hdashline \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \tag{30}$$

adică

$$D^*(\omega)\sigma = 0, \tag{31}$$

unde D_{ij} sînt elemente ale matricei D.

Se observă că matricea $D^*(\omega)$ are o expresie aparte permițînd partiționarea sistemului sub forma :

$$\begin{cases} D^*_{00}\sigma_0 - \sigma_R = 0, \\ D^*_{R_0}\sigma_0 = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Rezultă că ecuația frecvențelor $|D^*(\omega)| = 0$ avînd un determinant în principiu de 8×8, se reduce de fapt la un determinant de 4×4 :

$$|D^*_{R_0}(\omega)| = 0, \tag{33}$$

unde

$$D^*_{R_0}(\omega) = \begin{bmatrix} D_{53} & D_{54} & D_{57} & D_{58} \\ D_{63} & D_{64} & D_{67} & D_{68} \\ D_{73} & D_{74} & D_{77} & D_{78} \\ D_{83} & D_{84} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Prin rezolvarea ecuației frecvențelor se obțin valorile proprii ω_k, $k = 1, 2 \ldots$

Pentru fiecare valoare ω_k se calculează vectorii proprii punînd $\sigma_6 = 1$ și rezolvînd, în principiu, sistemul liniar (7×7) :

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc} D_{13} & D_{14} & D_{17} & E_{18} & -1 & & \\ D_{33} & D_{34} & D_{37} & D_{38} & & -1 & \\ D_{43} & D_{44} & D_{47} & D_{48} & & & -1 \\ \hdashline D_{53} & D_{54} & D_{57} & D_{58} & & & \\ D_{63} & D_{64} & D_{67} & D_{68} & & & \\ D_{73} & D_{74} & D_{77} & D_{78} & & & \\ D_{23} & D_{24} & D_{27} & D_{28} & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \hdashline \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] . \quad (35)$$

Se observă din nou că gradul sistemului ce trebuie rezolvat efectiv pentru aflarea necunoscutelor la baza palei $\sigma_0 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}^T$ este de numai 4×4, respectiv :

$$D^{**}_{R_0}\,\sigma_0 = b\,, \quad (36)$$

unde

$$D^{**}_{R_0} = \left[\begin{array}{cccc} D_{53} & D_{54} & D_{57} & D_{58} \\ D_{63} & D_{64} & D_{67} & D_{68} \\ D_{73} & D_{74} & D_{77} & D_{78} \\ D_{23} & D_{24} & D_{27} & D_{28} \end{array}\right], \qquad b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]. \quad (37)$$

CAZUL PALEI ÎNCASTRATE

Al doilea exemplu considerat este cel al palei încastrate avînd condițiile la limită :

$$x = r_0,\ v_0 = w_0 = v_0' = w_0' = 0,$$

$$x = R,\ M_{vR} = M_{wR} = S_{vR} = S_{wR} = 0\,.$$

Vectorul necunoscutelor σ se alege sub forma :

$$\sigma = \{M_{v_0}, M_{w_0}\, S_{v_0}, S_{w_0}, v_R, w_R, v_R', w_R'\}^T.$$

Matricele A_0 și A_R corespunzătoare sînt date de relațiile :

$$Z_0 = \left[\begin{array}{c} v_0 \\ w_0 \\ v_0' \\ w_0' \\ M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{w_0} \\ S_{w_0} \\ \hdashline v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{array}\right] = A_0\,\sigma,$$

$$z_R = \begin{bmatrix} v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \\ \hline M_{v_R} \\ M_{w_R} \\ S_{v_R} \\ S_{w_R} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \\ \hline v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{bmatrix} = A_R\,\sigma.$$

Drept urmare matricea $D^* = DA_0 - A_R$ ia forma :

$$D^* = \left[\begin{array}{cccc:cccc} D_{15} & D_{16} & D_{17} & D_{18} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ D_{35} & D_{36} & D_{37} & D_{38} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ D_{45} & D_{46} & D_{47} & D_{48} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

și deci

$$D^*_{R_0} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix}.$$

Pentru calculul modurilor proprii se folosesc matricele :

$$D^{**}_{R_0} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primit în redacție la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. A. R. S. BRAMWELL, *Helicopter Dynamics*, Arnold, London, 1976.
2. V. GIURGIUȚIU, *O metodă semianalitică pentru determinarea frecvențelor și modurilor proprii ale palelor de elicopter*, Bul. ing. și teh. militari, 4 (1978).
3. V. GIURGIUȚIU; R. O. STAFFORD; *Semi-analytic Methods for Frequencies and Mode Shapes of Rotor Blades*, Vertica, **1** (1977).
4. V. GIURGIUȚIU, *Elemente de aeroelasticitatea elicopterului*—studiul palei, Edit. Tehnică, București, 1983.
5. E. C. PESTEL; F. A. LECKIE; *Matrix Methods in Elastomechanics*, Mc. Graw Hill, 1963.
6. V. GIURGIUȚIU; P. KALMUȚCHI; *Noi rezultate în calculul vibrațiilor palelor de elicopter*, Simpozionul Academiei Militare, București noiembrie, 1987.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \\ \dot{\alpha}_a \\ \dot{M}_{x_a} \\ \dot{M}_{y_a} \\ \dot{S}_{x_a} \\ \dot{S}_{y_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{M}_{x_a} \\ \dot{M}_{y_a} \\ \dot{S}_{x_a} \\ \dot{S}_{y_a} \\ \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{z}_a \\ \dot{\alpha}_a \end{bmatrix} = A_{\alpha}\,\sigma$$

Prept numare matricea $D^{\alpha} = D_{\alpha} - A_{\alpha}$ ia forma:

$$D^{\alpha} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{71} & D_{72} & D_{73} & D_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{81} & D_{82} & D_{83} & D_{84} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si deci

$$D^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix}$$

Pentru calculul modurilor proprii se folosesc matricele:

$$D^{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primit în redacție la 15 august 1957

BIBLIOGRAFIE

1. A. R. S. BRAMWELL, Helicopter Dynamics, Arnold, London, 1974.
2. V. GIURGIUTIU, O metodă semisimulatică pentru determinarea frecvențelor și modurilor proprii ale palelor de elicopter, Bul. ing. și tehnicii militare, 4 (1977).
3. V. GIURGIUTIU; R. O. STAFFORD: Semi-analytic Methods for Frequencies and Mode Shapes of Rotor Blades, Vertica, 1 (1977).
4. V. GIURGIUTIU, Elemente de aeroelasticitatea elicopterului—studiul palei, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1983.
5. L. C. PESTEL; F. A. LECKIE: Matrix Methods in Elastomechanics, Mc. Graw Hill, 1963.
6. V. GIURGIUTIU; D. I. ALMUTCHI: Noi rezultate în calculul vibrațiilor palelor de elicopter, Simpozioanul Academiei Militare, Bucureşti noiembrie, 1957.

DESPRE STRATUL LIMITĂ TURBULENT INCOMPRESIBIL, CU GRADIENT DE PRESIUNE

de IRINA-CARMEN ANDREI

INCREST – CCSITMAv, București

Lucrarea de față prezintă o metodă pentru calculul stratului limită turbulent incompresibil, cu gradient de presiune. Metoda consideră un parametru de formă pe baza căruia se apreciază mai ușor și mai precis desprinderea. În plus, prezintă avantajul extinderii domeniului numerelor Reynolds studiate, păstrînd rigurozitatea rezultatelor.

INTRODUCERE

Mișcarea în stratul limită este laminară pe zona care începe din punctul de stagnare, în care viteza crește de la valoarea zero la valoarea din curgerea de bază; apoi, mișcarea devine instabilă pe o porțiune a cărei lungime depinde de gradientul de presiune și în final trece în regim turbulent, cînd se depășește valoarea critică a numărului Reynolds:

$$Re \geqslant Re_{cr} = Ux_{cr}/\nu.$$

Pentru calculul stratului limită se poate utiliza o metodă care pleacă de la cea elaborată de Truckenbrodt. Parametrul de formă considerat, pe baza căruia se poate aprecia desprinderea, este:

$$L = \int_{(H_{32})_0}^{H_{32}} \frac{\mathrm{d}H_{32}}{(H_{12}-1)\,H_{32}}. \tag{1}$$

Valorile corespunzătoare în cazul desprinderii stratului limită sînt:

$$(H_{12})_D = 1{,}8 \div 2{,}4 \quad \text{și} \quad L_D = (-0{,}13) \div (-0{,}18). \tag{2}$$

S-au definit parametrii de formă $H_{12} = \dfrac{\delta_1}{\delta_2}$ și $H_{32} = \dfrac{\delta_3}{\delta_2}$ în care

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y, \tag{3.1}$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right)\left(\frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y, \tag{3.2}$$

$$\delta_3 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)\left(\frac{u}{U}\right) \mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 35–49

De asemenea, se mai pot preciza valorile cunoscute pentru cazul plăcii plane (marcate cu indicele zero) :

$$(H_{32})_0 \cong 1{,}73 \text{ și, respectiv, } (H_{12})_0 \cong 1{,}4. \tag{4}$$

Din experiențele efectuate de Rotta și Wieghardt [5], se mai cunoaște legea de variație $H_{32} = f(H_{12})$, dată astfel :

$$H_{32} = 1{,}269 \times \frac{H_{12}}{H_{12} - 0{,}379}. \tag{5}$$

MODELUL MATEMATIC

Considerînd ecuația de conservare a energiei :

$$\frac{1}{U^3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (U^3 \delta_3) = 2 \frac{d_1 + t_1}{\rho U^3} \tag{6}$$

în care termenul

$$\frac{\mathrm{d}_1 + t_1}{\rho U^3} = \int_0^{\delta} \frac{\tau}{\rho U^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U} \right) \mathrm{d}y$$

reprezintă lucrul mecanic total de frecare, din care

$$\frac{d_1}{\rho U^3} \cong \frac{0{,}56 \times 10^{-2}}{Re_2^{1/6}}$$

reprezintă cantitatea transformată în căldură prin disipație, iar termenul

$$\frac{t_1}{\rho U^3}$$

este lucrul mecanic de frecare datorat fluctuațiilor turbulente.

Precum și ecuația de conservare a impulsului :

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}x} + (H_{12} + 2)\, \delta_2 \frac{U'}{U} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}, \qquad U' = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{7}$$

în care s-a definit numărul Reynolds :

$$Re_2 = \frac{U\delta^2}{\nu} \tag{8}$$

rezultă ecuația diferențială

$$\delta_2 \frac{\mathrm{d}H_{32}}{\mathrm{d}x} = (H_{12} - 1)\, H_{32} \frac{\delta_2}{U} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + 2 \frac{d_1 + t_1}{\rho U^2} - H_{32} \frac{\tau_w}{\rho U^2} \tag{9}$$

care se mai poate scrie și

$$Re_2^{\frac{1}{n}}\, \delta_2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = Re_2^{\frac{1}{n}} \frac{\delta_2}{U} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - K(L). \tag{10}$$

Indicele $n = 4$ corespunde numerelor Reynolds mici, iar $n = 6$ este valabil pentru numerele Reynolds mari.

Funcţia $K(L)$ se cunoaşte experimental, alura sa de variaţie fiind precizată în figura 1 [1].

Truckenbrodt consideră o aproximaţie liniară [6]:

$$K(L) = a(L - b),$$
$$a = 0{,}0304, \qquad (11)$$
$$b = 0{,}07 \cdot \log(Re_2) - 0{,}23.$$

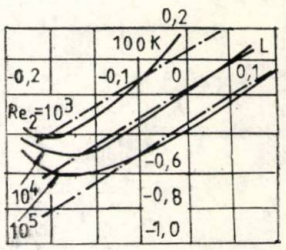


Fig. 1

Corespunzător, precizează soluţia ecuaţiei diferenţiale (10):

$$L = L_T \frac{\xi_T}{\xi} + \ln \frac{U(\xi)}{U_T} + \frac{1}{\xi} \int_{\xi_T}^{\xi} \left[b(\xi) - \ln \frac{U(\xi)}{U(\xi_T)} \right] d\xi \qquad (12)$$

sau încă

$$L = \frac{\xi_T}{\xi} \left[L_T + 0{,}23 + 0{,}0076 \frac{n}{n+1} - 0{,}0304 \ln Re_0 - \right.$$
$$\left. - \ln \frac{U_T}{U_\infty} - 0{,}0076 \frac{n}{n+1} \ln \xi_T \right] - 0{,}23 - 0{,}0076 \frac{n}{n+1} +$$
$$+ 0{,}0304 \ln Re_0 + \ln \frac{U(\xi)}{U_\infty} + 0{,}0076 \frac{n}{n+1} \ln(\xi_T) -$$
$$- 1{,}0608 \times \frac{1}{\xi} \int_{\xi_T}^{\xi} \ln \frac{U(\xi)}{U_\infty} d\xi. \qquad (13)$$

Dezavantajul formulelor (12) şi (13) este dat de faptul că parametrul ξ este sensibil la variaţia pasului; astfel, pentru zona laminară $x \leqslant x_T$, ξ/ξ_T variază mult O (100), în timp ce pentru zona turbulentă $x \geqslant x_T$, ξ/ξ_T variază şi mai mult O ($10^5 \div 10^7$). În plus, nici una din formule nu verifică exact ecuaţia diferenţială (10).

În continuare, se poate arăta că există o formă mai convenabilă a soluţiei ecuaţiei (10), menţinîndu-se ipoteza liniarităţii funcţiei $K(L)$.

Înainte de a preciza forma acestei soluţii, trebuie specificaţi toţi parametrii care intervin în calcul:

$$\xi = \left[C_1^* + \left(\frac{C_f}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \int_{\frac{x_T}{l}}^{\frac{x}{l}} \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^{3+\frac{2}{n}} d\left(\frac{x}{l} \right) \right]^m, \qquad (14)$$

$$\frac{\delta_2}{h_0} = \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{-3}\left[C_1^* + \left(\frac{C_f}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \int_{\frac{x_T}{l}}^{\frac{x}{l}} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+\frac{2}{n}} \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right)\right], \tag{15}$$

$$Re_0 = \frac{U_\infty h_0}{\nu}, \tag{16}$$

$$C_1^* = \left[\frac{C_{fl}}{2}\sqrt{\int_0^{\frac{x_T}{l}} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^5 \mathrm{d}\left(\frac{x}{l}\right)}\right]^{\frac{n+1}{n}}, \tag{17}$$

$$C_{fl} = 2\sqrt{\frac{0{,}47}{Re_0}}, \tag{18}$$

$$C_f = \frac{0{,}072}{Re_0^{0{,}2}}. \tag{19}$$

Truckenbrodt consideră exponentul $m = 4$, deci face ipoteza implicită a existenței numerelor Reynolds mari, fixînd $n = 6$. În realitate, din calcule rezultă variația $m = 1{,}93 \div 4{,}07$, în funcție de valoarea numărului Reynolds.

Dacă se consideră variabila adimensională $z = \frac{x}{l}$ și se notează:

$$V = 1 + K\int_{z_T}^{z} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+\frac{2}{n}} \mathrm{d}Z, \tag{20}$$

unde

$$K = \frac{1}{C_1^*} \times \left(\frac{C_f}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{21}$$

$$K^* = K \times C_1^* \times Re_0^{\frac{1}{n}} \tag{22.1}$$

sau:

$$\begin{cases} K^* = 0{,}036^{\frac{n+1}{n}} \times Re_0^E, \\ E = 0{,}2\left(\frac{4}{n} - 1\right), \end{cases} \tag{22.2}$$

se obţine

$$\frac{\delta_2}{h_0} = \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{-3} (C_1^* \times V)^{\frac{n}{n+1}}, \tag{23}$$

$$Re_2 = \left(\frac{U}{U_\infty}\right) \times Re_0 \times \frac{\delta_2}{h_0}. \tag{24}$$

În plus,

$$\frac{\delta_2}{h_0} \times Re_2^{\frac{1}{n}} = K^* \times \frac{V}{V'}, \tag{25}$$

unde

$$V' = K \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+\frac{2}{n}}.$$

Se mai observă şi :

$$\begin{cases} \xi_T = (C_1^*)^m, \\ \dfrac{\xi}{\xi_T} = V^m. \end{cases} \tag{26}$$

În aceste condiţii, ecuaţia (10) se scrie :

$$\frac{dL}{dZ} = \frac{1}{U}\frac{dU}{dZ} - \frac{K(L)}{K^*}\frac{V'}{V}. \tag{27}$$

Ştiind $K(L)$din (11) şi notînd (28) $\alpha = a/K^*$, rezultă soluţia exactă a ecuaţiei diferenţiale de tip Bernoulli :

$$LV^\alpha = L_T + \int_{z_T}^{z} V^\alpha \left(\frac{U'}{U} + b \times \frac{a}{K^*} \times \frac{V'}{V}\right) dZ, \tag{29.1}$$

sau :

$$L = V^{-\alpha}\left[L_T + \int_{z_T}^{z}\left(\frac{U'}{U} \times V^\alpha\right) dZ + \int_{z_T}^{z} b\, d(V^\alpha)\right]. \tag{29.2}$$

Coeficientul α este cuprins între valorile 1,93 şi 3,66 ÷ 4,06 (pentru $n = 4$, $\alpha = 1{,}93$, în timp ce pentru $n = 6$, $\alpha = 3{,}66 \div 4{,}06$); acest coeficient este analog cu exponentul m, a cărui valoare precizată de Truckenbrodt este 4.

Precizia calculelor se poate îmbunătăţi considerînd variaţia reală a funcţiei $K(L)$ — parabolică în zona desprinderii. În acest caz ecuaţia (10) devine de tip Ricatti şi se poate rezolva numeric. Astfel, se preci-

zează funcţia :

$$K(L) = 0{,}01 \times [\beta_1 + a_1(L + \alpha_1)\,(1 - b_1(L + C_1)^{-n_1})], \qquad (30)$$

unde

$$\alpha_1 = 0{,}18\,;\ C_1 = 0{,}32\,;\ n_1 = 2,$$

$$t = \log(Re_2),$$

$$\beta_1 = -\,0{,}08t - 0{,}09,$$

$$a_1 = 0{,}32t^2 - 3{,}52t + 12{,}1,$$

$$K_0 = 0{,}025\,t^2 - 0{,}455t + 1{,}24,$$

$$b_1 = C_1^{n_1} \times \left(1 - \frac{K_0 - \beta_1}{a_1 \alpha_1}\right).$$

ALGORITMUL DE CALCUL

Valorile iniţiale (z_T, L_T) utilizate pentru integrare, sînt cele din punctul de tranziţie şi care se determină astfel :

1. $$x = x_T \Rightarrow \delta_{2T} = \delta_{2L} \Rightarrow Re_{2T}$$

$$H_{12T} = H_{12L} - \Delta H_{12}$$

2. Din figura 2 [1], ştiind Re_{2T}, rezultă ΔH_{12}.
3. Din figura 3 [1], în funcţie de valoarea H_{12T}, rezultă L_T.
4. Pentru calculul parametrilor δ_{2T} şi Re_{2T} se pot utiliza formulele :

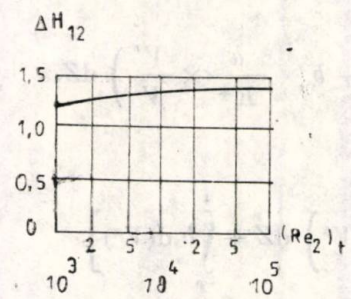


Fig. 2

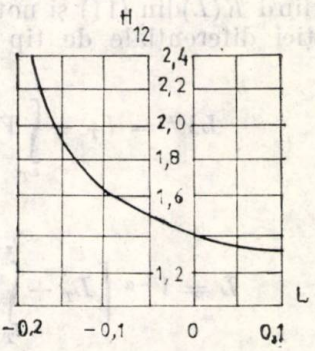


Fig. 3

METODE NUMERICE

Integralele care apar se pot calcula cu ajutorul unei metode de tip Simpson [7]. De asemenea, ecuaţia (27) se poate rezolva şi numeric, utilizînd o metodă de tip Runge-Kutta-Gill de ordinul IV [7].

Concret pentru integrare s-au utilizat metodele :

1. Runge-Kutta-Gill IV considerînd $K(L)$ parabolic (30).
2. Runge-Kutta-Gill IV considerînd K(L) liniar (11).
3. Simpson (soluția 29.2), pentru K(L) liniar (11).

EXEMPLE DE CALCUL

S-au considerat următoarele cazuri :

1. *CANALUL DIVERGENT* [4], de geometrie cunoscută (vezi fig. 4).

Este precizată distribuția de viteze [4]. Știind (z_T, L_T, Re_0, β), se poate aprecia zona în care apare desprinderea ; se studiază influența va-

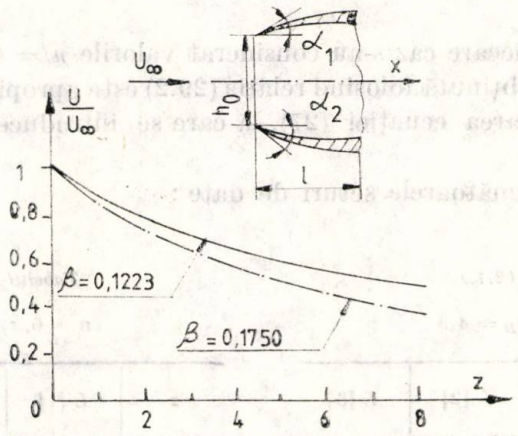


Fig. 4

lorii numărului Reynolds, exprimată direct (Re) cît și indirect (cazurile în care $n = 4$ și $n = 6$).

2. *PROFIL NACA 65(216)—222* [1] (vezi fig. 9)

Se cunoaște distribuția de viteze pe intrados [1], știind (z_T, Re_0, L_T), se determină dacă și unde apar desprinderi de curent.

REZULTATE

1. *CANAL DIVERGENT* [4]

Se precizează distribuția de viteze :

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{1}{1 + \beta z}, \quad z = \frac{x}{h_0},$$

$$\beta = \operatorname{tg}(\alpha_1^0) + \operatorname{tg}(\alpha_2^0).$$

Se consideră ca lungime caracteristică diametrul canalului ($l = h_0 =$ = 100 mm).

Tabelul 1

Cazurile de calcul

CAZUL	Z_T	$-L_T$	R_{e0}	β	α_1^0	α_2^0
1.1	0,1	0,070	885444	0,1223	3	4
1.2	0,1	0,080	600905	0,1750	4	6
1.3	0,2	0,095	219576	0,1223	3	4
1.4	0,2	0,105	160578	0,1750	4	6

OBSERVAȚII

1. Pentru fiecare caz s-au considerat valorile $n = 4$ și $n = 6$.

2. Soluția obținută folosind relația (29.2) este apropiată de aceea obținută prin integrarea ecuației (27), la care se introduce $K(L)$ sub forma liniară (11).

Se obțin următoarele seturi de date :

Tabelul (2.1.1.)

$n = 4$, $z_D = 4{,}9$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,1	−0,070	−0,070	−0,070
1,3	−0,049	−0,058	−0,058
2,5	−0,089	−0,094	−0,094
3,3	−0,118	−0,121	−0,122
4,5	−0,170	−0,165	−0,166
4,9	−0,181	−0,180	−0,180

Tabelul (2.1.2)

$n = 6$, $z_D = 7{,}7$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,1	−0,070	−0,070	−0,070
1,3	−0,029	−0,033	−0,033
2,5	−0,044	−0,049	−0,049
3,7	−0,068	−0,074	−0,074
4,9	−0,019	−0,103	−0,103
6,1	−0,126	−0,134	−0,134
7,3	−0,166	−0,165	−0,165
8,1	−0,200	−0,187	−0,187

Tabelul (2.2.1)

$n = 4$, $z_D = 3{,}2$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,1	−0,080	−0,080	−0,080
0,5	−0,060	−0,066	−0,066
1,3	−0,080	−0,091	−0,091
2,5	−0,137	−0,149	−0,149
3,3	−0,193	−0,192	−0,192

Tabelul (2.2.2)

$n = 6$, $z_D = 5{,}0$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,1	−0,080	−0,080	−0,080
0,5	−0,044	−0,052	−0,052
1,3	−0,049	−0,059	−0,059
2,5	−0,079	−0,092	−0,092
3,3	−0,103	−0,120	−0,120
4,1	−0,137	−0,149	−0,149
4,9	−0,182	−0,180	−0,180

Tabelul (2.3.1)

$n = 4,\ z_D = 4{,}2$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,2	−0,095	−0,095	−0,095
1,0	−0,069	−0,086	−0,086
1,8	−0,086	−0,105	−0,105
3,0	−0,125	−0,144	−0,144
3,8	−0,157	−0,173	−0,173
4,2	−0,177	−0,187	−0,188
5,0	−0,237	−0,218	−0,218

Tabelul (2.3.2)

$n = 6,\ z_D = 6,\ 2$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,2	−0,095	−0,095	−0,095
1,0	−0,055	−0,068	−0,068
1,8	−0,062	−0,076	−0,076
3,0	−0,083	−0,099	−0,099
3,8	−0,101	−0,118	−0,118
5,0	−0,135	−0,149	−0,149
6,2	−0,177	−0,182	−0,182
7,0	−0,223	−0,204	−0,204

Tabelul (2.4.1)

$n = 4,\ z_D = 2{,}6$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,2	−0,105	−0,105	−0,105
1,0	−0,086	−0,112	−0,112
1,8	−0,120	−0,137	−0,146
3,0	−0,199	−0,197	−0,208

Tabelul (2.4.2)

$n = 6,\ z_D = 4{,}0$

z	L [1]	L [2]	L [3]
0,2	−0,105	−0,105	−0,105
1,0	−0,069	−0,089	−0,089
1,8	−0,087	−0,109	−0,109
3,0	−0,129	−0,150	−0,150
4,2	−0,193	−0,197	−0,197

Variația parametrului de formă L este indicată în figura 8.

Comparativ, metodele diferă la aprecierea punctului de desprindere însă dau rezultate apropiate pentru Re_2 și δ_2/h_0.

Tabelele (3) și (4) se referă la cazul (1.1).

Tabelul (3)

z	Re_2	
	$n = 4$	$n = 6$
0,1	206	206
0,9	1926	1930
1,7	3450	3559
2,5	4986	5234
3,3	6572	6987
4,1	8228	8829
4,9	9963	10767
5,7	11781	12806

Tabelul (4)

z	$\delta_2/h_0 \times 10^{-4}$	
	$n = 4$	$n = 6$
0,1	2,35	2,35
0,9	24,15	24,25
1,7	47,07	48,55
2,5	73,52	77,20
3,3	104,2	110,8
4,1	139,5	150,0
4,9	180,0	194,5
5,7	225,8	245,5

În figura 5 este indicată variația $Re_2 = Re_2(z)$, iar în figura 6 este precizată legea $\delta_2/h_0 = \delta_2/h_0(z)$.

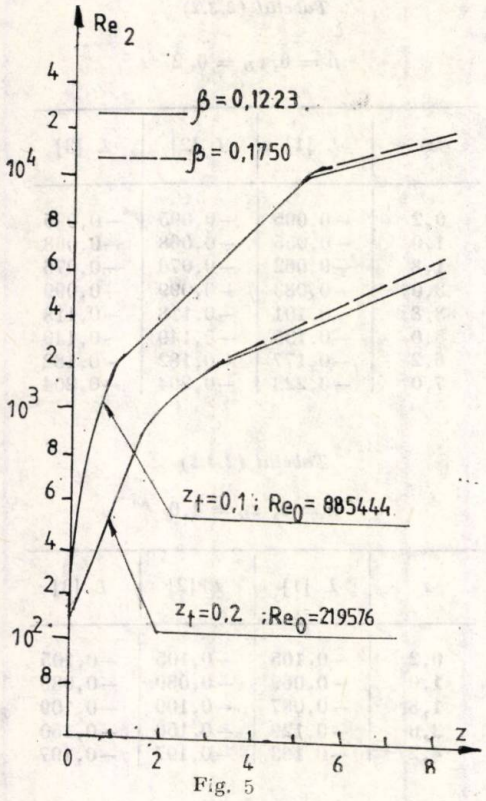


Fig. 5

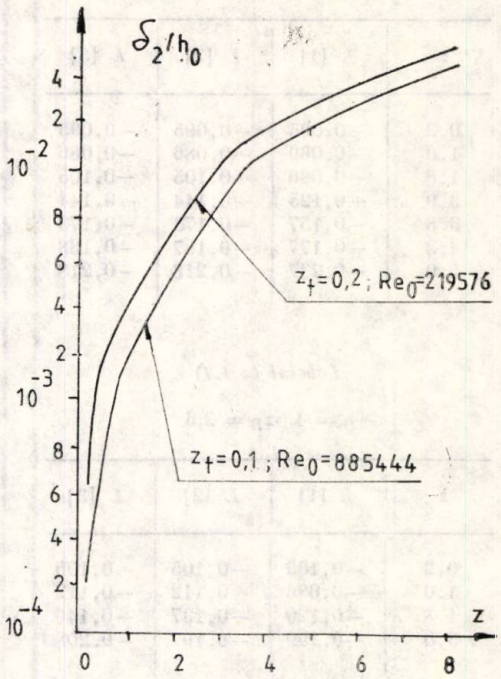


Fig. 6

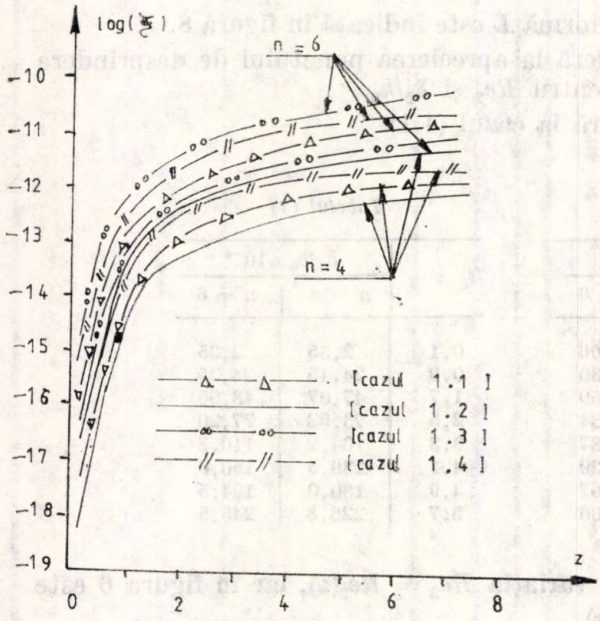


Fig. 7

De asemenea, se poate evidenția și influența sensibilă a exponentului n asupra parametrului ξ. În tabelul (5) se precizează variația foarte rapidă $\xi = \xi(z)$, pentru cazul (1.1) considerat anterior. Această lege de variație este ilustrată în figura 7.

Tabelul (5)

z	ξ	
	$n = 4$	$n = 6$
0,1	6,0178×E−19	9,8661×E−18
1,3	5,9360×E−14	4,9260×E−13
3,3	7,5870×E−13	6,4850×E−13
5,3	1,8750×E−12	1,6532×E−11
7,3	2,9480×E−12	2,6630×E−11

2. *PROFIL NACA 65(216)—222* [1]

Se cunoaşte experimental distribuţia de viteze pe intrados [1], şi care este precizată în figura 9. Aceasta poate fi aproximată printr-o funcţie polinomială de gradul 5 :

$$\frac{U}{U_\infty} = Z(A_1 + A_2 Z + A_3 Z^2 + A_4 Z^3 + A_5 Z^4).$$

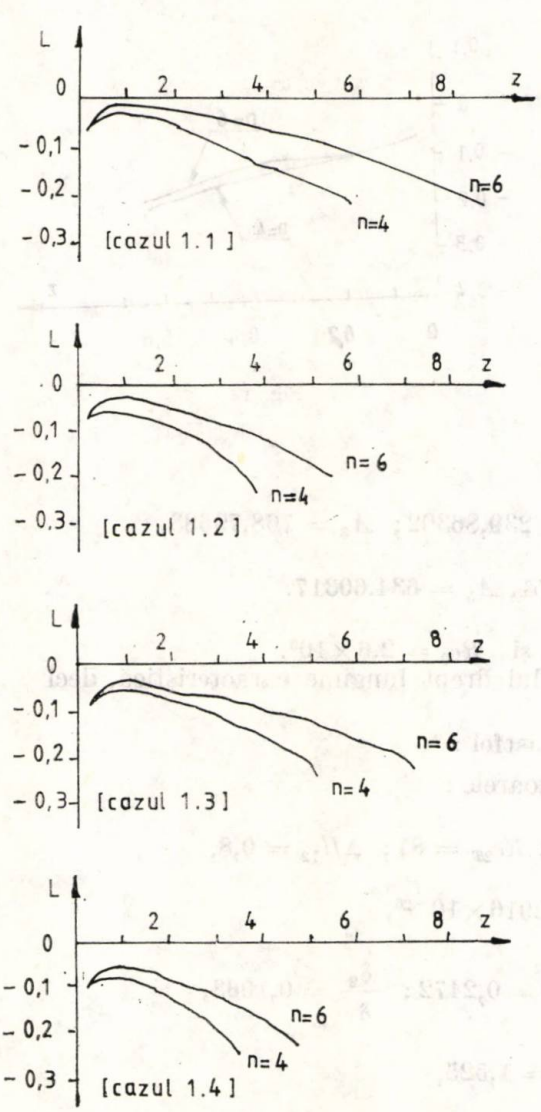


Fig. 8

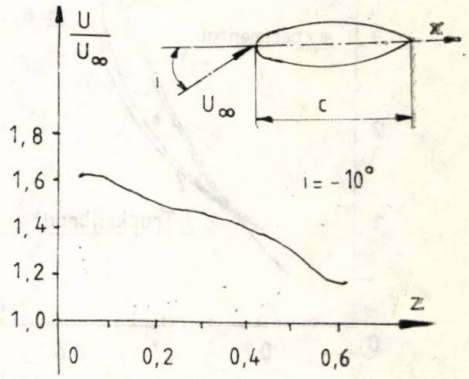


Fig. 9

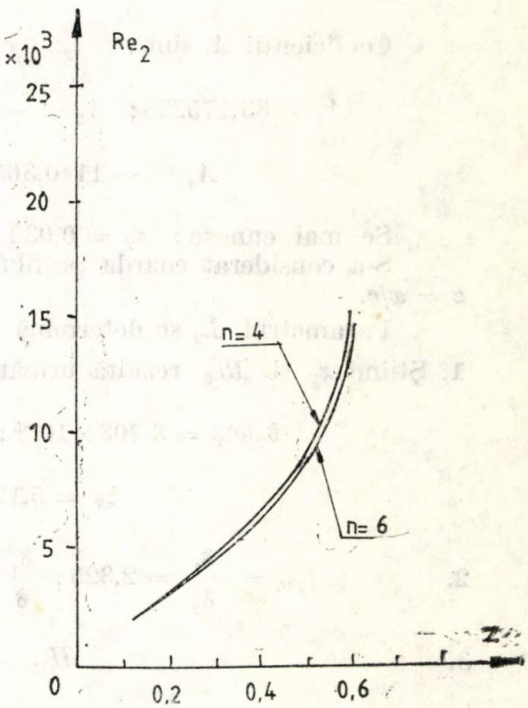


Fig. 0

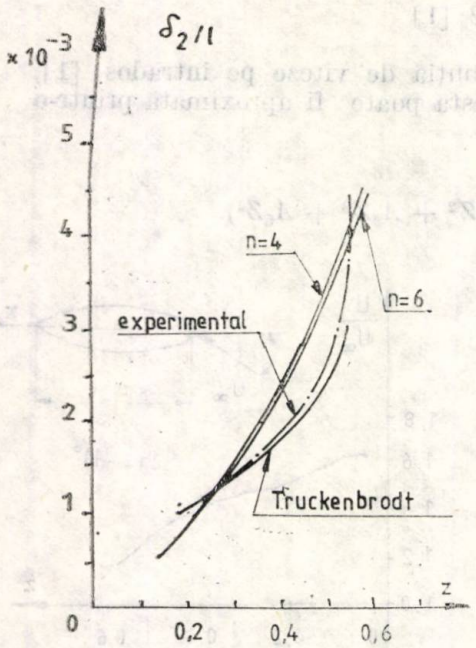


Fig. 11

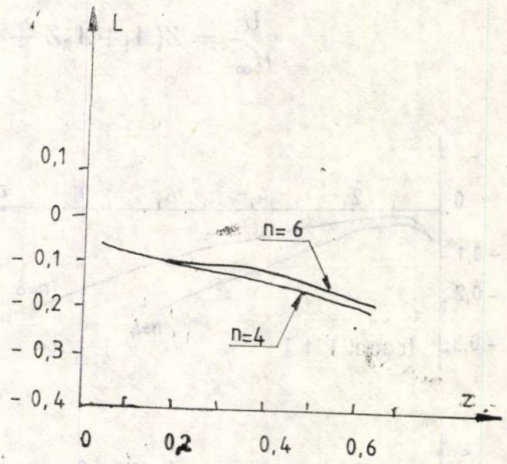


Fig. 12

Coeficienții A_i sînt :

$$A_1 = 33{,}175238\,;\quad A_2 = -239{,}86302\,;\quad A_3 = 768{,}79683,$$

$$A_4 = -1140{,}3651,\quad A_5 = 634{,}60317.$$

Se mai cunosc : $z_T = 0{,}032$ și $Re_0 = 2{,}6 \times 10^6$.

S-a considerat coarda profilului drept lungime caracteristică, deci $z = x/c$.

Parametrul L_T se determină astfel :

1. Știind z_T și Re_0 rezultă următoarele :

$$(\delta_2/c)_T = 3{,}708 \times 10^{-5}\,;\quad Re_{2T} = 81\,;\quad \Delta H_{12} = 0{,}8,$$

$$\xi_T = 5{,}12916 \times 10^{-26},$$

2. $$H_{12L} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2{,}325\,;\quad \frac{\delta_1}{\delta} = 0{,}2472\,;\quad \frac{\delta_2}{\delta} = 0{,}1063,$$

3. $$H_{12T} = 1{,}525,$$

4. $$L_T = -0{,}060.$$

În funcție de valorile exponentului n se pot calcula și constantele următoare :

Tabelul (6)

Constante de lucru

n	C_1^*	K	K^*	α
4	$1,5046 \times E-6$	213	0,015680	1,9386
6	$3,6778 \times E-6$	179	0,007727	3,9370

Astfel rezultă și :

Tabelul (7)

(vezi fig. 10)

z	Re_2	
	$n=4$	$n=6$
0,032	81	81
0,132	2126	1922
0,232	3884	3634
0,332	5688	5436
0,432	6968	6754
0,532	10856	9648
0,632	15040	14735

Tabelul (8)

(vezi fig. 11)

z	$\delta_2/c \times 10^{-3}$	
	$n=4$	$n=6$
0,032	0,03708	0,03708
0,132	0,50	0,45
0,232	1,00	0,92
0,332	1,58	1,48
0,432	2,54	2,48
0,532	3,32	3,12
0,632	4,52	4,42

Se observă că desprinderea apare pentru valorile :

$$z_D = 0,40 \div 0,57 \quad (n = 4)$$

și, respectiv,

$$z_D = 0,47 \div 0,60 \quad (n = 6)$$

Desprinderea completă apare pentru $L_D = -0,18$, în punctul :

$$z_D = 0,57 \quad (n = 4)$$

$$z_D = 0,60 \quad (n = 6)$$

Tabelul (9)

(vezi fig. 12)

z	L	
	$n=4$	$n=6$
0,032	−0,060	−0,060
0,132	−0,080	−0,080
0,232	−0,101	−0,095
0,332	−0,120	−0,103
0,432	−0,135	−0,120
0,532	−0,165	−0,158
0,632	−0,183	−0,176

Se remarcă o bună concordanță cu partea experimentală

$$z_D = 0,56, \; L_D = -0,17 \text{ și în plus}$$

$$(\delta_2/c)_D = 4 \times 10^{-3}, \; H_{12D} = 2,18.$$

CONCLUZII

Metoda propusă prezintă următoarele avantaje :

1. Extinderea domeniului numerelor Reynolds,
2. O mai bună aproximare în zona desprinderii,

3. Includerea în calcul a variației numărului Reynolds în lungul profilului studiat,

4. Soluția obținută este mai exactă, se determină ușor.

NOTAȚII UTILIZATE

Simboluri

c coarda profilului, (mm),
h_0 diametrul canalului, (mm),
i incidența curentului pe profil, (grade),
l lungime caracteristică, (mm),
u viteza în interiorul stratului limită, (m/s),
U viteza la frontiera stratului limită ($y = \delta$), care se obține din mișcarea fluidului neglijînd vîscozitatea, (m/s),
x axa Ox, paralelă cu direcția curgerii,
y axa Oy,
d_1 partea din lucrul mecanic de frecare (datorat efortului tangențial) transformată în căldură prin disipație, (J),
t_1 energia mișcării turbulente, (J),
α_1^0, α_2^0 unghiuri ce definesc geometria canalului, (grade),
δ grosimea stratului limită, (mm),
δ_1 grosimea pierderilor de viteză, (mm),
δ_2 grosimea pierderilor de impuls, (mm),
δ_3 grosimea pierderilor de energie, (mm),
ρ densitatea fluidului de lucru, (kg/m^3) ,
ν viscozitatea cinematică, (m^2/s),
τ efort tangențial de frecare, (N/m^2), (Pa),
a constantă în ecuația (11),
a_1 coeficient (30),
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 coeficienți ai polinomului de gradul 5 care aproximează distribuția de viteze pe profil,
b coeficient (11),
b_1 coeficient (30),
c_1 constantă (30),
C_1 coeficient care apreciază lungimea zonei laminare din stratul limită,
C_{f1} coeficient de frecare pe placa plană la incidență nulă, pentru mișcarea laminară,
C_f coeficient de frecare pe placa plană în stratul limită turbulent,
E constantă (22.2),
H_{12} parametru de formă construit cu ajutorul grosimilor δ_1 și δ_2,
H_{32} parametru de formă calculat în funcție de δ_3 și δ_2,
K_0 coeficient (30),
K o constantă în ecuația (21),
K^* constantă (22.1),
$K(L)$ o funcție de parametrul L_0 (11) sau (30),
L factor de formă pe baza căruia se apreciază desprinderea,
m exponent,

n exponent,
n_1 constantă (30),
Re, Re_0, Re_2 numărul Reynolds; indicele evidenţiază parametrul de definiţie Re_0 (16) şi Re_2 (7), (24),
t parametrul care apare în ecuaţia (30),
V parametrul obţinut prin integrarea ec. (20),
z raportul între abscisa curentă şi o lungime caracteristică,
α constantă (28),
α_1 constantă (30),
β constantă ce apreciază gradul de divergenţă a canalului,
β_1 coeficient (30),
ξ contracţie (14)

Operatori matematici

$\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ de diferenţiere,

Δ variaţie.

Indici

D desprindere,
T tranziţie,
cr critic,
w la perete,
0 referitor la placa plană,
∞ în amonte.

Supraindici

$'$ (prim) echivalent cu operatorul diferenţial; 0 referitor la mărimi geometrice.

Primit în redacţie la 28 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. H. SCHLICHTING, *Boundary-layer theory*, Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1968.
2. F. WHITE, *Viscous Fluid Flow*, Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1975.
3. IRINA-CARMEN ANDREI, *Stratul limită turbulent incompresibil cu gradient de presiune*, Proiect de Stat, Facultatea de Aeronave, I.P.B., 1987.
4. V. PIMSNER, C. BERBENTE şi colab., *Procese în maşini termice cu palete*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1986.
5. J. ROTTA, J. WIEGHARDT, în H. SCHLICHTING, *Boundary-layer theory*, Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1968.
6. E. TRUCKEMBRODT, în H. SCHLICHTING, *Boundary-layer theory*, Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1968.
7. B. CARNAHAN şi colab., *Applied Numerical Methods*, vol. I, II, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.

DETERMINAREA COMPONENTELOR SARCINILOR AERODINAMICE PE ORGANELE AVIONULUI ÎN CAZUL MANEVRELOR NELINIARE ARBITRARE CU VARIAȚII MICI DE ALTITUDINE ȘI VITEZĂ

de I. ȚEPOSU

Institutul de Aviație — INCREST, București

În lucrare se determină componentele sarcinilor aerodinamice și inerțiale pe axele sistemului de referință mobil *Oxyz*, legat de avion, în cazul manevrelor neliniare arbitrare cu variații mici de altitudine și viteză. Cu o precizie în estimarea componentelor sarcinilor aerodinamice de ordinul 2 — 3% pot fi descrise manevre cu variații ale unghiurilor de incidență și de glisadă pînă în apropierea punctelor de stall. Rezultatele din lucrare constitue o primă etapă pentru determinarea răspunsului și sarcinilor de manevră pe organele avionului.

1. INTRODUCERE

Lucrarea constituie o continuare a preocupărilor din [1] și [2] unde s-a determinat răspunsul neliniar și sarcinile de manevră pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale cu variații mici de altitudine și viteză. O ipoteză fundamentală utilizată în [1] este aceea că numărul Mach rămîne constant în timpul manevrei, una dintre consecințele acestei ipoteze, în cazul vitezelor mari, fiind aceea că plecarea în manevră nu se poate face decît din zborul orizontal rectiliniu și uniform, sau dintr-o mică vecinătate a acestuia.

Pe de altă parte, în [1] s-a făcut o analiză detaliată a metodelor clasice de determinare a răspunsului și sarcinilor aerodinamice pe organele avionului, o atenție deosebită fiind acordată metodelor de tip scurtă perioadă (vezi [3], [4]). Au fost discutate dificultățile și restricțiile asociate cu aceste metode și, prin comparație, avantajele noii metode neliniare propuse. Astfel, cel puțin două concluzii importante au putut fi reținute în [1]. Prima este aceea că metoda permite descrierea manevrelor longitudinale în care intervin variații mari ale unghiului de incidență cu o precizie de ordinul 2—3% în estimarea răspunsului și sarcinilor aerodinamice de manevră. Cea de a doua concluzie se referă la posibilitatea de a face un studiu calitativ asupra răspunsului și sarcinilor de manevră, în particular o estimare directă a erorilor introduse prin aproximația scurtei perioade.

Scopul lucrării de față este extinderea rezultatelor din [1] și [2] pentru cazul manevrelor arbitrare, în care avionul are mișcări combinate de ruliu — tangaj — girație. Aceste manevre pot proveni din bracarea independentă sau simultană a profundorului, direcției, aripioarelor, flapsului și / sau frînelor aerodinamice. Nu vom aborda decît problema estimării componentelor sarcinilor aerodinamice și inerțiale pe axele triedrului mobil *Oxyz*, problemele determinării răspunsului neliniar și a sarcinilor de manevră urmînd să fie abordate în lucrări viitoare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 51—72

Ca și în [1] vom presupune că numărul Mach este constant în timpul manevrei. Această ipoteză are cel puțin trei consecințe importante : prima este aceea că va fi neglijat efectul variației presiunii dinamice în timpul manevrei, cea de a doua constă în neglijarea modificării derivatelor aerodinamice cu variațiile de altitudine și viteză, iar cea de a treia este că, în cazul vitezelor mari, plecarea în manevră nu se poate face decît din zborul orizontal rectiliniu și uniform, sau dintr-o mică vecinătate a acestuia.

Presupunem că structura avionului este rigidă, adică vom neglija deformațiile aeroelastice ale structurii sub acțiunea sarcinilor aerodinamice și inerțiale. Această problemă este suficient de complexă și nu vom insista asupra sa. Remarcăm doar faptul că în conformitate cu dezvoltările din prezenta lucrare, efectul poate fi luat în considerație parțial prin utilizarea derivatelor aeroelastice ale avionului în ipoteza că se poate face, a priori, o estimare a domeniului în care variază unghiurile de incidență și de glisadă pentru bracaje date ale suprafețelor de comandă.

Ideea de bază din lucrare este, ca și în [1], de a descompune a priori sarcinile aerodinamice pe principalele organe componente ale avionului prin considerarea interferențelor aerodinamice reciproce. În explicitarea acestor sarcini vor fi reținuți termenii de ordin superior, adică termenii neliniari în raport cu funcțiile necunoscute ale problemei. La fiecare etapă se vor face aproximații adecvate, inclusiv o analiză de ordin cantitativ a erorilor introduse prin aceste aproximații, obiectivul final fiind acela de a avea o estimare globală cu o precizie de ordinul 2—3 %.

2. NOTAȚII UTILIZATE

În lucrare vor fi utilizate două sisteme de coordonate. Ecuațiile de mișcare ale avionului și componentele forțelor și momentelor vor fi raportate la sistemul mobil $Oxyz$, legat de avion, (vezi fig. 1). Portanța, forța aerodinamică laterală și rezistența la înaintare a unui organ com-

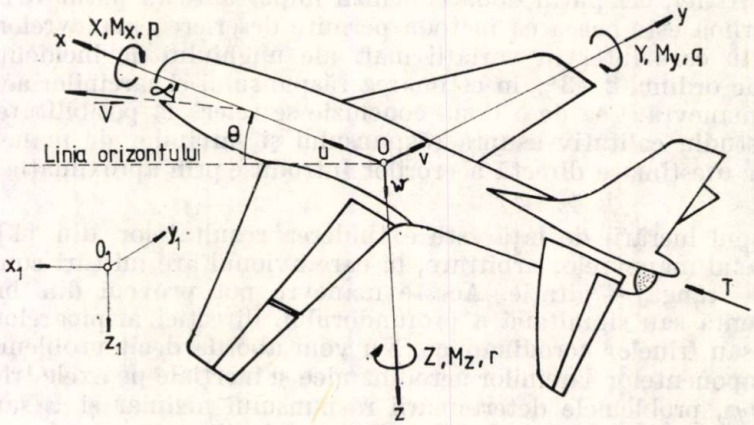


Fig. 1. — Sistemul de referință $Oxyz$ legat de avion. Sensul pozitiv al forțelor și momentelor : forțe aerodinamice — X, Y și Z ; momente aerodinamice — M_x, M_y și M_z ; componentele vitezei — u, v și w ; $O_1x_1y_1z_1$ — — sistemul de referință inerțial.

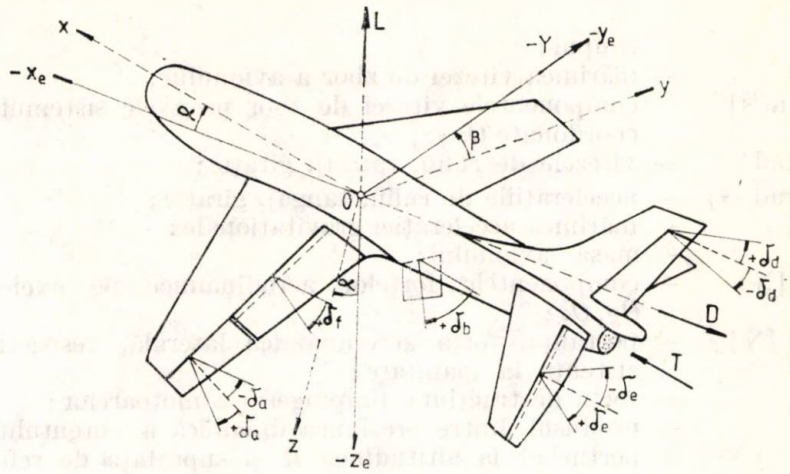


Fig. 2. — Sistemul de referinţă experimental $Ox_ey_ez_e$. Sensul pozitiv al bracajelor. Forţe aerodinamice — L, Y şi D; coeficienţi adimensionali — C_L, C_D şi C_Y.

ponent, sau a întregului avion, vor fi raportate la sistemul de referinţă experimental $Ox_ey_ez_e$, legat de curent (vezi fig. 2). Sensurile pozitive ale forţelor, momentelor, unghiurilor şi bracajelor suprafeţelor de comandă (control) sînt prezentate în aceste figuri.

MĂRIMI GEOMETRICE

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — versorii axelor sistemului de coordonate mobil $Oxyz$;

$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — vectorul de poziţie, în raport cu originea O, al sarcinii aerodinamice pe unul din organele avionului;

$\bar{c}$ [m] — coarda medie aerodinamică a aripii;

b [m] — anvergura suprafeţei portante;

s [m] — semianvergura aripii;

d [m] — distanţa dintre centrul de masă al avionului şi focarul suprafeţei portante;

H [m] — altitudinea la care are loc manevra;

S [m²] — suprafaţa de referinţă a aripii;

α, β [°, rad] — unghiul de incidenţă, respectiv glisadă;

θ, Φ, ψ [°, rad] — unghiurile avionului (tangaj, ruliu, giraţie);

Γ [°, rad] — unghiul diedru al suprafeţei portante;

χ [°, rad] — unghiul de calaj al suprafeţei portante;

δ [°, rad] — bracajul suprafeţei de comandă (control);

ε [°, rad] — unghiul de deflexie a curentului în focarul ampenajelor.

MĂRIMI MECANICE

t [s] — timpul;
V [m/s] — mărimea vitezei de zbor a avionului;
u, v, w [m/s] — componentele vitezei de zbor pe axele sistemului de coordonate $Oxyz$;
p, q, r [rad/s] — vitezele de ruliu, tangaj, giraţie;
$\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ [rad/s^2] — acceleraţiile de ruliu, tangaj, giraţie;
g [m/s^2] — mărimea acceleraţiei gravitaţionale;
m [Kg] — masa avionului;
X, Y, Z [N] — componentele forţelor aerodinamice pe axele Ox, Oy, Oz;
L, Y_e, D [N] — portanţa, forţa aerodinamică laterală, respectiv rezistenţa la înaintare;
T [N] — forţa de tracţiune (împingere) a motoarelor;
Q [N] — produsul dintre presiunea dinamică a curentului neperturbat la altitudinea H şi suprafaţa de referinţă a aripii, $Q = \rho V^2 S/2$;
M_x, M_y, M_z [Nm] — momentele de ruliu, tangaj, giraţie;
I_x, I_y, I_z [Kgm^2] — momentele de inerţie ale avionului în raport cu axele Ox, Oy, respectiv Oz;
I_{zx} [Kgm^2] — produsul de inerţie în raport cu planul Oxz;
ρ [Kg/m^3] — densitatea aerului la altitudinea H

COEFICIENŢI ADIMENSIONALI

C_L — coeficientul de portanţă, $C_L = L/Q$;
C_Y — coeficientul forţei aerodinamice laterale, $C_Y = Y_e/Q$;
C_D — coeficientul de rezistenţă la înaintare, $C_D = D/Q$;
C_T — coeficientul forţei de tracţiune (împingere) a motoarelor, $C_T = T/Q$;
C_l — coeficientul momentului de ruliu, $C_l = M_x/sQ$;
C_m — coeficientul momentului de tangaj, $C_m = M_y/\bar{c}Q$;
C_n — coeficientul momentului de giraţie, $C_n = M_z/sQ$;
$\bar{x}_{CG}$ — poziţia centrului de masă al avionului în lungul axei Ox, adimensionalizată la $\bar{c}$ şi măsurată din bordul de atac al $\bar{c}$;
$\bar{x}_{ac}$ — poziţia adimensională a centrului aerodinamic în raport cu bordul de atac al $\bar{c}$;
Λ — alungirea suprafeţei portante, $\Lambda = b^2/S$;
ζ — factor de corecţie a presiunii dinamice în zona ampenajului orizontal datorită blocajului produs de aripă;
η — factor de corecţie a presiunii dinamice în zona ampenajului vertical datorită blocajului produs de combinaţia aripă—fuzelaj.

DERIVATE AERODINAMICE

$C_{L\alpha}$ — panta portanţei în raport cu incidenţa;
$C_{L\dot{\alpha}}$ — panta portanţei în raport cu variaţia incidenţei;

$C_{y\beta}$ — panta forței aerodinamice laterale în raport cu unghiul de glisadă ;
$C_{y\dot{\beta}}$ — panta forței aerodinamice în raport cu variația unghiului de glisadă ;
C_{Lq} — panta portanței în raport cu viteza de tangaj ;
C_{yr} — panta forței aerodinamice laterale în rapot cu viteza de girație ;
$C_{L\delta}$ — panta portanței în raport cu bracajul suprafeței de comandă ;
$C_{y\delta}$ — panta forței aerodinamice laterale în raport cu bracajul suprafeței de comandă ;
$C_{m\alpha}$ — panta momentului de tangaj în raport cu incidența ;
$C_{m\dot{\alpha}}$ — panta momentului de tangaj în raport cu variația incidenței ;
$C_{n\beta}$ — panta momentului de girație în raport cu unghiul de glisadă ;
$C_{n\dot{\beta}}$ — panta momentului de girație în raport cu variația unghiului de glisadă ;
C_{lp} — panta momentului de ruliu în raport cu viteza de ruliu ;
C_{mq} — panta momentului de tangaj în raport cu viteza de tangaj ;
C_{nr} panta momentului de girație în raport cu viteza de girație ;
C_{np} — panta momentului de girație în raport cu viteza de ruliu ;
$C_{l\delta}$ — panta momentului de ruliu în raport cu bracajul suprafeței de comandă ;
$C_{m\delta}$ — panta momentului de tangaj în raport cu bracajul suprafeței de comandă ;
$C_{n\delta}$ — panta momentului de girație în raport cu bracajul suprafeței de comandă ;
ε_α — panta unghiului de deflexie produs de aripă în zona ampenajului orizontal în raport cu incidența ;
ε_β — panta unghiului de deflexie produs de combinația aripă — fuzelaj în zona ampenajului vertical în raport cu unghiul de glisadă ;
$\Delta\alpha/\Delta\delta$ eficacitatea bracajului suprafeței de comandă.

SUFIXE ȘI ALTE NOTAȚII

A — se referă la aripă ;
F — se referă la fuzelaj ;
AF — se referă la combinația aripă—fuzelaj ;
AO — se referă la ampenajul orizontal ;
AV — se referă la ampenajul vertical ;
f — se referă la flaps ;
a — se referă la aripioare ;
e — se referă la profundor ;
d — se referă la direcție ;
b — se referă la frînele aerodinamice ;
t — se referă la stabilizator ;
D — se referă la derivă ;
T — se referă la tracțiunea motoarelor ;
X_0 — mărimea X este calculată la momentul inițial t_0 ;
$\dot{X}$ — se referă la mărimea X derivată în raport cu timpul t ;
X_* — mărimea X este considerată la portanță nulă ;

ΔX — se referă la abaterea mărimii X la momentul t față de valoarea sa la momentul inițial t_0, $\Delta X = X(t) - X_0$.

Observație. Alte notații folosite în lucrare sînt definite în locul unde apar.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE AVIONULUI

Studiem mișcarea în sistemul de referință $Oxyz$ legat de avion (vezi fig. 1). Dacă utilizăm notațiile de la § 2, ecuațiile de mișcare ale avionului în cazul manevrelor asimetrice arbitrare sînt (vezi [5])

$$\begin{aligned}
&X - mg\sin\theta = m(\dot{u} + qw - rv),\\
&Y + mg\cos\theta\sin\Phi = m(\dot{v} + ru - pw),\\
&Z + mg\cos\theta\cos\Phi = m(\dot{w} + pv - qu),\\
&M_x = I_x\dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) + (I_z - I_y)qr,\\
&M_y = I_y\dot{q} + I_{zx}(p^2 - r^2) + (I_x - I_z)rp,\\
&M_z = I_z\dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) + (I_y - I_x)pq,
\end{aligned} \tag{1}$$

unde s-au neglijat efectele cauzate de rotația Pămîntului. De asemenea, produsele de inerție I_{xy} și I_{yz} s-au considerat nule, deoarece se presupune că distribuția de mase este simetrică față de planul vertical Oxz al avionului.

Funcțiile necunoscute din sistemul (1) sînt u, v, w, p, q, r, θ și Φ, iar variabila independentă este timpul t. În locul funcțiilor u, v și w vom introduce necunoscute α, β și V prin intermediul relațiilor

$$\begin{aligned}
u &= V\cos\alpha\cos\beta,\\
v &= V\sin\beta,\\
w &= V\sin\alpha\cos\beta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Avînd în vedere că Jacobianul transformării (2) este $J = V^2\cos\beta$, această transformare este corect și biunivoc definită pentru $|\beta| < \pi/2$, condiție care satisface toate cerințele practice.

Necunoscutele θ și Φ satisfac ecuațiile cinematice (vezi [5])

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= q\cos\Phi - r\sin\Phi,\\
\dot{\Phi} &= p + (q\sin\Phi + r\cos\Phi)\operatorname{tg}\theta.
\end{aligned} \tag{3a}$$

Rezolvarea problemei Cauchy (vezi [6]) pentru sistemul de ecuații diferențiale format din (1) și (3a) permite determinarea răspunsului avionului la comenzi, abstracție făcînd de funcția ψ. De îndată ce toate celelalte funcții necunoscute sînt determinate, aceasta se obține rezolvînd problema Cauchy pentru ecuația diferențială

$$\dot{\psi} = (q\sin\Phi + r\cos\Phi)\sec\theta, \tag{3b}$$

care reprezintă cea de a treia ecuație cinematică. Mai remarcăm faptul că a doua ecuație din (3a) este singulară pentru $\theta = (2k + 1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ În cadrul prezentei lucrări nu vom aborda problema înlăturării singularităților acestei ecuații și vom presupune $\theta \neq (2k + 1)\pi/2$. Această ipoteză poate fi acceptată, deoarece principalul obiectiv urmărit în cadrul lucrării este determinarea sarcinilor de manevră pe organele avionului pentru evoluții din vecinătatea zborului orizontal.

De asemenea, în conformitate cu scopul propus, nu abordăm nici problema determinării traiectoriei avionului, adică a mărimilor x_1, y_1 și z_1 legate de sistemul de referință fix. De îndată ce răspunsul avionului este cunoscut, determinarea traiectoriei revine la rezolvarea problemei Cauchy pentru sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u\cos\theta\cos\psi + v(\sin\Phi\sin\theta\cos\psi - \cos\Phi\sin\psi) + \\
&\quad + w(\cos\Phi\sin\theta\cos\psi + \sin\Phi\sin\psi), \\
\dot{y}_1 &= u\cos\theta\sin\psi + v(\sin\Phi\sin\theta\sin\psi + \cos\Phi\cos\psi) + \\
&\quad + w(\cos\Phi\sin\theta\sin\psi - \sin\Phi\cos\psi), \qquad (4) \\
\dot{z}_1 &= -u\sin\theta + v\sin\Phi\cos\theta + w\cos\Phi\cos\theta.
\end{aligned}$$

Dacă ținem seama de schimbările de variabilă (2), sistemul (1) devine

$$\begin{aligned}
X - mg\sin\theta &= m[\dot{V}\cos\alpha\cos\beta + (q - \dot{\alpha})V\sin\alpha\cos\beta - \\
&\quad - (r + \dot{\beta}\cos\alpha)V\sin\beta], \\
Y + mg\cos\theta\sin\Phi &= m[\dot{V}\sin\beta + V\cos\beta(r\cos\alpha + \dot{\beta} - p\sin\alpha)], \\
Z + mg\cos\theta\cos\Phi &= m[\dot{V}\sin\alpha\cos\beta + (\dot{\alpha} - q)V\cos\alpha\cos\beta + \\
&\quad + (p - \dot{\beta}\sin\alpha)V\sin\beta], \qquad (5) \\
M_x &= I_x\dot{p} - I_{zx}(\dot{r} + pq) + (I_z - I_y)qr, \\
M_y &= I_y\dot{q} + I_{zx}(p^2 - r^2) + (I_x - I_z)rp, \\
M_z &= I_z\dot{r} - I_{zx}(\dot{p} - qr) + (I_y - I_x)pq.
\end{aligned}$$

În continuare, vom aproxima componentele forțelor și momentelor aerodinamice pentru sistemul format din ecuațiile (5) și (3a) în cazul cînd bracajele flapsului, aripioarei, profundorului, direcției și (sau) frînelor aerodinamice, precum și forța de tracțiune a motoarelor sînt funcții cunoscute de timp pe intervalul $[t_0, T]$.

4. DESCOMPUNEREA FORȚELOR ȘI MOMENTELOR AERODINAMICE

Vom descompune forțele și momentele aerodinamice pe organele avionului în următoarele componente (vezi fig. 2):

a) portanța și rezistența la înaintare a combinației aripă—fuzelaj, L^{AF} și D^{AF}, datorate efectului incidenței, cu punctul de aplicație în $P_{AF}(x^{AF}, 0, z^{AF})$;

b) forța laterală Y^{AF} pe combinația aripă—fuzelaj datorită efectului glisadei al cărei punct de aplicație este considerat, de asemenea, în $P_{AF}(x^{AF}, 0, z^{AF})$;

c) momentul de tangaj la portanță nulă al combinației aripă—fuzelaj M_{y*}^{AF} (moment liber), care provine din momentul la portanță nulă al aripii în interacțiunea cu fuzelajul M_{y*}^{A} și din momentul liber al fuzelajului, M_{y*}^{F}. Prin urmare, $M_{y*}^{AF} = M_{y*}^{A} + M_{y*}^{F}$;

d) momentul de girație la portanță nulă al combinației aripă—fuzelaj M_{z*}^{AF} (de asemenea moment liber), care provine în esență din momentul liber al fuzelajului, M_{z}^{F}. Deci $M_{z*}^{AF} \approx M_{z}^{F}$;

e) portanța și rezistența produsă de flapsuri în interacțiune cu aripa, L^f și D^f, cînd bracajul simetric este δ_f. Presupunem că tronsoanele de flaps lucrează astfel încît punctul de aplicație al forțelor globale L^f și D^f (care se obțin prin însumarea contribuțiilor fiecărui tronson) este $P_f(x^f, 0, z^f)$;

f) portanța și rezistența produsă de aripioară în interacțiune cu aripa, $\pm L^a$ și D^a, cînd bracajul antisimetric este $+\delta_a$. Punctul de aplicație al acestor forțe (pentru semiaripă) este $P_a(x^a, y^a, z^a)$. Atunci cînd aripioarele se brachează antisimetric produc un moment de ruliu M_x^a al cărui coeficient este C_l^a, dat de relația $C_l^a = C_{l\delta}\delta_a$, $C_{l\delta}$ fiind panta coeficientului momentului de ruliu produs de aripioare;

g) portanța și rezistența la înaintare a ampenajului orizontal în interacțiune cu aripa și fuzelajul datorate efectului incidenței α, variației incidenței $\dot{\alpha}$ și vitezei de tangaj q. Notăm aceste forțe cu L^t, respectiv D^t și au punctul de aplicație în $P_t(x^t, 0, z^t)$. Profundorul este în poziția neutră. Vom neglija momentul liber, la portanță nulă, al ampenajului orizontal;

h) portanța și rezistența la înaintare produse de profundor cînd bracajul simetric al acestuia este δ_e. Aceste forțe vor fi notate cu L^e, respectiv D^e și au punctul de aplicație în $P_e(x^e, 0, z^e)$;

i) forța laterală și rezistența produsă de derivă, în interacțiune cu organele vecine, datorate incidenței laterale β, variației acesteia $\dot{\beta}$ și vitezei de girație r. Notăm aceste forțe cu Y^D, respectiv D^D și au punctul de aplicație în $P_D(x^D, 0, z^D)$. Direcția este în poziția neutră;

j) forța laterală și rezistența la înaintare produse de direcție cînd bracajul este δ_d. Notăm aceste forțe cu Y^d, respectiv D^d și au punctul de aplicație în $P_d(x^d, 0, z^d)$;

k) forța aerodinamică normală produsă de frînele aerodinamice cînd bracajul este δ_b^i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Forța normală pe frîna i va fi notată cu N_i^b și are punctul de aplicație în $P_b^i(x_i^b, y_i^b, z_i^b)$;

l) forța $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ de tracțiune (împingere) a motorului i, care face unghiul α_i^T cu axa Ox și are punctul de aplicație în $P_T^i(x_i^T, y_i^T, z_i^T)$.

În afară de forțele și momentele prezentate mai sus, asupra avionului mai acționează următoarele momente aerodinamice:

m) M_x^p, momentul de ruliu al avionului datorat rotației cu viteza unghiulară p;

n) M_x^β, momentul de ruliu indus de unghiul diedru Γ al aripii prin intermediul unghiului de glisadă β;

o) M_x^r, momentul de ruliu al combinației aripă—fuzelaj indus de viteza de giratie (este proporțional cu coeficientul de portanță C_L^A);

p) M_z^p, momentul de giratie datorită ruliului cu viteza unghiulară p (este proporțional cu coeficientul de portanță C_L).

5. APROXIMAREA FORȚELOR ȘI MOMENTELOR AERODINAMICE

Ținînd seama de descompunerea din § 4 a forțelor și momentelor aerodinamice pe organele avionului, precum și de matricea de legătură a componentelor unui vector din sistemul de referință legat de curent (vezi [5]) la cel mobil, legat de avion, componentele forțelor aerodinamice pe axele sistemului mobil sînt :

$$X = (L^{AF} + L^f)\sin\alpha + Y^{AF}\cos\alpha\sin\beta + (L^t + L^e)\sin\alpha'_{A_0} +$$
$$+ (Y^D + Y^d)\cos\alpha\sin\beta'_{AV} - (D^{AF} + D^f)\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- (D^t + D^e)\cos\alpha'_{A0}\cos\beta - (D^d + D^D)\cos\alpha\cos\beta'_{AV} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} T_i\cos\alpha_i^T - \sum_{i=1}^{m} N_i^b\sin\delta_b^i, \tag{6a}$$

$$Y = - Y^{AF}\cos\beta - (Y^D + Y^d)\cos\beta'_{AV} - D^{AF}\sin\beta - (D^D + D^d)\sin\beta'_{AV}, \tag{6b}$$

$$Z = - (L^{AF} + L^f)\cos\alpha - (L^t + L^e)\cos\alpha'_{A0} + Y^{AF}\sin\alpha\sin\beta +$$
$$+ (Y^D + Y^d)\sin\alpha\sin\beta'_{AV} - (D^{AF} + D^f)\sin\alpha\cos\beta -$$
$$- (D^t + D^e)\sin\alpha'_{A0}\cos\beta - \sum_{i=1}^{n} T_i\sin\alpha_i^T, \tag{6c}$$

unde

$$\alpha'_{A0} = \alpha_{A0} - \chi_{A0} - \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)_e \delta_e, \tag{7}$$

$$\beta'_{AV} = \beta_{AV} - \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)_d \delta_d,$$

iar incidențele ampenajului orizontal, respectiv vertical, sînt date de (vezi [7])

$$\alpha_{A0} = (1 - \varepsilon_\alpha)\,\alpha + (q + \dot\alpha\,\varepsilon_\alpha)\frac{d_{A0}}{V} + \chi_{A0} + \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)_e \delta_e,$$
$$\beta_{AV} = (1 - \varepsilon_\beta)\beta + (\dot\beta\,\varepsilon_\beta - r)\frac{d_{AV}}{V} + \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)_d \delta_d. \tag{8}$$

În expresia (6c) s-au neglijat componentele pe axa Oz ale forțelor datorate bracajului celor m frîne aerodinamice.

În continuare, vom aproxima componentele momentelor aerodinamice și ale tracțiunii motoarelor pe axele de coordonate, calculate față de originea O a sistemului de referință. Momentul de ruliu este dat de expresia

$$M_x = M_x^a + M_x^\beta + M_x^p + M_x^r + z^{AF}Y^{AF}\cos\beta +$$
$$+ (z^D Y^D + z^d Y^d)\cos\beta'_{AV} + z^{AF}D^{AF}\sin\beta +$$
$$+ (z^D D^D + z^d D^d)\sin\beta'_{AV} - \sum_{i=1}^{n} T_i y_i^T \sin\alpha_i^T - \sum_{i=1}^{m} N_i^b y_i^b \cos\delta_i^b. \tag{9a}$$

În mod similar, momentul de tangaj se exprimă prin

$$M_y = M_{y*}^{AF} + (z^{AF}L^{AF} + z^f L^f)\sin\alpha + (x^{AF}D^{AF} + x^f D^f)\sin\alpha\cos\beta +$$
$$+ (x^{AF}L^{AF} + x^f L^f)\cos\alpha - (z^{AF}D^{AF} + z^f D^f)\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+ (z^t L^t + z^e L^e)\sin\alpha'_{A0} + (x^t D^t + x^e D^e)\sin\alpha'_{A0}\cos\beta +$$
$$+ (x^t L^t + x^e L^e)\cos\alpha'_{A0} - (z^t D^t + z^e D^e)\cos\alpha'_{A0}\cos\beta +$$
$$+ z^{AF}Y^{AF}\cos\alpha\sin\beta + (z^D Y^D + z^d Y^d)\cos\alpha\sin\beta'_{AV} -$$
$$- (z^D D^D + z^d D^d)\cos\alpha\cos\beta'_{AV} - x^{AF}Y^{AF}\sin\alpha\sin\beta -$$
$$- (x^D Y^D + x^d Y^d)\sin\alpha\sin\beta'_{AV} + \sum_{i=1}^{m} N_i^b(x_i^b\cos\delta_i^b - z_i^b\sin\delta_i^b) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} T_i(z_i^T\cos\alpha_i^T + x_i^T\sin\alpha_i^T), \tag{9b}$$

iar momentul de girație este

$$M_z = M_{z*}^{AF} + M_z^p - x^{AF}Y^{AF}\cos\beta - (x^D Y^D + x^d Y^d)\cos\beta'_{AV} -$$
$$- x^{AF}D^{AF}\sin\beta - (x^D D^D + x^d D^d)\sin\beta'_{AV} + y^a D^a\cos\alpha +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} y_i^b N_i^b \sin\delta_i^b - \sum_{i=1}^{n} T_i y_i^T \cos\alpha_i^T. \tag{9c}$$

Mărimile x^{AF}, z^{AF}, x^f etc.(vezi fig 3) reprezintă proiecțiile pe axele sistemului de coordonate $Oxyz$ ale vectorilor de poziție P_{AF}, P_f etc., care definesc punctele de aplicație ale sarcinilor aerodinamice pe organele avionului în conformitate cu descompunerea din § 4.

În relațiile (6) și (9) vom neglija variația cu numărul Mach, în timpul manevrei, a mărimilor care depind de acest parametru. De asemenea, admitem ipoteza că incidențele α și unghiurile de glisadă β sînt moderate în sensul că vom accepta aproximațiile $\sin\alpha = \alpha$, $\sin\beta = \beta$ și $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 1$. Pentru $\alpha = 15°$ și $\beta = 0°$ eroarea pe care o facem prin prima aproximație este de ordinul $+1\%$, iar prin cea de a doua de ordinul a $+3\%$. Dacă $\alpha = 15°$ și $\beta = 15°$ erorile maxime în aproximarea forțelor și momentelor sînt de ordinul a $+5\%$. Pentru $\alpha < 15°$ și $\beta < 15°$ erorile sînt sub aceste limite. Ca o consecință a ipotezelor menționate rezultă că

și unghiurile α'_{A0} și β'_{AV} sînt moderate, astfel că vom putea accepta și aproximațiile $\sin \alpha'_{A0} = \alpha'_{A0}$, $\sin \beta'_{AV} = \beta'_{AV}$, respectiv $\cos \alpha'_{A0} = 1$, $\cos \beta'_{AV} = 1$.

Avînd în vedere ipotezele de mai sus, componentele din (6) și (9) ale forțelor, respectiv momentelor aerodinamice vor fi aproximate prin

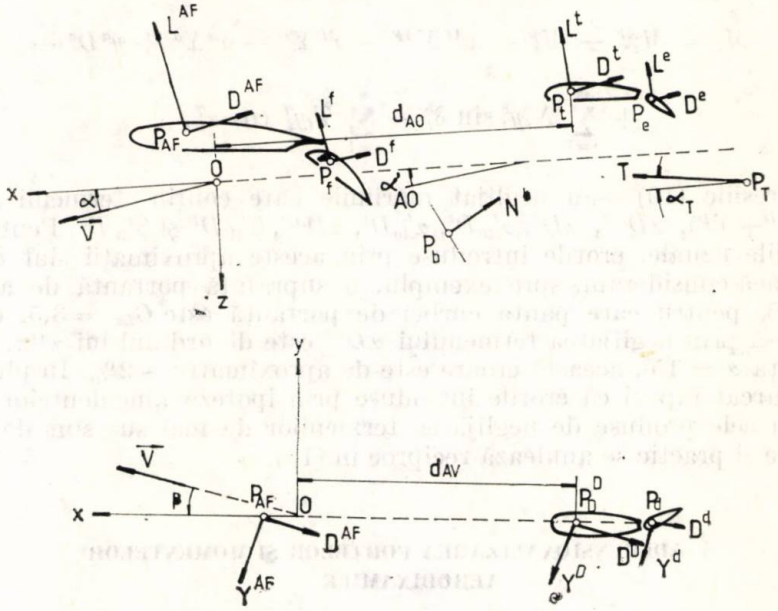


Fig. 3. — Descompunerea forțelor aerodinamice pe organele avionului.

$$X = \alpha(L^{AF} + L^f) + \beta Y^{AF} + \alpha'_{A0}(L^t + L^e) + \beta'_{AV}(Y^D + Y^d) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} T_i \cos \alpha_i^T - (D^{AF} + D^f) - (D^t + D^e) - (D^D + D^d) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} N_i^b \sin \delta_i^b, \tag{10a}$$

$$Y = - Y^{AF} - Y^D - Y^d, \tag{10b}$$

$$Z = - (L^{AF} + L^f) - (L^t + L^e) - \sum_{i=1}^{n} T_i \sin \alpha_i^T, \tag{10c}$$

$$M_x = M_x^a + M_x^\beta + M_x^p + M_x^r + z^{AF} Y^{AF} + z^D Y^D + z^d Y^d -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} T_i y_i^T \sin \alpha_i^T - \sum_{i=1}^{m} N_i^b y_i^b \cos \delta_i^b, \tag{10d}$$

$$M_y = M_{y^0}^{AF} + x^{AF} L^{AF} + x^f L^f + x^t L^t + x^e L^e - z^{AF} D^{AF} - z^f D^f -$$

$$- z^t D^t - z^e D^e - z^D D^D - z^d D^d + \alpha(z^{AF} L^{AF} + z^f L^f) +$$

$$+ \alpha'_{A0}(z^t L^t + z^e L^e) + \beta z^{AF} Y^{AF} + \beta'_{AV}(z^D Y^D + z^d Y^d) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} T_i(z_i^T \cos \alpha_i^T + x_i^T \sin \alpha_i^T) + \sum_{i=1}^{m} N_i^b(x_i^b \cos \delta_i^b - z_i^b \sin \delta_i^b), \quad (10e)$$

$$M_z = M_{z^*}^{AF} + M_z^p - x^{AF} Y^{AF} - x^D Y^D - x^d Y^d + y^a D^a +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} N_i^b y_i^b \sin \delta_i^b - \sum_{i=1}^{n} T_i y_i^T \cos \alpha_i^T. \quad (10f)$$

În expresiile (10) s-au neglijat mărimile care conțin termenii $\alpha\beta Y^{AF}$, $\alpha\beta'_{AV}(Y^D + Y^D)$, αD^{AF}, αD^f, $\alpha'_{A0} D^t$, $\alpha'_{A0} D^e$, βD^{AF}, $\beta'_{AV} D^D$ și $\beta'_{AV} D^d$. Pentru configurațiile uzuale, erorile introduse prin aceste aproximații sînt neglijabile. Dacă considerăm, spre exemplu, o suprafață portantă de alungire $\Lambda = 3{,}5$ pentru care panta curbei de portanță este $C_{L\alpha} = 3{,}5$, eroarea introdusă prin neglijarea termenului αD^{AF} este de ordinul lui α^2/π. Pentru incidența $\alpha = 15°$, această eroare este de aproximativ -2%. În plus, este de remarcat faptul că erorile introduse prin ipoteza „incidențelor moderate" și cele produse de neglijarea termenilor de mai sus sînt de semne contrare și practic se anulează reciproc în (10).

6. ADIMENSIONALIZAREA FORȚELOR ȘI MOMENTELOR AERODINAMICE

Pentru explicitarea forțelor și momentelor aerodinamice care intervin în (10), este deosebit de utilă introducerea coeficienților adimensionali. Prin urmare, vom scrie :

$$\begin{aligned}
&L^{AF} + L^f = Q(C_L^{AF} + C_L^f), \quad && D^{AF} + D^f = Q(C_L^{AF} + C_D^f),\\
&L^t + L^e = \zeta\, Q(C_L^t + C_L^e), && D^t + D^e = \zeta\, Q(C_D^t + C_D^e),\\
&D^D + D^d = \eta_i Q(C_D^D + C_D^d), && Y^{AF} = Q C_y^{AF}, \quad T_i = Q C_i^T,\\
&Y^D + Y^d = \eta_i\, Q(C_y^D + C_y^D), && D^a = Q K_{AF} C_L^{AF} \Delta C_L^a,\\
&M_x^a = Q s C_l^a, && M_x^\beta = Q s C_l^\beta, && M_x^p = Q s C_l^p,\\
&M_x^r = Q s C_l^r, && M_z^p = Q s C_n^p, && M_{y^*}^{AF} = Q \bar{c} C_{m^*}^{AF},\\
& && M_{z^*}^{AF} = Q s C_{n^*}^{AF}, &&
\end{aligned} \quad (11)$$

unde $s = b/2$ reprezintă semianvergura aripii, iar

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 S \quad (12)$$

reprezintă produsul dintre presiunea dinamică a curentului neperturbat și suprafața de referință a aripii. Deoarece, presupunem că variațiile de altitudine și viteză sînt mici pe durata manevrei, vom admite Q = constant.

Pentru aproximarea coeficienților de rezistență la înaintare vom admite expresiile (vezi [7]).

$$C_D^{AF} + C_D^f = C_{D*}^{AF} + K_{AF}(C_L^{AF} + C_L^f)^2,$$
$$C_D^t + C_D^e = C_{D*}^{A0} + K_{A0}(C_L^t + C_L^e)^2, \qquad (13)$$
$$C_D^D + C_D^d = C_{D*}^{AV} + K_{AV}(C_y^D + C_y^d)^2.$$

Parametrii K_{AF}, K_{A0} și K_{AV} depind de geometria suprafeței portante respective și au expresiile

$$K_{AF} = \frac{1}{\pi\Lambda_A}, \quad K_{A0} = \frac{S}{S_{A0}} \cdot \frac{1}{\pi\Lambda_{A0}}, \quad K_{AV} = \frac{S}{S_{AV}} \cdot \frac{1}{\pi\Lambda_{AV}}, \qquad (14)$$

unde S_{A0} este suprafața de referință a ampenajului orizontal, iar S_{AV} cea a ampenajului vertical. De asemenea C_{D*}^{AF}, C_{D*}^{A0} și C_{D*}^{AV} reprezintă coeficienții de rezistență la portanță nulă ai combinației aripă-fuzelaj, ampenajului orizontal, respectiv ampenajului vertical.

Presupunem că la momentul inițial t_0 parametrii de stare ai avionului sînt $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $p = p_0$, $q = q_0$ și $r = r_0$, iar bracajele suprafețelor de comandă sînt $\delta_f = \delta_f^0$, $\pm\,\delta_a = \pm\,\delta_a^0$, $\delta_e = \delta_e^0$, $\delta_d = \delta_d^0$, și $\delta_b = \delta_b^0$. Fie

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0, \quad \Delta\beta = \beta - \beta_0, \quad \Delta p = p - p_0,$$
$$\Delta q = q - q_0, \quad \Delta r = r - r_0, \quad \Delta\delta_f = \delta_f - \delta_f^0, \qquad (15)$$
$$\Delta\delta_a = 2(\delta_a - \delta_a^0), \quad \Delta\delta_e = \delta_e - \delta_e^0, \quad \Delta\delta_d = \delta_d - \delta_d^0, \quad \Delta\delta_b = \delta_b - \delta_b^0.$$

Deoarece admitem că în timpul manevrei altitudinea H și viteza V rămîn constante, rezultă că derivatele aerodinamice nu depind de numărul Mach și vom putea face aproximațiile

$$C_L^{AF} + C_L^f = C_{L_0}^{AF} + C_{L_0}^f + \Delta\alpha C_{L\alpha}^{AF} + \Delta q C_{Lq}^{AF} + \Delta\dot{\alpha} C_{L\dot{\alpha}}^{AF} + C_{L\delta}^f \Delta\delta_f,$$
$$C_L^t + C_L^e = C_{L_0}^t + C_{L_0}^e + \Delta\alpha C_{L\alpha}^t + \Delta q C_{Lq}^t + \Delta\dot{\alpha} C_{L\dot{\alpha}}^t + C_{L\delta}^e \Delta\delta_e, \qquad (16)$$
$$C_y^{AF} = C_{y_0}^{AF} + \Delta\beta C_{y\beta}^{AF},$$
$$C_y^D + C_y^a = C_{y_0}^D + C_{y_0}^a + \Delta\beta C_{y\beta}^D + \Delta r C_{yr}^D + \Delta\dot{\beta} C_{y\dot{\beta}}^d + C_{y\delta}^d \Delta\delta_a,$$

unde mărimile cu indice zero se referă la momentul inițial t_0.

Derivatele aerodinamice care intervin în (16) se pot determina pe diferite căi, inclusiv pe cale experimentală. Între aceste derivate există relațiile (vezi [5], [7])

$$C_{L\dot{\alpha}}^{AF} = \bar{c}\,(\bar{x}_{ac} - \bar{x}_{cG}) C_{L\alpha}^{AF}/V, \quad C_{Lq}^{AF} = d_R^{AF} C_{L\alpha}^A/V,$$
$$C_{L\alpha}^t = (1 - \varepsilon_\alpha) C_{L\alpha}^{A0} S_{A0}/S, \quad C_{Lq}^t = \frac{d_R^{A0}}{V} C_{L\alpha}^{A0} \frac{S_{A0}}{S},$$
$$C_{L\dot{\alpha}}^t = \varepsilon_\alpha \frac{d_{A0}}{V} C_{L\alpha}^{A0} \frac{S_{A0}}{S}, \quad C_{y\beta}^D = (1 - \varepsilon_\beta) C_{y\beta}^{AV} \frac{S_{AV}}{S},$$

$$C^D_{y\beta} = \varepsilon_\beta \frac{d_{AV}}{V} C^{AV}_{y\beta} \frac{S_{AV}}{S}, \qquad C^D_{yr} = -\frac{d^{AV}_R}{V} C^{AV}_{y\beta} \frac{S_{AV}}{S}, \tag{17}$$

$$C^f_{L\delta} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)^f C^A_{L\alpha} \frac{S^f}{S}, \qquad C^e_{L\delta} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)^e C^{AO}_{L\alpha} \frac{S_e}{S},$$

$$C^d_{y\delta} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)^d C^{AV}_{y\beta} \frac{S_d}{S}, \qquad C^a_{L\delta} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\right)^a C^A_{L\alpha} \frac{S_a}{S},$$

unde $C^A_{L\alpha}$ este panta curbei de portanță a aripii, iar $C^{AO}_{L\alpha}$ și $C^{AV}_{Y\beta}$ sînt pantele curbelor de portanță ale ampenajului orizontal, respectiv vertical, raportate la suprafețele de referință corespunzătoare, S_{AO} și S_{AV}. De asemenea,

$$\begin{aligned} d^{AF}_R &= \bar{c}(d_{xR} + 0{,}25 - \bar{x}_{CG}), \\ d^{AO}_R &= d_{AO} + d_{xR}\,\bar{c}_{AO}, \\ d^{AV}_R &= d_{AV} + d_{xR}\,\bar{c}_{AV}, \end{aligned} \tag{18}$$

utilizînd pentru d_{xR} valoarea dată de teorema lui Pistolesi (vezi [7]) $d_{xR} = 0{,}5$.

În continuare, vom determina coeficienții de moment care intervin în (11). Derivatele aerodinamice din (17), prin intermediul cărora se exprimă acești coeficienți, pot fi determinate pe cale teoretică printr-o metodă adecvată, sau pe cale experimentală.

Coeficienții C^a_l și C^p_l sînt dați de

$$C^a_l = C^a_{l_0} + C^a_{l\delta}\,\Delta\delta_a, \quad C^p_l = C^p_{l_0} + \frac{s\Delta p}{V} C_{lp}, \tag{19}$$

unde

$$C^a_{l_0} = C^a_{l\delta}\,\Delta\delta^0_a, \quad C^p_{l_0} = \frac{sp_0}{V} C_{lp}, \tag{20}$$

$\Delta\delta^0_a$ fiind bracajul total al aripioarelor, iar p_0 viteza de ruliu la momentul inițial t_0. Pentru calculul derivatelor $C^a_{l\delta}$ și C_{lp} există diferite metode, una dintre acestea fiind expusă în [7].

Derivata $C_{l\beta}$ a momentului de ruliu indus de unghiul de glisadă are două componente. Prima componentă este proporțională cu unghiul diedru Γ al aripii, iar cea de a doua cu coeficientul de portanță. Vom folosi pentru această derivată aproximația (vezi [7])

$$C_{l\beta} = -k_\beta C^A_L - \frac{4}{3\pi}\Gamma C^A_{L\alpha}, \tag{21}$$

pentru

$$k_\beta = \begin{cases} 0{,}2 \text{ — aripă trapezoidală,} \\ 0{,}6 \text{ — aripă în săgeată,} \\ 0{,}4 \text{ — aripă delta.} \end{cases} \tag{22}$$

Considerînd numai contribuția combinației aripă—fuzelaj, coeficientul momentului de ruliu indus de glisadă se poate aproxima prin

$$C_l^\beta = \beta_0 l_\beta - \beta_0 k_\beta C_{L\delta}^f \Delta\delta_f - \beta_0 k_\beta C_{L\alpha}^{AF} \Delta\alpha - \beta_0 k_\beta C_{Lq}^{AF} \Delta q + l_\beta \Delta\beta -$$
$$- k_\beta C_{L\delta}^f \Delta\beta\Delta\delta_f - k_\beta C_{L\alpha}^{AF} \Delta\alpha\,\Delta\beta - k_\beta C_{Lq}^{AF} \Delta\beta\,\Delta q, \tag{23}$$

unde

$$l_\beta = - k_\beta C_{L_0}^{AF} - \frac{4}{3\pi} \Gamma C_{L\alpha}^{AF}. \tag{24}$$

Derivata momentului de ruliu indus de giratie este, de asemenea, poporțională cu coeficientul de portanță. Se poate folosi aproximația (vezi [7]).

$$C_{lr} = k_r C_L, \tag{25}$$

pentru $k_r = 0{,}4$. Fie $l_r = k_r\, s/V$. Dacă utilizăm derivatele aerodinamice de portanță ale întregului avion cu comenzile blocate, adică

$$C_{L\alpha} = C_{L\alpha}^{AF} + \zeta C_{L\alpha}^t, \quad C_{L\dot\alpha} = C_{L\dot\alpha}^{AF} + \zeta C_{L\dot\alpha}^t, \quad C_{Lq} = C_{Lq}^{AF} + \zeta C_{Lq}^t, \tag{26}$$

atunci coeficientul momentului de ruliu indus de giratie devine

$$C_l^r = r_0 l_r (C_{L0} + C_{L\delta}^f \Delta\delta_f + C_{L\delta}^e \Delta\delta_e + C_{L\alpha}\Delta\alpha + C_{L\dot\alpha}\Delta\dot\alpha + C_{Lq}\Delta q) +$$
$$+ l_r (C_{L0}\Delta r + C_{L\delta}^f \Delta r\,\Delta\delta_f + C_{L\delta}^e \Delta r\,\Delta\delta_e + C_{L\alpha}\Delta\alpha\,\Delta r + C_{L\dot\alpha}\Delta\dot\alpha\Delta r + C_{Lq}\Delta q\Delta r). \tag{27}$$

În conformitate cu [7], derivata momentului de giratie indus de ruliu poate fi aproximată prin

$$C_{np} = \frac{C_L}{4}\left(1 + \frac{12}{\pi\Lambda} C_{lp}\right), \tag{28}$$

C_{lp} fiind derivata momentului de amortizare în ruliu, iar C_L coeficientul de portanță al avionului. Cu notațiile din (26), coeficientul momentului de giratie indus de ruliu devine

$$C_n^p = p_0 n_p (C_{L0} + C_{L\delta}^f \Delta\delta_f + C_{L\delta}^e \Delta\delta_e + C_{L\alpha}\Delta\alpha + C_{L\dot\alpha}\Delta\dot\alpha + C_{Lq}\Delta q) +$$
$$+ n_p (C_{L0}\Delta p + C_{L\delta}^f \Delta p\,\Delta\delta_f + C_{L\delta}^e \Delta p\,\Delta\delta_e + C_{L\alpha}\Delta\alpha\,\Delta p + C_{L\dot\alpha}\Delta\dot\alpha\,\Delta p + C_{Lq}\Delta p\,\Delta q), \tag{29}$$

unde

$$n_p = \frac{s}{4V}\left(1 + \frac{1}{\pi\Lambda} C_{lp}\right). \tag{30}$$

7. CONSIDERAȚII PRIVIND CONDIȚIILE INIȚIALE

Deoarece, în cadrul lucrării presupunem că variațiile de altitudine și viteză sînt mici, rezultă că plecarea în manevră nu poate fi făcută din orice situație de zbor, ci numai din acelea apropiate de zborul orizontal.

Este evident, spre exemplu, că plecarea în manevră dintr-un picaj implică variații importante de altitudine și viteză, teoria expusă în prezenta lucrare nefiind adecvată pentru descrierea unor astfel de manevre.

În cadrul tuturor categoriilor de avioane, cele mai frecvente situații de plecare în manevră constau în zborul orizontal rectiliniu și uniform. De aceea, ne propunem să determinăm condițiile inițiale care caracterizează această situație de zbor la un moment arbitrar t_0, considerat moment inițial al manevrei. Flapsul se presupune că este bracat cu unghiul δ_f^0, iar frînele aerodinamice, aripioarele și direcția sînt în poziția neutră. De asemenea, unghiul de glisadă, precum și vitezele de ruliu, tangaj și girație sînt nule.

Pentru determinarea incidenței de echilibru și a bracajului de profundor corespunzător, vom utiliza expresiile (10c) și (10e) ale componentei Z, respectiv momentului de tangaj M_y. În plus, vom considera numai părțile liniare ale acestor componente, iar componenta X din (10a) va fi neglijată în determinarea echilibrului. Aceste aproximații pot fi acceptate deoarece inidența de echilibru α_0 este mică în raport cu cea din timpul manevrei. Notînd cu C_L coeficientul de portanță al avionului și cu C_m pe cel al momentului de tangaj corespunzător, ecuațiile de echilibru față de centrul de masă al avionului se aproximează prin

$$C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_*) + C^e_{L\delta}\,\Delta\delta_e = \frac{mg}{Q} - C^f_{L\delta}\,\delta_f^0 - \sum_{i=1}^{n} C_i^T \sin\alpha_i^T,$$

$$C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_*) + C^e_{m\delta}\,\delta_e = -C_{m*} - \frac{1}{\bar{c}}\sum_{i=1}^{n} C_i^T(z_i^T\cos\alpha_i^T + x_i^T\sin\alpha_i^T), \tag{31}$$

unde α_* este unghiul de portanță nulă al avionului cu profundorul în poziția neutră și flapsul bracat cu unghiul δ_f^0.

Prin rezolvarea sistemului liniar (31) se determină parametrii de echilibru α_0 și δ_e^0. Așadar, la plecarea în manevră din zborul orizontal neaccelerat, condițiile inițiale ale mișcării sînt:

$$\alpha = \alpha_0,\quad \beta_0 = 0,\quad \delta_f = \delta_f^0,\quad \delta_e = \delta_e^0,\quad \Delta\delta_a = 0,\quad \delta_d^0 = 0, \delta_b^0 = 0,$$

$$C^{AF}_{L_0} = C^{AF}_{L\alpha}(\alpha_0 - \alpha_*),\quad C^t_{L_0} = C^t_{L\alpha}(\alpha_0 - \alpha_*),\quad C^f_{L_0} = C^f_{L\delta}\,\delta_f^0,\quad C^e_{L_0} = C^e_{L\delta}\,\delta_e^0,$$

$$C^a_{L_0} = 0,\quad C^p_{l_0} = 0,\quad C^{AF}_{y_0} = 0,\quad C^D_{y_0} = 0,\quad C^d_{y_0} = 0,\quad p_0 = 0, \tag{32}$$

$$q_0 = 0,\quad r_0 = 0,\quad \theta = \theta_0,\quad \Phi_0 = 0,\quad \psi_0 = 0.$$

Desigur, pot fi considerate și alte manevre pentru care condițiile inițiale diferă de cele din (32), numărul de combinații posibile fiind destul de mare. În particular se poate considera $p_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$, $r_0 \neq 0$ etc. Singura restricție, dictată de limitările teoriei, este ca în timpul manevrei, variațiile de altitudine și viteză ale avionului să nu fie mari. De asemenea, condițiile impuse nu pot fi alese în mod arbitrar, ele trebuie să corespundă unei situații reale din zborul simetric sau asimetric al avionului, adică să satisfacă ecuațiile de echilibru.

8. EXPLICITAREA COMPONENTELOR FORȚELOR ȘI MOMENTELOR AERODINAMICE

Vom porni de la expresiile (10) ale componentelor forțelor și momentelor aerodinamice, iar în dezvoltările respective ținem seama de relațiile stabilite în § 6 pentru coeficienții adimensionali corespunzători. Dacă, în afară de notațiile (26), introducem și

$$C_{L_0}^{Af} = C_{L_0}^{AF} + C_{L_0}^{f},\ C_{L_0}^{AO} = C_{L_0}^{t} + C_{L_0}^{e},\ C_{y_0}^{AV} = C_{y_0}^{D} + C_{y_0}^{d},$$

$$\varepsilon_0 = \alpha_0 (1 - \varepsilon_a) + q_0 \frac{d_{AO}}{V},\quad \tau_0 = \beta_0 (1 - \varepsilon_\beta) - r_0 \frac{d_{AV}}{V},$$

$$C_{D*} = C_{D*}^{AF} + \zeta C_{D*}^{AO} + \eta C_{D*}^{AV},$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - 2K_{AF}\ C_{L_0}^{Af},\ \beta_1 = \beta_0 - 2K_{AF}\ C_{y_0}^{AV}, \tag{33}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - 2K_{AO} C_{L_0}^{AO},\ \varepsilon_2 = \tau_0 - 2K_{AV}\ C_{y_0}^{AV},$$

$$\gamma_1 = d_{AO}/V,\ \gamma_2 = d_{AV}/V,$$

$$a_1 = 1 - 2K_{AF}\ C_{L\alpha}^{AF},\ a_2 = 1 - 2K_{AF}\ C_{y\beta}^{AF},$$

$$b_1 = 1 - \varepsilon_\alpha - 2K_{AO}\ C_{L\alpha}^{t},\ b_2 = 1 - \varepsilon_\beta - 2K_{AV}\ C_{y\beta}^{D},$$

atunci din (10a) obținem pentru componenta X expresia

$$\frac{X}{Q} = \sum_{i=1}^{n} C_i^T \cos\alpha_i^T - \sum_{i=1}^{m} C_{Ni}^b \sin\delta_b^i + \alpha_0 C_{L_0}^{Af} + \beta_0 C_{y_0}^{AF} + \zeta\varepsilon_0 C_{L_0}^{A_0} + \eta\tau_0 C_{y_0}^{AV} -$$

$$- C_{D*} - K_{AF}[(C_{L_0}^{Af})^2 + (C_{y_0}^{AF})^2] - \zeta K_{AO}(C_{L_0}^{AO})^2 - \eta K_{AV}(C_{y_0}^{AV})^2 +$$

$$+ \alpha_1 C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f + \zeta\varepsilon_1 C_{L\delta}^{e}\Delta\delta_e + \eta\varepsilon_2 C_{y\delta}^{d}\Delta\delta_d - K_{AF}(C_{L\delta}^{f})^2(\Delta\delta_f)^2 -$$

$$-\zeta K_{AO}(C_{L\delta}^{e})^2(\Delta\delta_e)^2 - \eta K_{AV}(C_{y\delta}^{d})^2(\Delta\delta_d)^2 + \Delta\dot\alpha[\alpha_1 C_{L\dot\alpha}^{AF} + \zeta\varepsilon_1 C_{L\dot\alpha}^{t} + \zeta\varepsilon_\alpha\gamma_1 C_{L_0}^{AO} +$$

$$+ \zeta C_{L\delta}^{e}(\gamma_1\varepsilon_\alpha - 2K_{AO}C_{L\dot\alpha}^{t})\Delta\delta_e - 2K_{AF}C_{L\dot\alpha}^{AF}C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f] + \Delta\dot\beta[\beta_1 C_{y\dot\beta}^{AF} + \eta\varepsilon_2 C_{y\dot\beta}^{D} +$$

$$+ \eta\varepsilon_\beta\gamma_2 C_{y_0}^{AV} + \eta C_{y\delta}^{d}(\gamma_2\varepsilon_\beta - 2K_{AV}C_{y\dot\beta}^{D})\Delta\delta_d + \Delta\alpha[C_{L_0}^{Af} + \zeta(1 - \varepsilon_\alpha)C_{L_0}^{AO} +$$

$$+ \alpha_1 C_{L\alpha}^{AF} + \zeta\varepsilon_1 C_{L\alpha}^{t} + a_1 C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f + \zeta b_1 C_{L\delta}^{e}\Delta\delta_e] + \Delta\beta[C_{y_0}^{AF} + \eta(1 - \varepsilon_\beta)C_{y_0}^{AV} +$$

$$+ \beta_1 C_{y\beta}^{AF} + \eta\varepsilon_2 C_{y\beta}^{D} + \eta b_2 C_{y\delta}^{d}\Delta\delta_d] + \Delta q[\gamma_1 C_{L_0}^{AO} + \alpha_1 C_{Lq}^{AF} + \zeta\varepsilon_1 C_{Lq}^{t} +$$

$$+ 2K_{AF}C_{Lq}^{AF}C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f + \zeta C_{L\delta}^{e}(\gamma_1 - 2K_{AO}C_{Lq}^{t})\Delta\delta_e] + \Delta r[\eta\varepsilon_2 C_{yr}^{D} + \gamma_2 C_{y_0}^{AV} +$$

$$+ \eta C_{y\delta}^{d}(\gamma_2 - 2K_{AV}C_{yr}^{D})\Delta\delta_d] + (\Delta\alpha)^2[C_{L\alpha}^{AF}(1 - K_{AF}C_{L\alpha}^{AF}) +$$

$$+ \zeta C_{L\alpha}^{t}(1 - \varepsilon_\alpha - K_{AO}C_{L\alpha}^{t})] + (\Delta\beta)^2[C_{y\beta}^{AF}(1 - K_{AF}C_{y\beta}^{AF}) +$$

$$+ \eta C_{y\beta}^{D}(1 - \varepsilon_\beta - K_{AV}C_{y\beta}^{D})] + (\Delta q)^2[\zeta C_{Lq}^{t}(\gamma_1 - K_{AO}C_{Lq}^{t}) - K_{AF}(C_{Lq}^{AF})^2] -$$

$$- (\Delta r)^2[\eta C_{yr}^{D}(\gamma_2 + K_{AV}C_{yr}^{D})] + \Delta\alpha\,\Delta q[a_1 C_{Lq}^{AF} + \zeta(b_1 C_{Lq}^{t} + \gamma_1 C_{L\alpha}^{t})] +$$

$$+ \Delta\beta\,\Delta r(\eta b_2 C_{yr}^{D} + \eta\gamma_2 C_{y\beta}^{D}) + \Delta\alpha\,\Delta\dot\alpha\,[a_1 C_{L\dot\alpha}^{AF} + \zeta(b_1 C_{L\dot\alpha}^{t} + \varepsilon_\alpha\gamma_1 C_{L\alpha}^{t})] +$$

$$+\Delta\beta\,\Delta\dot{\beta}[\eta\,(b_2C^D_{y\dot{\beta}}+\varepsilon_\beta\gamma_2C^D_{y\beta}]+\Delta q\,\Delta\dot{\alpha}\,[\zeta\,\gamma_1\,(C^t_{L\dot{\alpha}}+\varepsilon_\alpha C^t_{Lq})-2(K_{AF}C^{AF}_{Lq}C^{AF}_{L\dot{\alpha}}+$$
$$+\zeta K_{AO}C^t_{Lq}C^t_{L\dot{\alpha}})]-\Delta r\,\Delta\dot{\beta}[\eta\gamma_2(C^D_{y\dot{\beta}}+\varepsilon_\beta C^D_{yr})+2\eta K_{AV}C^D_{yr}C^D_{y\dot{\beta}}]+$$
$$+(\Delta\dot{\alpha})^2[\zeta C^t_{L\dot{\alpha}}(\varepsilon_\alpha\gamma_1-K_{AO}C^t_{L\dot{\alpha}})-K_{AF}(C^{AF}_{L\dot{\alpha}})^2]+(\Delta\dot{\beta})^2[\eta C^D_{y\dot{\beta}}(\varepsilon_\beta\gamma_2-K_{AV}C^D_{y\dot{\beta}})]. \tag{34}$$

Pentru explicitarea componentelor Y și Z vom folosi expresiile (10b), respectiv (10c), în care (conform § 6) neglijăm componentele rezistenței la înaintare pe axele corespunzătoare, Oy și Oz. Erorile introduse prin aceste aproximații sînt efectiv neglijabile. Să considerăm, de exemplu, cazul portanței. Pentru o configurație de alungire $\Lambda = 5$, pentru care $C_L = 0{,}5$ și $\alpha = 8°$, eroarea este sub 0,5%. Prin urmare, dacă introducem și notațiile

$$C_{L_0}=C^{Af}_{L_0}+\zeta C^{AO}_{L_0},\quad C_{y_0}=C^{AF}_{y_0}+\eta C^{AV}_{y_0}, \tag{35}$$
$$C_{y\beta}=C^{AF}_{y\beta}+\eta C^D_{y\beta},\quad C_{y\dot{\beta}}=C^D_{y\dot{\beta}},\quad C_{yr}=C^D_{yr},$$

atunci componentele Y și Z pot fi apoximate prin

$$-\frac{Y}{Q}=C_{y_0}+\eta C^d_{y\delta}\Delta\delta_d+C_{y\dot{\beta}}\Delta\dot{\beta}+C_{y\beta}\Delta\beta+C_{yr}\Delta r, \tag{34b}$$

respectiv

$$-\frac{Z}{Q}=\sum_{i=1}^{n}C^T_i\sin\alpha^T_i+C_{L_0}+C^f_{L\delta}\Delta\delta_f+\zeta C^e_{L\delta}\Delta\delta_e+C_{L\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}+$$
$$+C_{L\alpha}\Delta\alpha+C_{Lq}\Delta q. \tag{34c}$$

În vederea explicitării momentului de ruliu dezvoltăm expresia (10d), în care ținem seama de relațiile (16), (19), (23) și (27). Rezultă

$$\frac{M_x}{sQ}=C^a_{l_0}+C^b_{l_0}+\beta_0l_\beta+r_0l_rC_{L_0}+\frac{z^{AF}}{s}C^{AF}_{y^0}+\frac{z^D}{s}C^D_{y^0}+$$
$$+\frac{z^d}{s}C^d_{y_0}-\frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{n}C^T_iy^T_i\sin\alpha^T_i\right)-\frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{m}C^b_{Ni}y^b_i\cos\delta^b_i\right)+$$
$$+(\beta_0k_\beta-r_0l_r)C^f_{L\alpha}\Delta\delta_f+C^a_{l\delta}\Delta\delta_a+r_0l_rC^e_{L\delta}\Delta\delta_e+\frac{z^d}{s}C^d_{y\delta}\Delta\delta_d+$$
$$+r_0l_rC_{L\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}+\frac{z^D}{s}C^D_{y\dot{\beta}}\Delta\dot{\beta}+(r_0l_rC_{L\alpha}-\beta_0k_\beta C^{AF}_{L\alpha})\Delta\alpha+$$
$$+\left[a_1+\frac{1}{s}(z^{AF}C^{AF}_{y\beta}+z^DC^D_{y\beta})\right]\Delta\beta+\frac{s}{V}C_{lp}\Delta p+(r_0l_rC_{Lq}-\beta_0k_\beta C^{AF}_{Lq})\Delta q+$$
$$+\left(l_rC_{L_0}+\frac{z^D}{s}C^D_{yr}\right)\Delta r+k_\beta C^{AF}_{L\alpha}\Delta\alpha\Delta\beta+l_rC_{L\alpha}\Delta\alpha\Delta r+k_\beta C^{AF}_{Lq}\Delta\beta\Delta q+$$
$$+l_rC_{Lq}\Delta q\Delta r+l_rC_{L\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}\Delta r+k_\beta C^f_{L\delta}\Delta\beta\Delta\delta_f+l_rC^f_{L\delta}\Delta r\Delta\delta_f+l_rC^e_{L\delta}\Delta r\Delta\delta_e. \tag{34d}$$

O expresie similară se obține și pentru momentul de tangaj. Dacă, pentru simplificare, introducem notațiile

$$C_m^T = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i^T}{\bar{c}} (z_i^T \cos\alpha_i^T + x_i^T \sin\alpha_i^T),$$

$$C_m^b = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{Ni}^b}{\bar{c}} (x_i^b \cos\delta_i^b - z_i^b \sin\delta_i^b),$$

$$C_{m_0} = C_{m*}^{AF} + \frac{C_{L_0}^{Af}}{\bar{c}} (x^{AF} + \alpha_0 z^{AF} - K_{AF} z^{AF} C_{L_0}^{AF}) +$$

$$+ \zeta \frac{C_{L_0}^{AO}}{\bar{c}} (x^t + \varepsilon_0 z^t - K_{AO} z^t C_{L_0}^{AO}) -$$

$$- \frac{z^{AF}}{\bar{c}} C_{D*}^{AF} - \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} C_{D*}^{AO} - \eta \frac{z^D}{\bar{c}} C_{D*}^{AV} - \eta \frac{z^D}{\bar{c}} K_{AV} (C_{y_0}^D)^2 +$$

$$+ \beta_0 \frac{z^{AF}}{\bar{c}} C_{y_0}^{AF} + C_{y_0} \frac{z^D}{\bar{c}} [\beta_0 (1 - \varepsilon_\beta) - \gamma_2 r_0],$$

$$d_{AF} = x^{AF} + \alpha_0 z^{AF} - 2K_{AF} z^{AF} C_{L_0}^{Af}, \tag{36}$$

$$d_t = x^t + \varepsilon_0 z^t - 2K_{AO} z^t C_{L_0}^{AO},$$

$$C_{m\dot{\alpha}} = \frac{1}{\bar{c}} (d_{AF} C_{L\dot{\alpha}}^{AF} + \zeta d_t C_{L\dot{\alpha}}^t + \zeta\gamma_1 \varepsilon_\alpha z^t C_{L_0}^{AO}),$$

$$C_{m\alpha} = C_{m\alpha}^F + \frac{1}{\bar{c}} [z^{AF} C_{L_0}^{Af} + \zeta(1 - \varepsilon_\alpha) z^t C_{L_0}^{AO} + d_{AF} C_{L\alpha}^{AF} + \zeta d_t C_{L\alpha}^t],$$

$$C_{mq} = \frac{1}{\bar{c}} (\zeta\gamma_1 z^t C_{L_0}^{AO} + d_{AF} C_{Lq}^{AF} + \zeta d_t C_{Lq}^t),$$

$$C_{m\delta}^f = \frac{C_{L\delta}^f}{\bar{c}} (x^f + \alpha_0 z^f - 2K_{AF} z^{AF} C_{L_0}^{Af}),$$

$$C_{m\delta}^e = \frac{C_{L\delta}^e}{\bar{c}} (x^e + \varepsilon_0 z^e - 2K_{AO} z^t C_{L_0}^{AO}),$$

și ținem seama de relațiile (11), (13) și (16), expresia (10e) devine

$$\frac{M_y}{\bar{c}Q} = C_{m_0} + C_m^T + C_m^b + C_{m\delta}^f \Delta\delta_f - K_{AF} \frac{z^f}{\bar{c}} (C_{L\delta}^f)^2 (\Delta\delta_f)^2 + C_{m\delta}^e \Delta\delta_e +$$

$$+ \frac{z^d}{\bar{c}} c_{y\delta}^d [\beta_0 (1 - \varepsilon_\beta) + \gamma_2 r_0] \Delta\delta_d - \zeta K_{AO} \frac{z^e}{\bar{c}} (C_{L\delta}^e)^2 (\Delta\delta_e)^2 -$$

$$- \eta K_{AV} \frac{z^d}{\bar{c}} (C_{y\delta}^d)^2 (\Delta\delta_d)^2 + C_{m\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + \eta \frac{z^D}{\bar{c}} C_{y\dot{\beta}}^D [\gamma_2 r_0 + \beta_0 (1 - \varepsilon_\beta) +$$

$$+ C^D_{y_0}(\varepsilon_\beta\gamma_2 - 2K_{AV})]\Delta\dot\beta + C_{m\alpha}\Delta\alpha + \left\{\frac{z^{AF}}{\bar c}(\beta_0 C^{AF}_{y\beta} + C^{AF}_{y_0}) + \eta(1-\varepsilon_\beta)\frac{z^D}{\bar c}C^D_{y_0} + \right.$$

$$\left. + \eta\frac{z^D}{\bar c}C_{y\beta}[\beta_0(1-\varepsilon_\beta) + \gamma_2 r_0 - 2K_{AV}C^D_{y_0}]\right\}\Delta\beta + C_{mq}\Delta q +$$

$$\eta\frac{z^D}{\bar c}\{C^D_{yr}[\beta_0(1-\varepsilon_\beta) - 2K_{AV}C^D_{y_0}] - \gamma_2 C^D_{y_0}\}\Delta r +$$

$$+\left[C^{AF}_{L\alpha}\frac{z^{AF}}{\bar c}(1 - K_{AF}C^{AF}_{L\alpha}) + \zeta C^t_{L\alpha}\frac{z^t}{\bar c}(1 - \varepsilon_\alpha - K_{A0}C^t_{L\alpha})\right](\Delta\alpha)^2 +$$

$$+\left[a_1\frac{z^{AF}}{\bar c}C^{AF}_{L\dot\alpha} + \zeta\frac{z^t}{\bar c}(\gamma_1\varepsilon_\alpha C^t_{L\alpha} + b_1 C^t_{L\dot\alpha})\right]\Delta\alpha\,\Delta\dot\alpha + \left[\zeta C^t_{L\dot\alpha}\frac{z^t}{\bar c}(\varepsilon_2\,\varepsilon_\alpha - K_{A0}C^t_{L\dot\alpha}) - \right.$$

$$\left. - K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar c}(C^{AF}_{L\dot\alpha})^2\right](\Delta\dot\alpha)^2 + \left[\zeta C^t_{Lq}\frac{z^t}{\bar c}(\gamma_1 - K_{A0}C^t_{Lq}) - \right.$$

$$\left. - K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar c}(C^{AF}_{Lq})^2\right](\Delta q)^2 + \left[a_1\frac{z^{AF}}{\bar c}C^{AF}_{Lq} + \zeta\frac{z^t}{\bar c}(\gamma_1 C^t_{L\alpha} + b_1 C^t_{Lv})\right]\Delta\alpha\,\Delta q +$$

$$+\left[\zeta\gamma_1\varepsilon_\alpha\frac{z^t}{\bar c}C^t_{Lq} + \zeta\frac{z^t}{\bar c}C^t_{L\dot\alpha}(\gamma_1 - 2K_{A0}C^t_{Lq}) - 2K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar c}C^{AF}_{Lq}C^{AF}_{L\dot\alpha}\right]\Delta q\,\Delta\dot\alpha +$$

$$+\left[\frac{z^{AF}}{\bar c}C^{AF}_{y\beta} + \eta\frac{z^D}{\bar c}C^D_{y\beta}(1 - \varepsilon_\beta - K_{AV}C^D_{y\beta})\right](\Delta\beta)^2 + \eta_1\frac{z^D}{\bar c}C^D_{y\dot\beta}(\gamma_2\varepsilon_\beta -$$

$$- K_{AV}C^D_{y\dot\beta})(\Delta\dot\beta)^2 + \eta\frac{z^D}{\bar c}(\gamma_2\varepsilon_\beta C^D_{y\beta} + b_2 C^D_{y\dot\beta})\Delta\beta\,\Delta\dot\beta + \eta\frac{z^D}{\bar c}(b_2 C^D_{yr} - \gamma_2 C^D_{y\beta})\Delta\beta\Delta r +$$

$$- \eta\frac{z^D}{\bar c}[\gamma_2\,\varepsilon_\beta\,C^D_{yr} + C^D_{y\dot\beta}(\gamma_2 - 2K_{AV}C^D_{yr})]\,\Delta r\,\Delta\dot\beta - \eta\frac{z^D}{\bar c}C^D_{yr}(\gamma_2 - K_{AV}C^D_{yr})(\Delta r)^2 +$$

$$+\frac{C^f_{l\delta}}{\bar c}(z^f - 2K_{AF}z^{AF}C^{AF}_{L\beta})\,\Delta\alpha\,\Delta\delta_f + \zeta C^e_{L\delta}(z^e - 2K_{A0}z^t C^t_{L\alpha})\Delta\alpha\,\Delta\delta_e +$$

$$+\eta(1-\varepsilon_\beta)\frac{z^d}{\bar c}C^d_{y\delta}\,\Delta\beta\,\Delta\delta_d - 2K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar c}C^{AF}_{L\dot\alpha}C^f_{L\delta}\Delta\dot\alpha\Delta\delta_f - 2K_{AF}\frac{z^{AF}}{\bar c}C^{AF}_{Lq}C^f_{L\delta}\Delta q\Delta\delta_f +$$

$$+\zeta C^e_{L\delta}\frac{z^t}{\bar c}(\gamma_1\varepsilon_\alpha - 2K_{A0}C^t_{L\dot\alpha})\Delta\dot\alpha\,\Delta\delta_e + \zeta C^e_{L\delta}\frac{z^t}{\bar c}(\gamma_1 - 2K_{A0}C^t_{Lq})\,\Delta q\,\Delta\delta_e +$$

$$+\varepsilon_\beta\gamma_2\frac{z^d}{\bar c}C^d_{y\delta}\,\Delta\dot\beta\,\Delta\delta_d + \gamma_2\frac{z^d}{\bar c}C^d_{y\delta}\,\Delta r\Delta\delta_d. \tag{34e}$$

Dacă ținem seama de relațiile (11), (13), (16) și (29), expresia (10f) a momentului de girație devine

$$\frac{M_z}{sQ} = p_0 n_p C_{L_0} - \frac{1}{s}\left(x^{AF}C^{AF}_{y_0} + x^D C^D_{y_0} + x^d C^d_{y_0} + \sum_{i=1}^{n} C^T_i y^T_i \cos\alpha^T_i\right) -$$

$$-\frac{x^d}{s} C^d_{y_0}\Delta\delta_d + p_0 n_p C^f_{L\delta}\Delta\delta_f + p_0 n_p C^e_{L\delta}\Delta\delta_e + K_{AF}\frac{y^a}{s} C^{AF}_{L_0} C^a_{L\delta}\Delta\delta_a +$$

$$+\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{m} y^b_i C^b_{Ni}\sin\delta^b_i + K_{AF}\frac{y^a}{s} C^f_{L\delta} C^a_{L\delta}\Delta\delta_f\Delta\delta_a + p_0 n_p C_{L\dot\alpha}\Delta\dot\alpha -$$

$$-\frac{x^D}{s} C^D_{y\dot\beta}\Delta\dot\beta + p_0 n_p C_{L\alpha}\Delta\alpha + n_p C_{L_0}\Delta p + \Big[C^F_{n\beta} - \frac{1}{s}(x^{AF} C^{AF}_{y\beta} +$$

$$+x^D C^D_{y\beta})\Big]\Delta\beta + p_0 n_p C_{Lq}\Delta q - \frac{x^D}{s} C^D_{yr}\Delta r + n_p C^f_{L\delta}\Delta p\Delta\delta_f + n_p C^e_{L\delta}\Delta p\Delta\delta_e +$$

$$+n_p C_{L\alpha}\Delta\alpha\Delta p + n_p C_{L\dot\alpha}\Delta p\Delta\dot\alpha + n_p C_{Lq}\Delta p\Delta q +$$

$$+ K_{AF}\frac{y^a}{s}(C^{AF}_{L\alpha}\Delta\alpha + C^{AF}_{L\dot\alpha}\Delta\dot\alpha)\Delta\delta_a. \tag{34f}$$

Este de remarcat faptul că pentru fiecare dintre componentele din (34) ale forțelor și momentelor aerodinamice, termenii reținuți în dezvoltările respective asigură același nivel de eroare relativă (conform § 5).

9. APROXIMAREA FORȚELOR INERȚIALE

În vederea aproximării forțelor inerțiale vom utiliza, în continuare, ipotezele deja acceptate, anume $\sin\alpha = \alpha$, $\sin\beta = \beta$ și $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 1$. Așa cum s-a văzut anterior, erorile sînt acceptabile pe o gamă suficient de mare a unghiurilor de incidență, respectiv de glisadă. Și în cazul de față, pentru $\alpha = 15°$ și $\beta = 0°$, respectiv $\alpha = 0°$ și $\beta = 15°$, erorile sînt de ordinul 1% în cazul componentelor longitudinale și de ordinul a 3% în cazul celor verticale și transversale.

Dacă ținem seama de schimbările de variabilă (15), componentele (5) ale forțelor și momentelor devin

$$X - mg\sin\theta = m[V(\alpha_0 q_0 - \beta_0 r_0) - \alpha_0 V\Delta\dot\alpha - \beta_0 V\Delta\dot\beta + \Delta\dot V + q_0\dot V\Delta\alpha -$$

$$- r_0 V\Delta\beta + \alpha_0 V\Delta q - \beta_0 V\Delta r + V\Delta\alpha\Delta q - V\Delta\alpha\Delta\dot\alpha - V\Delta\beta\Delta r - V\Delta\beta\Delta\dot\beta], \tag{37a}$$

$$Y + mg\cos\theta\sin\Phi = m[V(r_0 - \alpha_0\beta_0) + V\Delta\dot\beta + \beta_0\Delta\dot V - p_0 V\Delta\alpha -$$

$$- \alpha_0 V\Delta p + V\Delta r + \Delta\beta\Delta\dot V - V\Delta\alpha\Delta p], \tag{37b}$$

$$Z + mg\cos\theta\cos\Phi = m[V(p_0\beta_0 - q_0) + V\Delta\dot\alpha - \alpha_0\beta_0 V\Delta\dot\beta +$$

$$+ \alpha_0\Delta\dot V + p_0 V\Delta\beta + \beta_0 V\Delta p - V\Delta q + \Delta\alpha\Delta\dot V - \beta_0 V\Delta\alpha\Delta\dot\beta +$$

$$+ V\Delta\beta\Delta p - \alpha_0 V\Delta\beta\Delta\dot\beta - V\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\dot\beta], \tag{37c}$$

$$M_x = r_0 q_0(I_z - I_y) - p_0 q_0 I_{zx} + I_x\Delta\dot p - I_{zx}\Delta\dot r - [p_0 I_{zx} + r_0(I_y -$$

$$- I_z)]\Delta q - q_0(I_y - I_z)\Delta r - I_{zy}\Delta p\Delta q - (I_y - I_z)\Delta q\Delta r, \tag{37d}$$

$$M_y = (p_0^2 - r_0^2) I_{zx} + r_0 p_0(I_x - I_z) + I_y\Delta q + [2p_0 I_{zx} + r_0(I_z -$$

$$- I_z)] \Delta p - [2r_0 I_{zx} + p_0(I_z - I_x)] \Delta r + I_{zx}(\Delta p)^2 -$$
$$- I_{zx}(\Delta r)^2 - (I_z - I_x) \Delta p \Delta r, \tag{37e}$$

$$M_z = q_0 r_0 I_{zx} - p_0 q_0 (I_x - I_y) - I_{zx} \Delta \dot{p} + I_z \Delta \dot{r} + q_0 (I_y - I_x) \Delta p + [r_0 I_{zx} +$$
$$+ p_0 (I_y - I_x)] \Delta q + q_0 I_{zx} \Delta r + I_{zx} \Delta q \Delta r + (I_y - I_x) \Delta p \Delta q. \tag{37f}$$

Expresiile (34) și (37) ale sarcinilor aerodinamice, respectiv inerțiale, se simplifică considerabil dacă plecarea în manevră se face din zborul orizontal rectiliniu și uniform, pentru care condițiile inițiale ale mișcării sînt definite în (32).

Dacă θ_0 și Φ_0 sînt valorile unghiurilor θ și Φ la momentul inițial t_0, vom scrie

$$mg \sin\theta = mg \sin\theta_0 + mg F_1(\theta),$$
$$mg \cos\theta \sin\Phi = mg \cos\theta_0 \sin\Phi_0 + mg F_2(\theta, \Phi), \tag{38}$$
$$mg \cos\theta \cos\Phi = mg \cos\theta_0 \cos\Phi_0 + mg F_3(\theta, \Phi),$$

funcțiile nou introduse, avînd proprietatea că se anulează la momentul inițial, adică $F_1(\theta_0) = 0$, $F_2(\theta_0, \Phi_0) = 0$ și $F_3(\theta_0, \Phi_0) = 0$. De asemenea, aceste funcții sînt mărginite, în valoare absolută, de 2.

Primit în redacție la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. I. ȚEPOSU, *Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variații mici de altitudine și viteză, I*, St. cerc. mec. apl., **45**, 5 (1986).
2. I. ȚEPOSU, *Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variații mici de altitudine și viteză. II*, St. cerc. mec. apl., **46**, 1 (1987).
3. T. CZAYKOWSKI, *Loading Conditions of Tailed Aircraft in Longitudinal Manoeuvres*, Report & Memoranda, 3001 (1956).
4. P. F. RICHARDS, *The Estimation of Tail Loaing due to Elevator — Induced Pitcheng Manoeuvres*, Parts I, II and III, Aircfrat Engineering, 371, 372 and 373 (1960).
5. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1972.
6. A. HALANAY, *Ecuații diferențiale*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1962.
7. H. SCHLICHTING, E. TRUCKENBRODT, *Aerodynamik des Flugzeuges*, Bd. **I, II**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1969.

STUDIUL DESPRINDERII TURBULENTE A STRATULUI LIMITĂ PE UN PROFIL AERODINAMIC CU GRADIENT DE PRESIUNE

de FELICIA MOCANU

ICSITAv — INCREST, București

Folosind o metodă diferențială de calcul pentru stratul limită laminar, tranzițional și turbulent, cu diferențe centrate implicite, se studiază curgerea pe un profil GA(W) într-un curent cu gradient de presiune.
Se studiază desprinderea turbulentă atît pentru o distribuție de viteze obținute prin calcul potențial, cît și experimental pentru diverse incidente.
Pentru modelul turbulent cît și pentru criteriul de desprindere s-a utilizat modelul Cebeci și Smith. Ca urmare a utilizării distribuțiilor de viteze potențiale și experimentale obținute în cadrul laboratorului tubului Ludwieg s-a obținut o desprindere teoretică cît și experimentală destul de apropiată de cea marcată de distribuțiile de presiuni.

Avînd în vedere importanța desprinderii stratului limită pe un profil aerodinamic se impune găsirea unei metode de calcul cît mai rapidă și mai avantajoasă. În acest articol se va studia cazul desprinderii turbulente în situația existenței bulei de desprindere laminare cu reatașare. Subiectul a fost abordat de mai mulți autori, iar parametrii la suprafața și în interiorul bulei au fost obținuți de cele mai multe ori folosind ecuațiile Navier-Stokes sau modelul stratului limită. În modelul stratului limită se consideră curgerea cu tranziție spre turbulent în punctul în care există desprindere laminară (bulă de reatașare). Acest ultim caz se va aborda cu modelul Cebeci Smith de calcul al stratului limită laminar, tranzițional și turbulent, incompresibil, cu gradient de presiune favorabil și nefavorabil. Tranziția se determină cu metoda Cebeci Smith. Drept criteriu de studiu al bulei se folosește criteriul lui Gaster.

1. METODE DE DETERMINARE A SEPARĂRII LAMINARE ȘI TURBULENTE

Pentru separarea laminară modelul Cebeci Smith consideră că aceasta are loc cînd $C_f = 0$ sau mai exact cînd $Vw = 0$, Vw derivata vitezei la perete. Pentru separarea turbulentă, în metodele de studiu al stratului limită se ia drept criteriu de stabilire a desprinderii parametrul de formă H care trebuie să fie între 1,8 și 2,4 cînd separarea e considerată că există. În metodele diferențiale drept criteriu de desprindere luat τ_w, tensiunea de frecare tangențială, ceea ce implică $C_f = 0$. Există însă o diferență în cadrul utilizării calculului stratului limită pentru o distribuție de viteze sau presiuni obținută teoretic și cea obținută experimental. În general, în cazul experimental aproape de separarea turbulentă, τ_w sau C_f începe să scadă aproape de separare și apoi să crească, la fel se poate întîmpla și cu H în metodele integrale. Deci pentru cazul utilizării distribuțiilor de presiune experimentală se ia drept punct de desprindere, punctul în care τ_w sau C_f scade și apoi crește, sau minimum lui C_f. În cazul distribuției de presiuni teoretice (extrapolate) se consideră drept punct de desprindere punctul unde $C_f = 0$.

ST. CERC. MEC.APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 73—77

2. CAZUL BULEI DE DESPRINDERE

În curgerile pe un profil pot apare separări cu reatașare sau nu numite bule. Acestea pot fi laminare de bord de atac sau turbulente de bord de fugă. Se va studia cazul bulei laminare cu reatașare. Se consideră că există bulă de desprindere laminară cînd:

$\lambda = \frac{\theta_s^2}{\nu} \frac{\Delta U}{\Delta S} = -0{,}09$, unde θ_s este grosimea de impuls, ν — viscozitatea cinematică, U — viteza curgerii, $R_{\theta_s} = \frac{U_e \cdot \theta_s}{\nu} > 125$ și fără reatașare, „bubble bursting" cînd:

$$R_{\theta_s} \leqslant 125.$$

În calculele realizate pentru o distribuție de presiuni pe un profil NASA—GA(W)—1 la $M = 0{,}26$ și $Re = 2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^6$ și unghiuri de incidență de 12—16°, s-a remarcat prezența unei bule laminară cu reatașare. Pentru continuarea calculului așa cum au procedat și alți autori s-a considerat bula redusă la un punct, și s-a impus în acest punct tranziția spre turbulent. S-a utilizat pentru calculul turbulent modelul Cebeci-Smith pentru viscozitatea de vîrtej. Aceștia după cum se știe au modelat stratul limită turbulent printr-un strat interior și unul exterior în care viscozitățile de vîrtej sînt următoarele:

$$\varepsilon_i = (\varkappa y)^2 [1 - \exp(Y/A)]^2 \text{ și } \varepsilon_0 = \alpha U_e \delta^*,$$

unde

$\varkappa = 0{,}4$; $\alpha = 0{,}0168$, A = parametru de amortizare.

După cum am mai amintit s-a analizat comportarea în fluid a unui profil NASA—GA(W)—1. Calculul teoretic de obținere a distribuțiilor de viteză pe acest profil a fost realizat cu programul ALZD de către dr. ing. Lucian Dumitrescu, pentru mai multe incidențe și numere Reynolds. În acest articol se va prezenta doar cazul pentru extrados. Distribuțiile de presiuni experimentale au fost realizate în cadrul laboratorului tubului Ludwieg și de asemenea s-au realizat pentru mai multe incidențe. Pentru exemplificare s-a prezentat cazul $\alpha = 16°$ (fig. 1).

În urma calculelor realizate s-au obținut diverși parametri ai stratului limită de-a lungul profilului cum sînt grosimea de deplasare δ^*, grosimea de impuls θ, distribuția coeficientului de frecare C_f cît și parametrul de formă al stratului limită H. Vom discuta în continuare acești parametri pentru distribuția de viteză obținută teoretic.

În figurile 2, 3, 4, 5, se vede foarte clar punctul în care avem desprindere laminară. Pentru metoda de calcul folosită, acest punct e punct de singularitate, implicînd totodată o neconvergență a metodei. Pentru evitarea acesteia și continuarea calculului se iau drept valori de start valorile obținute cu un punct înainte. Erorile nu vor fi mari, avînd în vedere că rețeaua de calcul pe profil este foarte deasă. În acest moment după testarea cu metoda Gaster dacă există bulă cu reatașare (și aceasta există în cazul considerat) se continuă calculul cu modelul turbulent. Așa cum am menționat dacă $\tau_w = 0$, $C_f = 0$ apare desprindere turbulentă (din nou singularitate, neconvergență) calculul nu mai poate continua. Pentru cal-

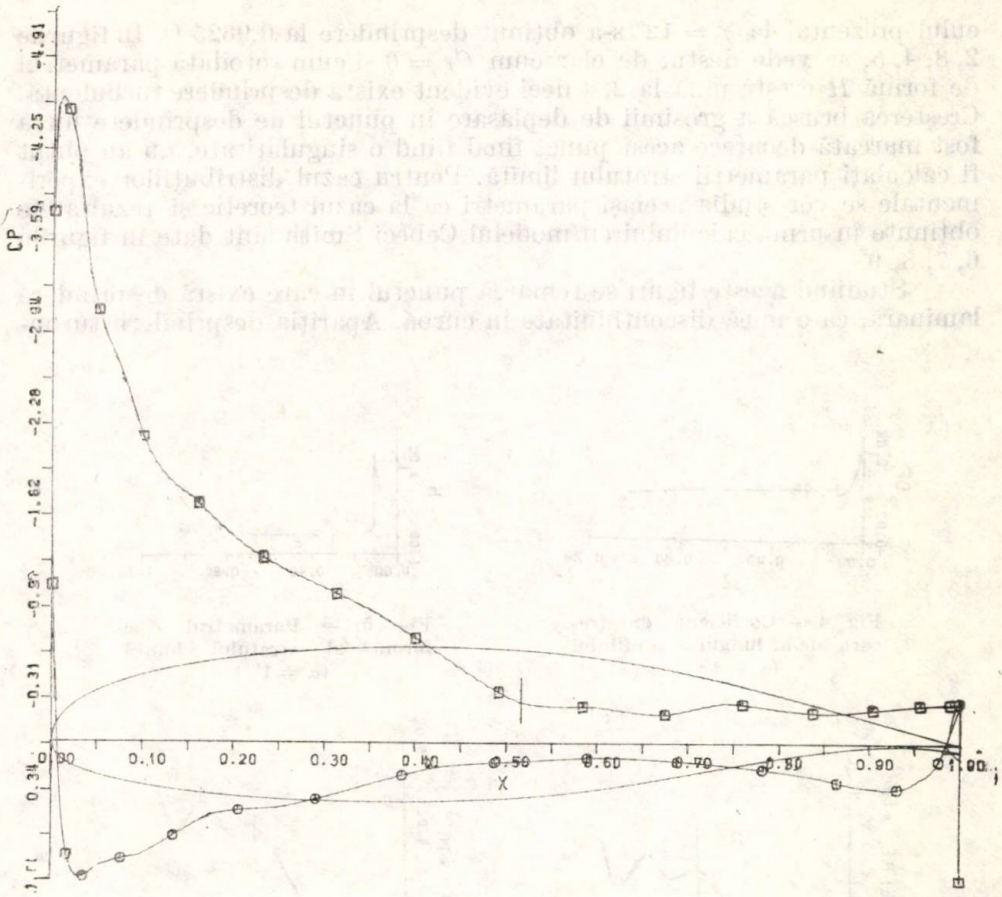


Fig. 1. — Distribuție experimentală de presiuni pe un profil NASA—GA (W) —1, la $\alpha = 16°$; $M = 0{,}26$.

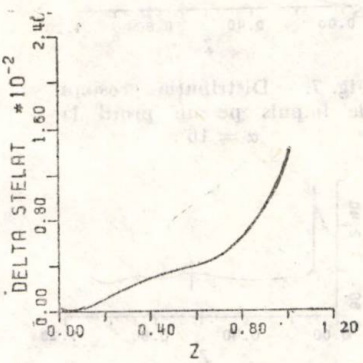


Fig. 2. — Distribuția grosimii de deplasare de-a lungul profilului aerodinamic pînă la separarea turbulentă, $\alpha = 12°$.

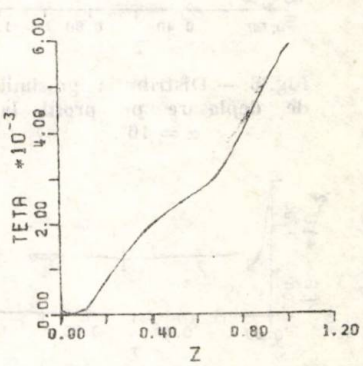


Fig. 3. — Distribuția grosimii de impuls de-a lungul profilului pînă la separarea turbulentă, la $\alpha = 12°$.

culul prezentat la $\alpha = 12°$ s-a obținut desprindere la 0,9625 C. În figurile 2, 3, 4, 5, se vede destul de clar cum $C_f = 0$ și cum totodată parametrul de formă H crește pînă la 2, 4 deci evident există desprindere turbulentă. Creșterea bruscă a grosimii de deplasare în punctul de desprindere nu a fost marcată deoarece acest punct final fiind o singularitate, nu au putut fi calculați parametrii stratului limită. Pentru cazul distribuțiilor experimentale se vor studia aceiași parametri ca la cazul teoretic și rezultatele obținute în urma calculului cu modelul Cebeci Smith sînt date în figurile 6, 7, 8, 9.

Studiind aceste figuri se remarcă punctul în care există desprindere laminară, ca o mică discontinuitate în curbă. Apariția desprinderii turbu-

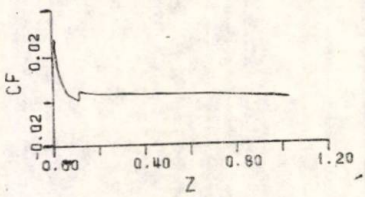


Fig. 4. — Coeficient de frecare de-a lungul profilului ($\alpha = 12°$).

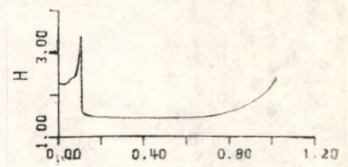


Fig. 5. — Parametrul de formă al stratului limită ($\alpha = 12°$).

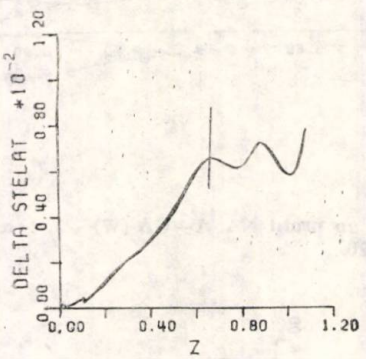


Fig. 6. — Distribuția grosimii de deplasare pe profil la $\alpha = 16°$.

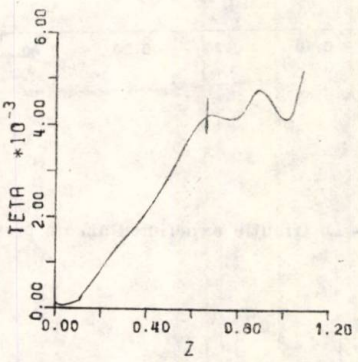


Fig. 7. — Distribuția grosimii de impuls pe un profil la $\alpha = 16°$.

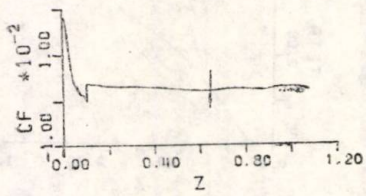


Fig. 8. — Coeficient de frecare de-a lungul profilului la $\alpha = 16°$.

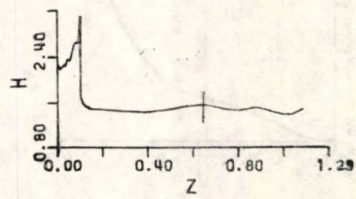


Fig. 9. — Parametrul de formă al stratului limită ($\alpha = 16°$).

lente este prinsă foarte bine de calcul avînd în vedere că în acest caz nu mai există singularitate $C_f = 0$ sau $\tau_w = 0$ ci doar o fluctuaţie a acestor parametri (scădere urmată de creştere). Se remarcă imediat după punctul de desprindere turbulent marcat pe desen cu o linie mică verticală că toate mărimile fluctuează ceea ce arată clar existenţa desprinderii şi faptul că modelul de calcul folosit numai este valabil. Figurile 6, 7, 8, 9, sînt foarte clare şi marchează destul de uşor desprinderea turbulentă.

4. CONCLUZII

În urma studiilor realizate rezultă că se poate folosi o metodă de calcul al stratului limită pentru a determina cînd apare desprinderea turbulentă şi deci „stalling" pe un profil atît pentru distribuţii de presiuni obţinute teoretic, cît şi experimental.

Primit în redacţie la 24 septembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. TUNCER, *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press, Inc. (London) Ltd., 1974.
2. C. TUNCER, *Calculation of Separation Points in Incompressible Turbulent Flows*. J. Aircraft, **9**, 9 (1972).
3. VAN DEN BERG, *Role of Laminar Separation Bubbles in Airfoil Leanding Edge Stalls*, AIAA Journal, **19**, 5 (1981).
4. M. BARNETT, J. M. VERDON, *Viscid/Inviscid Interaction Analysis of Subsonic Turbulent Trailing-Edge Flows*, AIAA Journal, **25**, 9 (1978).
5. D. A. JOHNSON, L. S. KING, *A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers*, AIAA Journal, **23**, 11 (1985).
6. P. S. GRANVILLE, D. TAYLOR, *Baldwin-Lomax Factors for Turbulent Boundary Layers in Pressure Gradients*, AIAA Journal, **25**, 12 (1987).
7. * * * Biblioteca de programe Sicpac— INCREST, Catalog de profile aerodinamice.
8. L. DUMITRESCU, *Distribuţii de viteză şi presiuni*, Biblioteca de programe LZD— INCREST.

FLAMBAJUL PANOURILOR SANDWICH CU FEŢE DIN PLĂCI DE PLASTIC LAMINATE, RIGIDIZATE CU FIBRE DE CARBON

de OLGA MARTIN

ICSITAv — Bucureşti

Se analizează stabilitatea panourilor sandwich cu feţe din plăci laminate, utilizîndu-se teoria încovoierii plăcilor anizotrope subţiri simplu rezemate, supuse la o încărcare uniform distribuită pe contur. Sînt prezentate rezultate numerice pentru fenomenele de wrinkling şi flambaj general, care apar în cazul panourilor cu feţe din materiale compozite şi inimă fagure.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Utilizarea pe scară tot mai largă a materialelor compozite în industrie conduce, în mod necesar, la elaborarea de metode analitice de calcul ale acestora, în scopul obţinerii unor structuri de bună calitate.

În această lucrare se va studia flambajul panourilor sandwich simplu rezemate de contur, supuse la o solicitare maximală, p, uniform distribuită pe laturile $x = 0$ şi $x = a$ (vezi fig. 1).

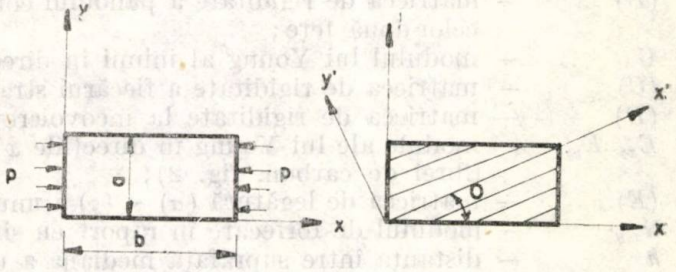


Fig. 1 — Geometria şi modul de solicitare al panoului sandwich (în planul xOy).

Feţele structurii sandwich s-au asimilat cu plăci anizotrope multistrat, proprietăţile mecanice ale acestora fiind modificate funcţie de unghiul pe care-l fac fibrele de carbon ale fiecărui strat cu axa Ox a sistemului local de coordonate (fig. 2).

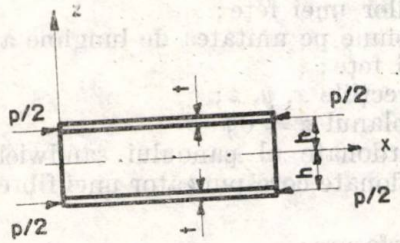


Fig. 2. — Geometria şi modul de solicitare al panoului sandwich (în planul xOz).

Inima panoului sandwich s-a presupus omogenă și ortotropă. Tensiunile paralele cu fețele se neglijează, inima considerîndu-se rigidă după o direcție perpendiculară pe fețe.

Exemplele numerice, care însoțesc considerațiile teoretice ale acestui capitol demonstrează influența unghiului θ (fig. 2), a distanței dintre suprafața mediană a feței și suprafața mediană a inimii asupra valorii sarcinii critice de flambaj general și a celei de wrinkling. De asemenea s-a analizat influența rigidității inimii asupra sarcinii critice de wrinkling.

Rezultatele numerice obținute cu ajutorul programului de calcul realizat pentru calculul panourilor sandwich cu fețe din materiale compozite au fost comparate cu rezultatele teoretice și experimentale obținute de Pearce și Webber [8] și Tsai [9], [10].

2. NOTAȚII

A_1, A_2 — operatori definiți în ecuație (26),
a — lungimea panoului;
(A) — matrice de rigiditate corespunzătoare planului fețelor;
B_1, B_2, B_3 — operatori definiți de ecuația (26);
b — lățimea panoului;
(B) — matricea de rigiditate a panoului corespunzătoare cuplării celor două fețe;
C — modulul lui Young al inimii în direcția z;
(C) — matricea de rigiditate a fiecărui strat al feței;
(D) — matricea de rigiditate la încovoiere;
E_x, E_y, — module ale lui Young în direcțiile x', y' (corespunzătoare fibrei de carbon, fig. 2);
(E) — matricea de legătură $(\sigma) \sim (\varepsilon)$ a unui strat al feței;
$G_{x'y'}$ — modulul de forfecare în raport cu sistemul x', y' (fig. 2);
h — distanța între suprafața mediană a unei fețe și suprafața mediană a inimii;
h_k, h_{k+1} — distanța între suprafața inferioară, respectiv superioară a stratului k al feței și planului median al acesteia;
L_{xz}, L_{yz} — module de forfecare ale inimii corespunzătoare planelor xz și yz;
M_x, M_y, M_{xy} — momente de încovoiere și forfecare a feței;
N_x, N_y, N_{xy} — tensiuni corespunzătoare unei fețe;
n — numărul straturilor unei fețe;
P — forța de compresiune pe unitatea de lungime a panoului;
t — grosimea fiecărei fețe;
u, v, w — deplasările în direcțiile x, y, z;
u_0, v_0, w_0 — deplasările din planul $z = 0$;
x, y, z, — sistemul de coordonate al panoului sandwich (fig. 1);
x', y' — sistemul de coordonate corespunzător unei fibre de carbon (fig. 2);
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ — deformații de forfecare;
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — deformații de alungire după axele x, y, z;
θ — unghiul de orientare al fibrei de carbon în raport cu axa x;

K_x, K_y, K_{xy} — curburile suprafeţelor mediane ale feţelor;
$\nu_{x'y'}$ — coeficientul Poisson referitor la axele $x'y'$;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — tensiuni;
σ_{z_0} — valoarea lui σ_z la $z = 0$;
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — tensiuni de forfecare

3. ECUAŢIILE PENTRU PANOURILE CU FEŢE DIN MATERIALE COMPOZITE

3.1. ECUAŢIILE CONSTITUTIVE PENTRU FEŢE

Să considerăm unul din straturile rigidizate cu fibre de carbon orientate după aceeaşi direcţie θ (fig. 3). Axele x' şi y' vor fi orientate după direcţii paralele, respectiv perpendiculare pe direcţia fibrei.

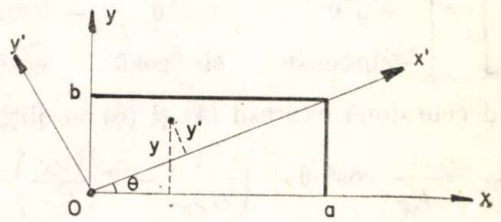


Fig. 3. — Sistemul local de coordonate $x'Oy'$ pentru feţele panoului.

Deoarece mărimile care se cunosc sînt cele referitoare la axele x', y', şi anume: $E_{x'}$; $E_{y'}$; $\nu_{x'y'}$; $G_{x'y'}$ se consideră relaţiile constituitive referitoare la aceste axe (8):

$$\{\varepsilon'\} = [E]\ \{\sigma'\}, \tag{1}$$

unde

$$|E| = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{x'}} & -\frac{\nu_{y'x'}}{E_{y'}} & 0 \\ -\frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}} & \frac{1}{E_{y'}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{x'y'}} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Fie deci, sistemul (1) scris sub forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= a'_{11}\sigma'_x + a'_{12}\sigma'_y + a'_{13}\tau'_{xy}, \\ \varepsilon'_y &= a'_{12}\sigma'_x + a'_{22}\sigma'_y + a'_{23}\tau'_{xy}, \\ \gamma'_{xy} &= a'_{13}\sigma'_x + a'_{23}\sigma'_y + a'_{33}\tau'_{xy} \end{aligned} \tag{3}$$

şi expresia energiei potenţiale, corespunzătoare sistemului de axe $x'y'$:

$$V = \frac{1}{2}\, a'_{11}\sigma'^2_x + a'_{12}\sigma'_x\sigma'_y + a'_{13}\sigma'_x\tau'_{xy} + a'_{23}\sigma'_y\tau'_{xy} + \frac{1}{2}\, a'_{22}\sigma'^2_y + \frac{1}{2}\, a'_{33}\,\tau'^2_{xy}. \tag{4}$$

Pentru noul sistem de coordonate (3) și (4) avem

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\tau_{xy}, \end{aligned} \tag{5}$$

și:

$$V = \frac{1}{2}a_{11}\sigma_x^2 + a_{12}\sigma_x\sigma_y + a_{13}\sigma_x\tau_{xy} + \frac{1}{2}\,a_{22}\sigma_y^2 + a_{23}\sigma_y\tau_{xy} + \frac{1}{2}\,a_{33}\tau_{xy} \tag{6}$$

iar relațiile de legătură dintre σ'_x, σ'_y, τ'_{xy} și σ_x, σ_y, τ_{xy} sînt:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Egalînd cele două expresii (4) și (6) se obține:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_{x'}}\cos^4\theta + \left(\frac{1}{G_{x'y'}} - 2\,\frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{E_{y'}}\sin^4\theta, \\ a_{22} &= \frac{1}{E_{x'}}\sin^4\theta + \left(\frac{1}{G_{x'y'}} - 2\,\frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{E_{y'}}\cos^4\theta, \\ a_{33} &= \frac{1}{G_{x'y'}} + \left(\frac{1+\nu_{x'y'}}{E_{x'}} + \frac{1+\nu_{x'y'}}{E_{y'}} - \frac{1}{G_{x'y'}}\right)\sin^2\theta, \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{x'y'}}{E_{x'}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\nu_{x'y'}}{E_{x'}} + \frac{1+\nu_{x'y'}}{E_{y'}} - \frac{1}{G_{x'y'}}\right)\sin^2 2\theta, \\ a_{21} &= a_{12}, \\ a_{13} &= \left[\frac{1}{E_{x'}}\cos^2\theta - \frac{1}{E_{y'}}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_{x'y'}} - \frac{2\nu_{x'y'}}{E_{x'}}\right)\cos 2\theta\right]\sin 2\theta, \\ a_{23} &= \left[\frac{1}{E_{x'}}\sin^2\theta + \left(\frac{1}{G_{x'y'}} - \frac{2\nu_{x'y'}}{E_{x'}}\right)\cos 2\theta - \frac{1}{E_{y'}}\cos^2\theta\right]\sin 2\theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Înlocuind acum mărimile a_{ij} în relațiile (5) rezultă ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{9}$$

sau

$$\{\varepsilon\} = [a]\,\{\sigma\} \tag{10}$$

şi relaţiile tensiune — deformaţie în sistemul de axe xy vor fi :

$$\{\sigma\} = [a]^{-1}\{\varepsilon\}$$

sau

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{11}$$

unde

$$[C] = [a]^{-1}.$$

Fie acum u şi v deplasările unui punct d aflat la distanţa z de suprafaţa mediană a plăcii şi w săgeata suprafeţei mediane, [3], (fig. 4).

Pentru simplificare, se introduce ipoteza, că toate punctele suprafeţei mediane se deplasează vertical ; această ipoteză este destul de aproape de realitate, atunci cînd săgeţile w sînt mici în raport cu grosimea t a plăcii şi atunci cînd suprafaţa mediană nu suferă deformaţii în planul său (întinderi sau compresiuni).

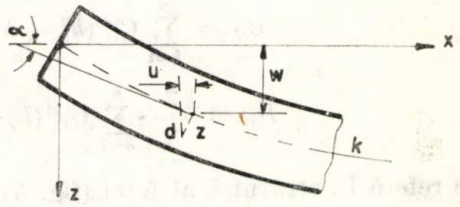


Fig. 4. — Deformaţia feţelor.

În acest caz se stabileşte uşor legătura între deplasarea u a punctului d şi săgeata w a suprafeţei mediane. Astfel :

$$u = -z \sin\alpha \simeq -z\operatorname{tg}\alpha \ (z > 0,\ \operatorname{tg}\alpha > 0,\ u < 0),$$

unde α — unghiul de înclinare al tangentei la urma OK a suprafeţei mediane, dar :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad u = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{12}$$

Dacă secţionăm placa cu un plan paralel planului yz se va găsi analog :

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{13}$$

iar deformaţiile ε_x, ε_y, γ_{xy} vor fi egale cu :

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{14}$$

Amintind, că expresiile pentru curburile suprafeţei mediane sînt [3] :

$$K_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad K_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad K_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{15}$$

se vor utiliza în continuare, ecuaţiile constitutive ale feţelor [8], [9]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

în care

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{(k)}(h_k - h_{k+1}), \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{(k)}(h_k^2 - h_{k+1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{(k)}(h_k^3 - h_{k+1}^3), \end{aligned} \tag{17}$$

unde k se referă la stratul k al feţei (fig. 5).

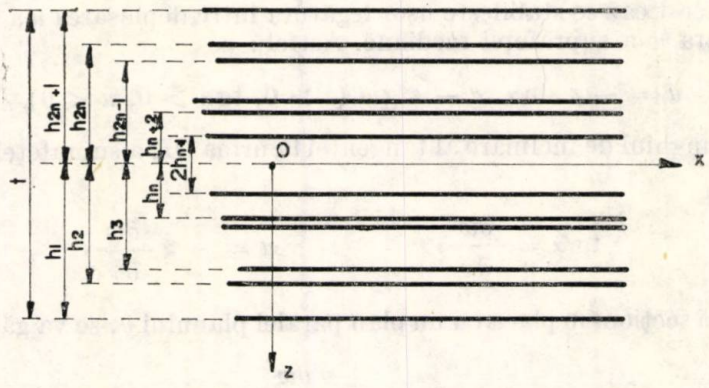


Fig. 5. — Distribuţia straturilor feţelor.

3.2. ECUAŢII CONSTITUTIVE PENTRU INIMĂ

Pearce şi Webber [8] propun următoarele relaţii tensiune-deformaţie pentru inimă.

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0; \qquad \tau_{yz} = L_{yz}\gamma_{yz}, \\ &\sigma_z = C \cdot \varepsilon_z, \qquad\qquad \tau_{xz} = L_{xz}\gamma_{xz}. \end{aligned} \tag{18}$$

Pentru a determina deplasările din inima structurii sandwich se utilizează următoarele ecuații de echilibru :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\,; \qquad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0\,; \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0\,. \tag{19}$$

Amintim că pentru inimă,

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Din (19) rezultă că τ_{xz} și τ_{yz} sînt funcții numai de x și y, deci

$$\sigma_z = -z\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) + \sigma_{z_0} \tag{20}$$

unde σ_{z_0} — valoarea lui σ_z la $z = 0$ deci funcție numai de x și y.

Cum

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{21}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

rezultă din (18) și expresiile de mai sus

$$w = w_0 + \int \varepsilon_z \,\mathrm{d}z = w_0 + \frac{1}{C}\int \sigma_z \,\mathrm{d}z = w_0 +$$

$$+ \frac{1}{C}\left[-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)\int z\mathrm{d}z + \sigma_{z_0}\cdot z\right] =$$

$$= -\frac{z^2}{2C}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) + z\,\frac{\sigma_{z_0}}{C} + w_0. \tag{22}$$

Analog,

$$u = \frac{z^3}{6C}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) - \frac{z^2}{2C}\,\frac{\partial \sigma_{z_0}}{\partial x} + z\left(\frac{\tau_{xz}}{L_{xz}} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + u_0,$$

$$v = \frac{z^3}{6C}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) - \frac{z^2}{2C}\,\frac{\partial \sigma_{z_0}}{\partial y} + z\left(\frac{\tau_{yz}}{L_{yz}} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + v_0.$$

3.3. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

Metoda prezentată în acest capitol se referă la un panou sandwich simplu rezemat pe contur și încărcat cu o forță de compresiune uniformă după direcția x.

Se consideră echilibrul unui element de panou mărginit de plane paralele cu planele de coordonate xz și yz (fig. 6).

Fie N_x, N_y foarte normale, corespunzătoare unei unități de lungime de secțiune, normală pe axa x, respectiv y.

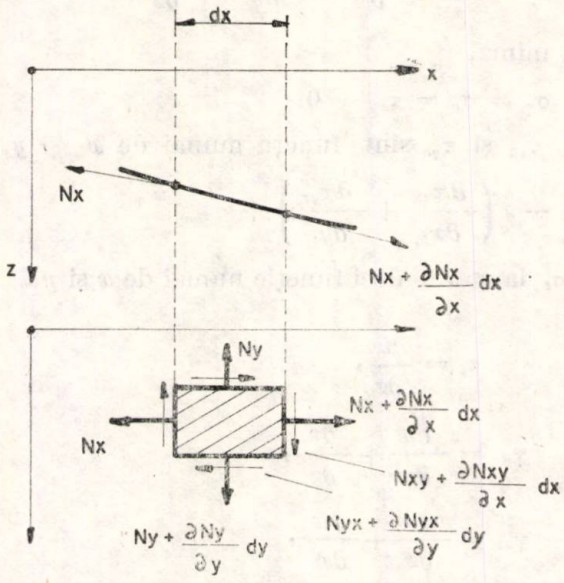


Fig. 6. — Solicitarea unui element de panou.

Ecuațiile de echilibru la $z = \pm h$ (fig. 2):

— în direcția x sînt:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \pm \tau_{xz}; \tag{23}$$

— în direcția y sînt:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \pm \tau_{yz}. \tag{24}$$

Ecuațiile (23) și (24) se vor folosi sub o formă simplificată propusă de Hemp [8] și anume adunînd și scăzînd ecuațiile feței $z = h$ și cele ale feței $z = -h$.

Se înlocuiesc apoi N_x, N_y, N_{xy} din ecuația constitutivă (16) și u, v, w din ecuațiile (22) și se obțin următoarele relații pentru echilibru în planul panoului sandwich:

$$\frac{h^2}{2C} A_1 \sigma_{z_0} + B_1 w_0 = A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2C} B_1 \chi,$$

$$\frac{h}{C} B_1 \sigma_{z_0} + h A_1 w_0 = \frac{h}{L_{xz}} \left(A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xz} - \tau_{xz} +$$

$$+ \frac{h}{L_{yz}} (A_{12} + A_{33}) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{h^3}{6C} A_1 \chi, \tag{25}$$

$$\frac{h^2}{2C} A_2 \sigma_{z_0} + B_2 w_0 = A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} +$$

$$+ (A_{12} + A_{33}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2C} B_2 \chi,$$

$$\frac{h}{C} B_2 \sigma_{z_0} + h A_2 w_0 = \frac{h}{L_{xz}} (A_{12} + A_{33}) \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \frac{h}{L_{yz}} \left(A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tau_{yz} - \tau_{yz} + \frac{h^3}{6C} A_2 \chi,$$

în care, operatorii de mai sus sînt definiți astfel :

$$A_1 = A_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (A_{12} + 2A_{33}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2},$$

$$A_2 = A_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (A_{12} + 2A_{33}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}, \tag{26}$$

$$B_1 = 3B_{13} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{23} \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$B_2 = 3B_{23} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

La ecuațiile (25) se vor adăuga ecuațiile de echilibru după o direcție normală la suprafața panoului, [8] :

$$\left(Dw + \frac{P}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{z=\pm h} \pm (\sigma_z) = \left(B_{13} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3B_{13} \frac{\partial^3 u}{\partial u^2 \partial y} + \right.$$

$$\left. + 3B_{23} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{z=\pm h} \tag{27}$$

sau adunîndu-le și scăzîndu-le se obțin ecuațiile :

$$\frac{h^2}{2C} \left(D + \frac{P}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \chi + h\chi + B_1 u_0 + B_2 v_0 =$$

$$= \left(D + \frac{P}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_0 + \frac{2h^2}{C} B \sigma_{z_0}, \tag{28}$$

$$\frac{h}{C} \left(D + \frac{P}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{z_0} + \sigma_{z_0} + 4hB_3 w_0 =$$

$$= \frac{2h^3}{3C} B_3 \chi + \frac{h}{L_{xz}} B_1 \tau_{xz} + \frac{h}{L_{yz}} B_2 \tau_{yz},$$

unde

$$B_3 = B_{13}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y} + B_{23}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y},$$

$$D = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{33})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}, \qquad (29)$$

$$\chi = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}.$$

3.4. FLAMBAJUL SIMETRIC

Pentru flambajul simetric, w trebuie să fie o funcție impară de z și cum din (22) :

$$w = -\frac{z^2}{2C}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right) + z\frac{\sigma_{z_0}}{C} + w_0,$$

rezultă că $w_0 = 0$ și $\chi = 0$ și deci

$$w = \frac{z}{C}\cdot \sigma_{z_0} \qquad (30)$$

Ecuațiile de echilibru (25) și (30) devin în ordine :

$$\frac{h^2}{2C} A_1 \sigma_{z_0} = A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{h}{C} B_1 \sigma_{z_0} = \left[\frac{h}{L_{xz}}\left(A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{33}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 1\right]\cdot \tau_{xz} +$$

$$+ \frac{h}{L_{yz}}(A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{h^2}{2C} A_2 \sigma_{z_0} = A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{h}{C} B_2 \sigma_{z_0} = \frac{h}{L_{xz}}(A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \left[\frac{h}{L_{yz}}\left(A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{33}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - 1\right]\tau_{yz}, \qquad (31)$$

$$B_1 u_0 + B_2 v_0 = \frac{2h^2}{C} B_3 \sigma_{z_0},$$

$$\left[\frac{h}{C}\left(D + \frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + 1\right]\sigma_{z_0} = \frac{h}{L_{xz}} B_1 \tau_{xz} + \frac{h}{L_{yz}} B_2 \tau_{yz}.$$

Aceste ecuații se pot simplifica pentru un număr suficient de mare de straturi [8], pentru care B_{16} și B_{26} se pot considera egali cu zero și deci ultima ecuație a sistemului devine :

$$\left(D + \frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} + \frac{C}{h}\right)\sigma_{z_0} = 0. \tag{32}$$

Panoul fiind cu laturile simplu-rezemate se vor pune următoarele condiții [3], [6] :

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pentru} \quad x = 0, \; x = a,$$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pentru} \quad y = 0, \; y = b \tag{33}$$

se alege w și deci, σ_{z_0} de forma

$$\sigma_{z_0} = K \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\cdot \tag{34}$$

Ecuația (32) devine :

$$\left[D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2\,D_{33})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \right.$$

$$\left. + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{C}{h}\right]\left(K \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot \sin\frac{\pi y}{b}\right) = 0$$

sau

$$D_{11}\frac{m^4}{a^4} + 2(D_{12} + 2\,D_{33})\frac{m^2}{a^2 b^2} + D_{22}\frac{1}{b^4} - \frac{P}{2}\frac{m^2}{a^2\pi^2} + \frac{C}{h}\frac{1}{\pi^4} = 0.$$

Se obține astfel expresia pentru valoarea critică a sarcinii P :

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2}{a^2}\left[D_{11}m^2 + 2(D_{12} + 2D_{33})\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{D_{22}}{m^2}\left(\frac{a}{b}\right)^4\right] + \frac{2Ca^2}{m^2\pi^2 h} \tag{35}$$

sau

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}D_{22}}\left[\frac{D_{11}}{D_{22}}\left(\frac{m}{c}\right)^2 + 2\,\frac{D_{12} + 2D_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}\left(D_{22} + \frac{Cb^4}{h\pi^4}\right)\right],$$

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}D_{22}}\cdot k_c(m, c), \tag{36}$$

unde k_c este coeficientul de flambaj, care depinde de raportul $\frac{c}{m}$, $c = \frac{a}{b}\cdot$

Valoarea lui m, care conduce la minimul lui P_{cr} este cea mai scurtă lungime de undă de flambaj și conduce la forța critică de wrinkling [8].

Derivînd în raport cu m relaţia (35), se obţine :

$$\frac{\partial P}{\partial m} = \frac{2\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}D_{22}}\left[2\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}\frac{m}{c^2} - \frac{2C}{m^3}\frac{1}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}\left(D_{22} + \frac{Cb^4}{h\pi^4}\right)\right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = 0 \tag{37}$$

conduce la

$$m^4 = \frac{D_{22}}{D_{11}}c^4 + \frac{Ca^4}{D_{11}h\cdot\pi 4}$$

$$m_w = \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}c^4 + \frac{Ca^4}{D_{11}h\pi^4}}, \tag{38}$$

iar forţa critică de wrinkling va fi :

$$P_{cr}^{w} = \frac{2\pi^2}{b^2}\sqrt{D_{11}D_{22}}\cdot k_c(m_w, c). \tag{39}$$

3.5. FLAMBAJUL ANTISIMETRIC

Pentru flambajul antisimetric deplasarea, w trebuie să fie o funcţie pară de z astfel că $\sigma_{z_0} = 0$ şi din (22) reiese că :

$$w = -\frac{z^2}{2C}\chi + w_0. \tag{40}$$

Ecuaţiile de echilibru devin :

$$B_1 w_0 = A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2C}B_1\chi, \tag{41}$$

$$hA_1 w_0 = \frac{h}{L_{xz}}\left(A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{33}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tau_{xz} - \tau_{xz} +$$

$$+\frac{h}{L_{yz}}(A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{h^3}{6C}A_1\chi, \tag{42}$$

$$B_2 w_0 = A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2C}B_2\chi, \tag{43}$$

$$hA_2 w_0 = \frac{h}{L_{xz}}(A_{12} + A_{33})\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} +$$

$$+\frac{h}{L_{yz}}\left(A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_{33}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tau_{yz} - \tau_{yz} + \frac{h^3}{6C}A_2\chi, \tag{44}$$

$$\frac{h^2}{2C}\left(D+\frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^3}\right)\chi+h\chi+B_1u_0+B_2v_0=\left(D+\frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w_0, \tag{45}$$

$$4hB_3w_0=\frac{2h^3}{3C}B_3\chi+\frac{h}{L_{xz}}B_1\tau_{xz}+\frac{h}{L_{yz}}B_2\tau_{yz}. \tag{46}$$

Presupunînd că $B_{13}=B_{23}=0$, prima, a treia și a cincea din ecuațiile sistemului de mai sus devin [8]:

$$A_{11}\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}+A_{33}\frac{\partial^2u_0}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{33})\frac{\partial^2v_0}{\partial x\partial y}=0, \tag{47}$$

$$A_{22}\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}+A_{33}\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{33})\frac{\partial^2u_0}{\partial x\partial y}=0, \tag{48}$$

$$\left[\frac{h^2}{2C}\left(D+\frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+h\right]\chi=\left(D+\frac{P}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w_0. \tag{49}$$

Ecuațiile (42), (44) și (49) sînt trei ecuații în trei necunoscute τ_{xz}, τ_{yz} și w_0.

Avînd în vedere presupunerile de la începutul acestui paragraf, privind flambajul antisimetric se propun pentru τ_{xz} și τ_{yz} următoarele expresii:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}&=A_1x^3+B_1y^3+C_1x^2y,\\ \tau_{yz}&=A_2x^3+C_2xy^2+B_2y^3.\end{aligned} \tag{50}$$

Se vor determina constantele A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, C_2 din condiția ca ecuațiile (42), (44), (49) să fie verificate. În ecuațiile menționate s-a ales w_0 de forma

$$w_0=W\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{51}$$

ca urmare a condiției de simplu rezemare a conturului panoului, iar pentru funcția sinus s-a utilizat o formulă de dezvoltare în serie. Se obține deci

$$w_0=W\left(\frac{m\pi x}{a}-\frac{m^3\pi^3x^3}{6a^3}\right)\left(\frac{\pi y}{b}-\frac{\pi^3y^3}{6b^3}\right). \tag{52}$$

Valorile constantelor, care apar în (50) sînt:

$$\begin{aligned}&A_1=0, \quad B_1=-WhA_{11}\frac{\pi^6m^3}{6a^3b^3}, \quad C_1=-Wh(A_{12}+2A_{33})\frac{\pi^6m^6}{2a^3b^3},\\ &A_2=-WhA_{22}\frac{\pi^6m^3}{6a^3b^3}, \quad B_2=0, \quad C_2=-Wh(A_{12}+2A_{33})\frac{\pi^6m^3}{2a^3b^3}\end{aligned} \tag{53}$$

Analizînd rezultatele obținute cu ajutorul formei (52) a lui w_0 s-a ajuns la concluzia că se obțin soluții cu o eroare de 10^{-5} pentru panourile

pătrate de dimensiuni $a = b = 90$ mm și $h = 2{,}5$ mm sau $a = b = 225$ mm și $h = 16$ mm.

Pentru a determina sarcina critică, corespunzătoare fenomenului de flambaj general se va utiliza ecuația (49) și relațiile (50) cu valorile constantelor date de (53). Se obține în final:

$$P_{cr}^{astm} = \frac{2\pi^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2} \cdot k_c, \tag{54}$$

unde

$$k_c = \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \cdot \frac{m^2}{c^2} + 2\,\frac{D_{12} + 2D_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} + \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \cdot \frac{c^2}{m^2} + 2h^2 \cdot \frac{A_{12} + 2A_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$$

și

$$c = \frac{a}{b} \cdot \tag{55}$$

Determinînd valoarea lui m, pentru care obținem minimul expresiei (55), deci calculînd rădăcinile ecuației

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial m} = 0,$$

se obține pentru: $m = \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}}$ sarcina critică de flambaj general.

4. REZULTATE NUMERICE

Valorile teoretice pentru sarcinile critice au fost obținute cu ajutorul unui program de calcul pentru un panou sandwich pătrat de latură 225 mm cu inimă fagure din aluminiu și fețe formate din cinci straturi. Proprietățile mecanice ale structurii sînt:

— *pentru un strat* prevăzut cu fibre de carbon, în raport cu sistemul de axe (x', y'), fig. 1 — 3:

$$E_{x'} = 229000 \text{ N/mm}^2, \quad E_{y'}, = 13350 \text{ N/mm}^2;$$

$$\nu_{x'y'} = 0{,}31451, \; G_{x'y'} = 5249 \text{ N/mm}^2;$$

— *pentru inimă*:

$$C = 828 \text{ N/mm}^2, \; L_{xz} = 146 \text{ N/mm}^2 \; L_{yz} = 90{,}4 \text{ N/mm}^2.$$

Variațiile sarcinii de wrinkling simetric și a sarcinii de flambaj general în raport cu t, h și C sînt prezentate în figurile 7,8 și 9 pentru $\theta = \pm 45°$.

Se observă că în primele două cazuri, sarcina critică crește odată cu creșterea lui t, în schimb, variația lui h conduce la efecte diferite în în cele două cazuri.

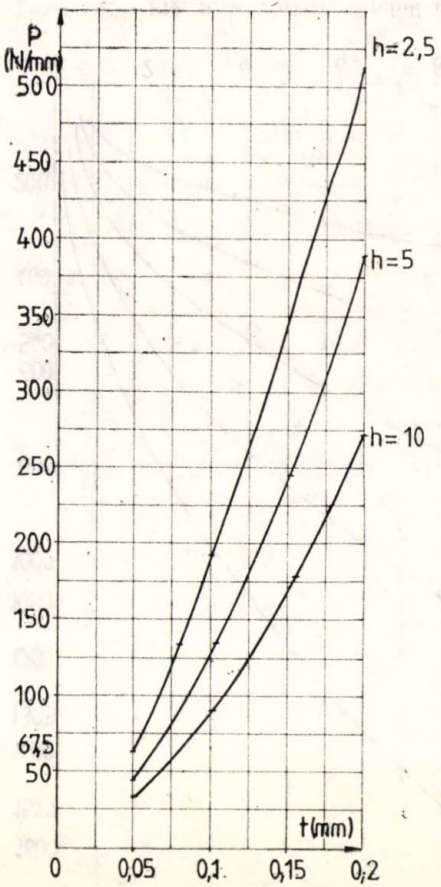


Fig. 7. — Variaţia sarcinii de wrinkling simetric (CI = = 1 000 N/mm²).

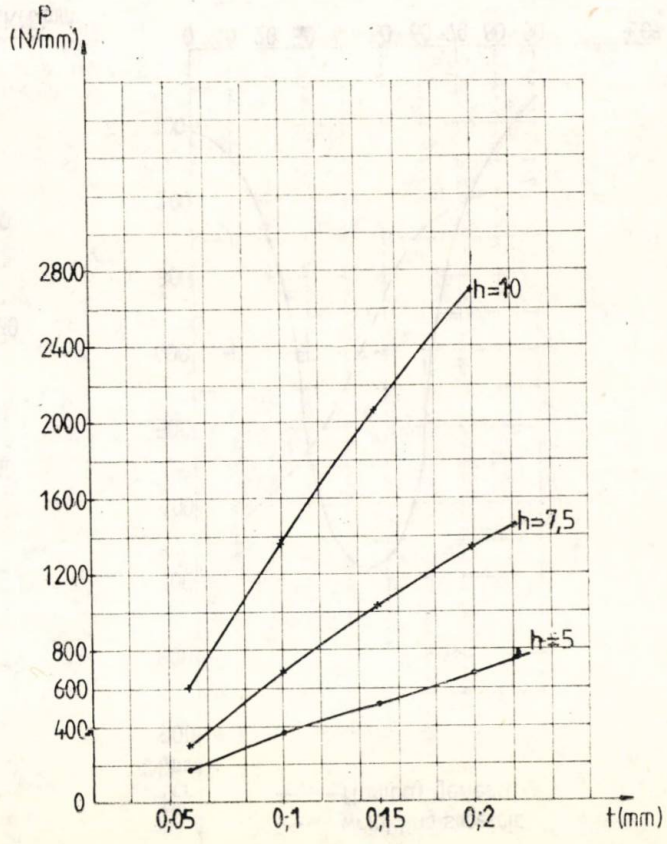


Fig. 8. — Variaţia sarcinii de flambaj general ($\theta = \pm 45°$).

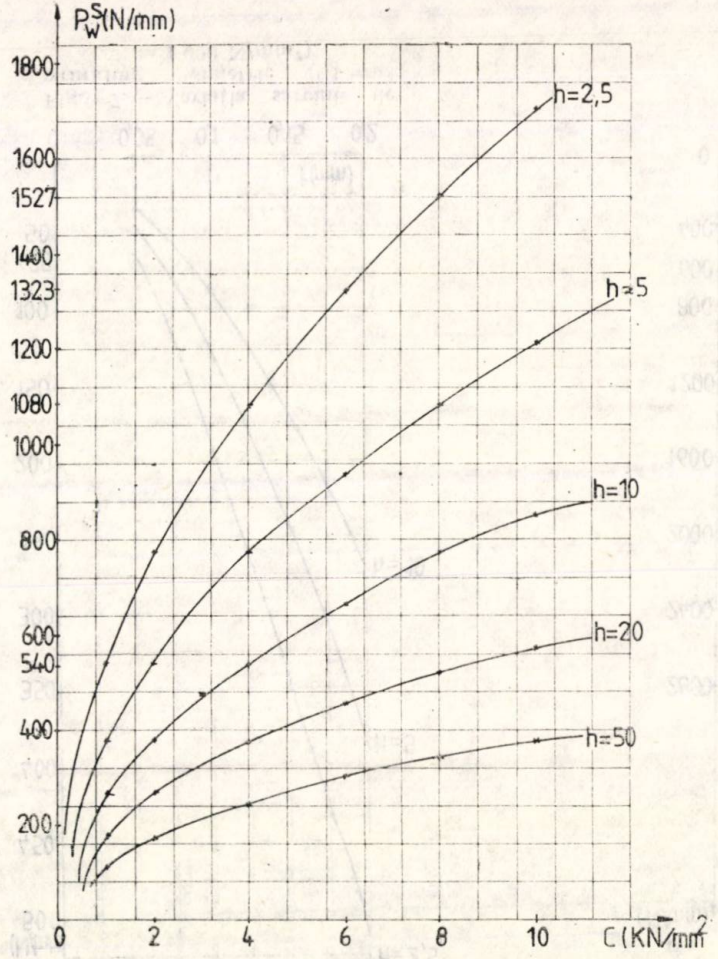


Fig. 9. — Variația sarcinii de wrinkling simetric funcție de C ($t = 0{,}2$ mm, $\theta = \pm 45°$).

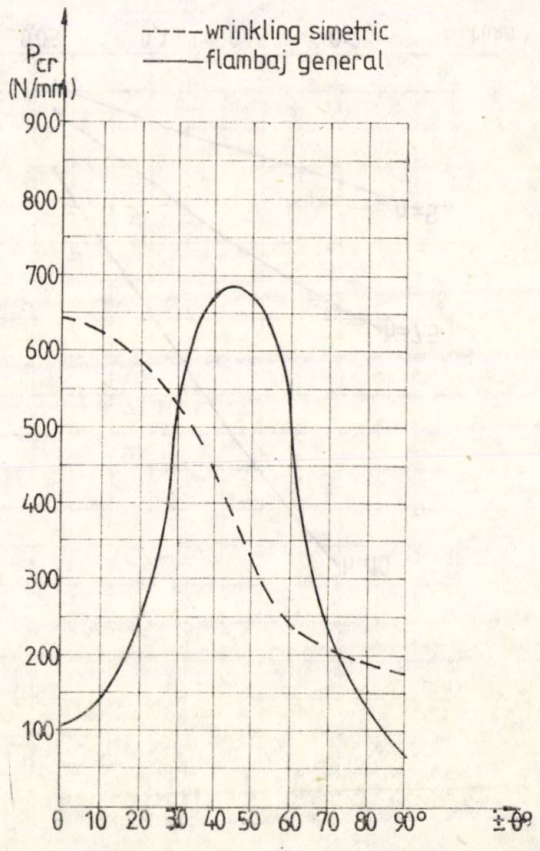


Fig. 10. — Variația sarcinii critice de wrinkling simetric și flambaj general funcție de θ.

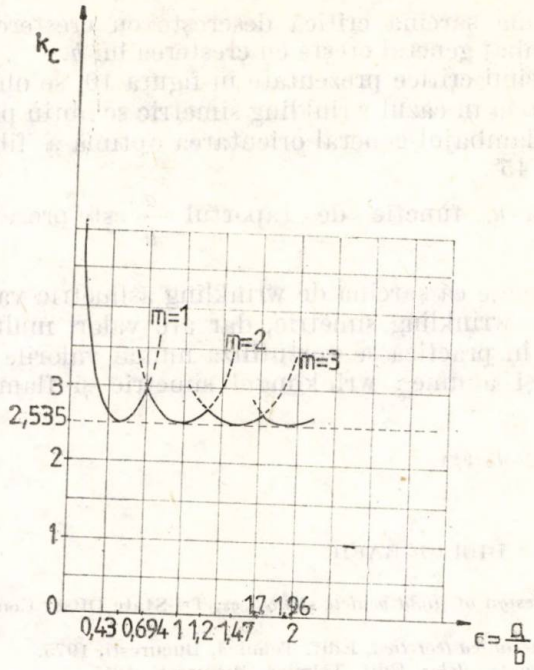


Fig. 11. — Variația coeficientului de flambaj simetric funcție de $c = \frac{a}{b}$ ($\theta = \pm 90°$).

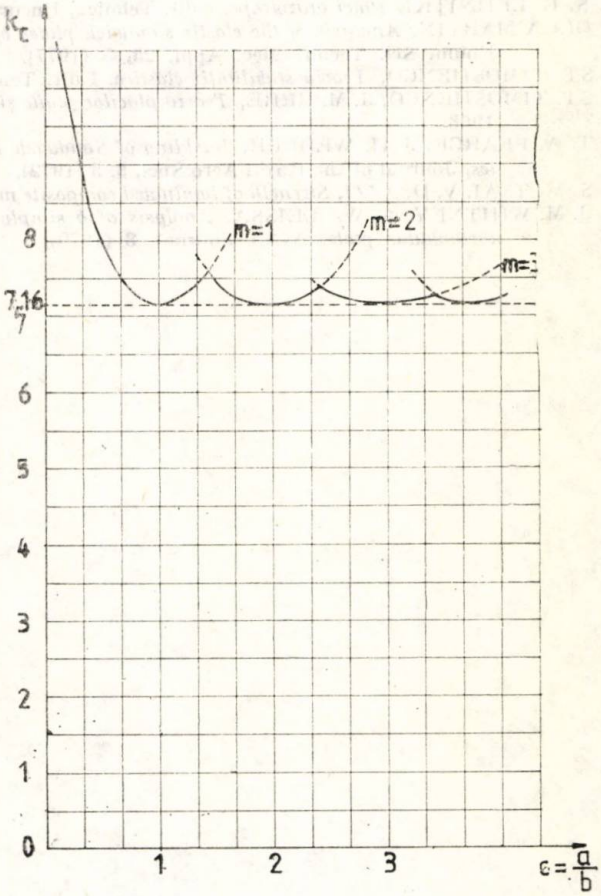


Fig. 12. — Variația coeficientului de flambaj simetric funcție de $c = \frac{a}{b}$ ($\theta = \pm 45°$).

Astfel, pentru wrinkling sarcina critică descreşte cu creşterea lui h, în timp ce sarcina de flambaj general creşte cu creşterea lui h.

Analizînd valorile sarcinii critice prezentate în figura 10, se observă că valorile maxime ale acesteia în cazul wrinkling simetric se obţin pentru $\theta = 0°$, în timp ce pentru flambajul general orientarea optimă a fibrelor corespunde unghiului $\theta = 45°$.

Variaţia coeficientului k_c funcţie de raportul $\frac{a}{b}$ este prezentată în figurile 11 şi 12.

Din lucrările [8],[9] reiese că sarcina de wrinkling asimetric variază în acelaşi mod ca şi cea de wrinkling simetric, dar are valori mult mai mari ca aceasta. De aceea, în practică se vor utiliza numai valorile forţelor prezentate anterior, şi anume : wrinklingul simetric şi flambajul general.

Primit în redacţie la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. E. F. BRUHN, *Analysis and design of flight vehicle structures*, Tri-State Offset Company, Cincinatti, 1965.
2. ŞT. BĂLAN, *Complemente de mecanică teoretică*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1975.
3. GH. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1957.
4. S. G. LEHNIŢKI, *Plăci anizotrope*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1957.
5. OLGA MARTIN, *Analysis of the elastic sandwich plates by the finite element method*, Rev. Roum. Sci. Techn—Méc. Appl, **23**, 5 (1977).
6. ST. TIMOSHENCO, *Teoria stabilităţii elastice*. Edit. Tehnică, Bucureşti, 1967.
7. ST. TIMOSHENCO, J. M. GERE, *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1968.
8. T. A. PEARCE, J. H. WEBBER, *Buckling of Sandwich Panels with Laminated Face Plates*, Journal of the Royal Aero Soc., **9**, 5 (1972).
9. S. W. TSAI, V. D. AZZI, *Strength of laminated composite materials*. AIAA Journal, **4** (1966).
10. J. M. WHITNEY, A. W. LEISSA, *Analysis of a simply supported laminated anisotropic rectangular plate*. AIAA Journal, **8** (1970).

EFECTE DE PERETE ASUPRA CURGERILOR BIDIMENSIONALE SUBSONICE

de C. DIMA

INCREST — București

Lucrarea are ca scop determinarea corecțiilor de perete (solid și perforat) în cazul curgerilor subsonice bidimensionale. Simularea numerică a curgerii prin camera de experiențe a unei suflerii în care se găsește o machetă bidimensională permite calculul distribuției de presiuni, al coeficienților de portanță și de moment. Prin comparare cu mișcarea în jurul aceluiași model, dar în curent nelimitat, se determină corecțiile respective.

INTRODUCERE

Odată cu dezvoltarea, în anii '40 ai secolului nostru a sufleriilor aerodinamice, de la cele de viteză joasă, la cele transonice și supersonice, s-a ridicat cu tot mai multă pregnanță problema proiectării aerodinamice în acest domeniu. Un aspect foarte important este cel al corecțiilor de perete, care constă în compararea rezultatelor măsurătorilor curgerii din suflerie cu cele care s-ar obține efectuînd măsurătorile în curgerea peste aceeași machetă, dar în curent nelimitat. Influența pereților sufleriei poate fi diminuată practicînd orificii (perforații sau fante) de o anumită geometrie, în pereții camerei de experiențe.

În prezenta lucrare s-au determinat corecțiile de perete simulînd numeric, cu ajutorul metodei elementului finit, curgerea în jurul unei machete bidimensionale, așezate atît în camera de experiențe a unei suflerii cu pereți solizi sau perforați, cît și în curent nelimitat.

FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Se consideră domeniul bidimensional, plan, al camerei de experiențe a unei suflerii. Frontiera acestui domeniu Ω este $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$, conform figurii 1.

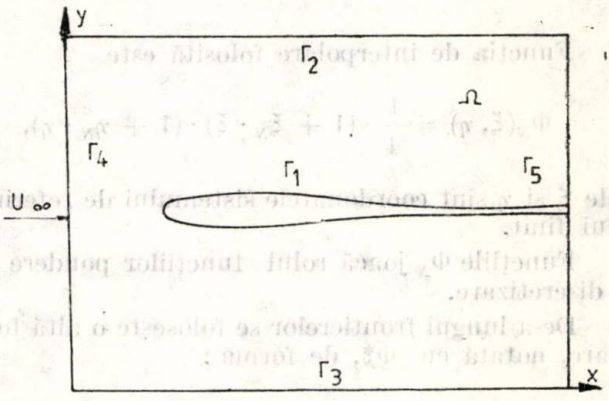


Fig. 1. — Machetă bidimensională în camera de experiență a sufleriei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 97—102

Se adoptă ipotezele curgerii staționare, subsonice, izentropice, irotaționale.

În aceste condiții, din ecuația de continuitate se obține, prin transformări succesive, ecuația completă, neliniară, a potențialului de viteze :

$$\left(1+\frac{\chi-1}{2}M_\infty^2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{a_\infty^2}\cdot\frac{\chi+1}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{a_\infty^2}\cdot\frac{\chi-1}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{2}{a_\infty^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0.$$

Ecuația a fost discretizată cu procedeul Galerkin, folosind elemente finite izoparametrice patrulatere, cum este cel din figura 2.

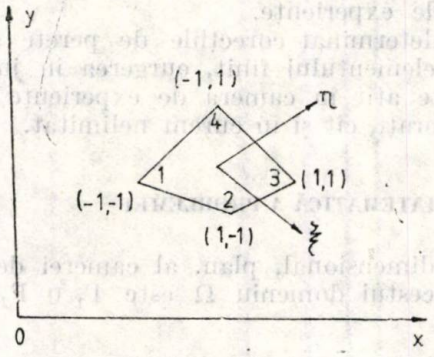


Fig. 2. — Element finit izoparametric patrulater.

Funcția de interpolare folosită este

$$\Phi_N(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\cdot(1+\xi_N\cdot\xi)\cdot(1+\eta_N\cdot\eta),\qquad N=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

unde ξ și η sînt coordonatele sistemului de referință local, atașat elementului finit.

Funcțiile Φ_N joacă rolul funcțiilor pondere din procedeul Galerkin de discretizare.

De-a lungul frontierelor se folosește o altă formă a funcției de interpolare, notată cu Φ_N^*, de forma :

$$\Phi_1^*=1-\frac{s}{l};\ \Phi_2^*=\frac{s}{l},$$

unde s este coordonata curbilinie de-a lungul frontierei, între nodurile 1 și 2, conform figurii 3. Metoda este deci de tip hibrid, ceea ce duce la relaxarea cerințelor de continuitate a aproximațiilor variabilei, la limita dintre elemente.

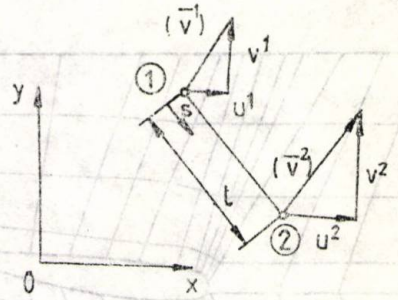


Fig. 3. — Interpolarea pe frontiera domeniului.

În final, ecuația neliniară a potențialului, discretizată, se scrie, matriceal :

$$A_{NM} \cdot \varphi_M = G_{NMPQ} \cdot \varphi_M \cdot \varphi_P \cdot \varphi_Q + F_N, \quad M, N, P, Q = 1, 2, 3, 4$$

sau, iterativ, pentru ecuația globală liniarizată :

$$A_{IJ} \cdot \varphi_J^{(n+1)} = G_{IJKL} \cdot \varphi_J^{(n)} \cdot \varphi_K^{(n)} \cdot \varphi_L^{(n)} + F_I^{(n)}.$$

Pentru prima iterație, se consideră $G_{IJKL} = 0$, rezolvîndu-se așadar, cazul incompresibil.

Punerea condițiilor la limită este facilitată de faptul că toate calculele se fac în planul fizic. Viteza din amonte este folosită ca viteză de referință, iar cea din aval este determinată de condițiile la perete. Astfel, pe frontiera din aval Γ_5 se obține, din conservarea masei,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_\infty + \delta u,$$

unde

$$\delta u = \frac{1}{\rho_{av} \cdot l_{av}} \cdot \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \rho \cdot V_n \cdot \mathrm{d}s + \frac{\rho_\infty - \rho_{av}}{\rho_{av}} \cdot U_\infty$$

Aici l_{av} este înălțimea secțiunii transversale din aval, iar ρ_{av} este densitatea la frontiera din aval, calculată cu formula :

$$\rho_{av} = \rho_\infty \cdot \left[1 + \frac{\chi - 1}{2} \cdot M_\infty^2 \cdot \left(1 - \frac{q^2}{U_\infty^2}\right)\right]^{\frac{1}{1-\chi}},$$

$$q^2 = U^2 + V^2.$$

Viteza normală la pereții perforați $\left(V_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$ se calculează din legea lui Darcy :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = U_\infty.$$

Se consideră că, pentru incidențele pozitive ale modelului, factorul de porozitate R ia valorile 1,5 în cazul peretelui superior și 0,5 în cazul peretelui inferior. Ipoteza valorilor diferite ale lui R are la bază faptul că vitezele de curgere prin perforații au sensuri deosebite, în cazul celor doi pereți.

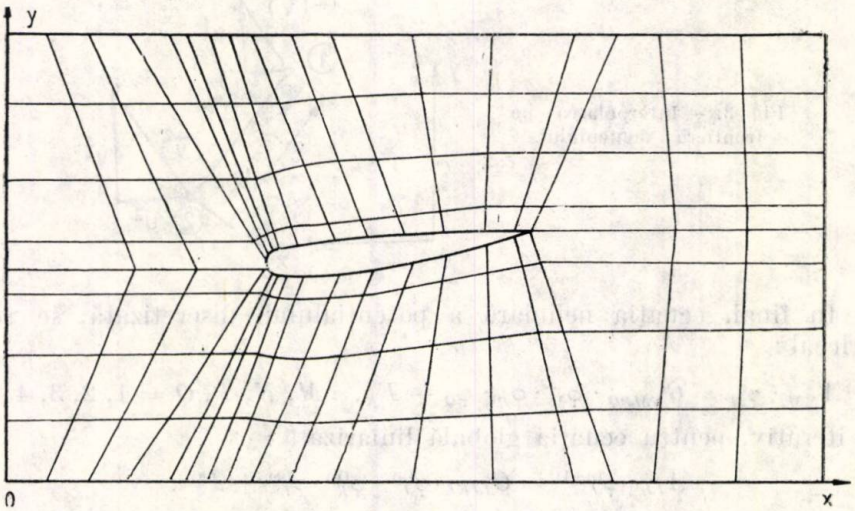


Fig. 4. — Discretizarea domeniului de studiu în elemente finite.

Pentru discretizarea domeniului Ω în elemente finite s-a aplicat un procedeu de generare automată a rețelei care ține cont de poziția punctelor fixe de pe frontieră (perforații, prize de presiune, coordonate ale machetei). Figura 4 ilustrează rețeaua de element finit generată în jurul modelului plasat la o incidență negativă.

Pentru determinarea corecțiilor, se calculează atît curgerea între pereți, cu condițiile la limită de mai sus, cît și curgerea în curent nelimitat. În acest sens, se folosește aceeași rețea de element finit, condițiile la limită fiind însă cele rezultate din înlocuirea profilului cu o distribuție de surse (pentru efectul grosimii) și cu un vîrtej (pentru efectul scheletului). Diferența $\Delta\varphi$ a potențialelor nodale din cele două cazuri, permite calculul corecțiilor de număr Mach și de incidență :

$$\Delta M = \left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right) \cdot M \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x},$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial y},$$

derivatele fiind calculate în centrul camerei de experiențe.

REZULTATE, CONCLUZII

Programul de element finit a fost rulat în cazul curgerii peste un profil NACA 0012, așezat la o incidență de 5°. Figura 5 ilustrează distribuția de presiuni pe profil la curgere incompresibilă în prezența pereților

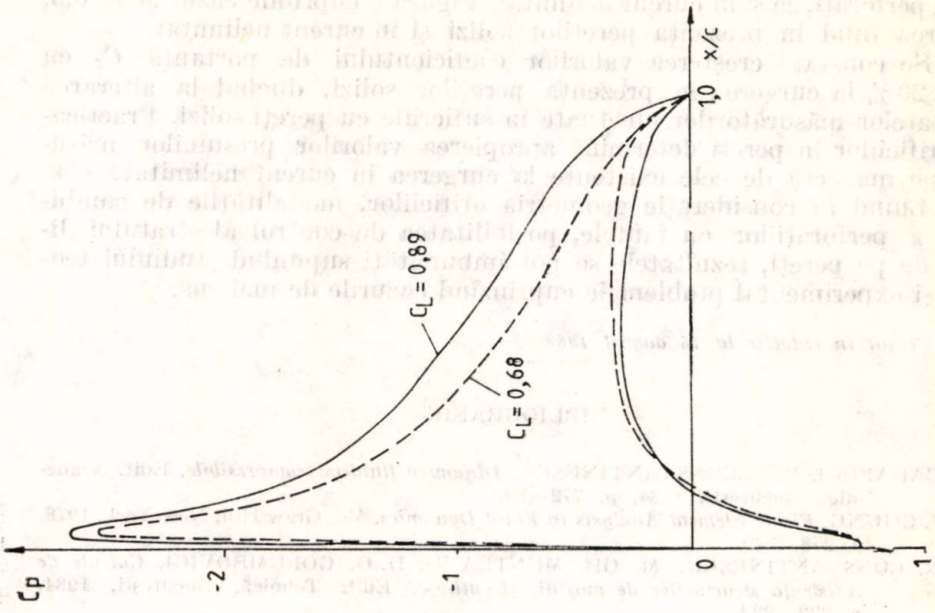


Fig 6. — Profil NACA 0012 la incidența 5°, curgere la $M = 0,5$ (—) pereți solizi; (— — —) curent nelimitat.

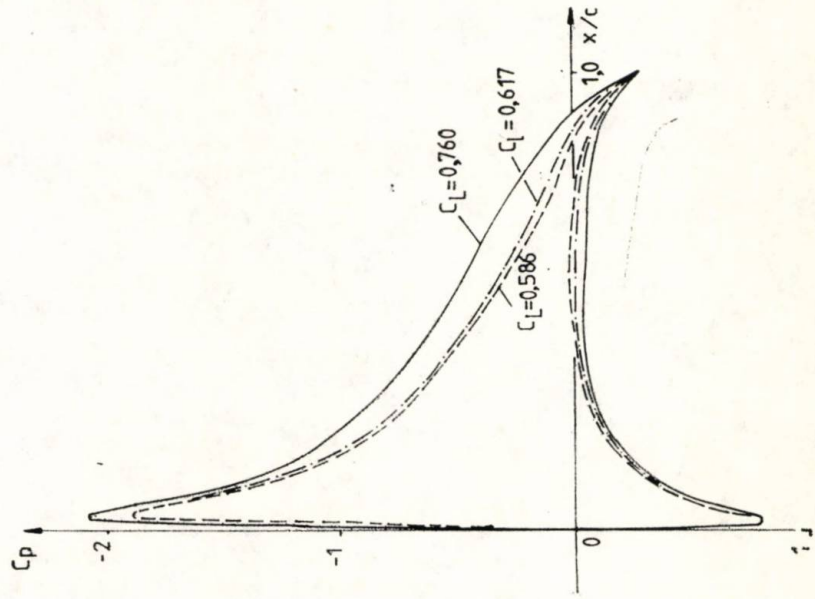


Fig. 5. — Profil NACA 0012 la incidența 5°, cugere incompresibilă (—) pereți solizi; (—.—) pereți perforați; (— — —) curent nelimitat

solizi, perforați, ca și în curent nelimitat. Figura 6 cuprinde cazul $M = 0{,}5$, curgerea fiind în prezența pereților solizi și în curent nelimitat.

Se constată creșterea valorilor coeficientului de portanță C_L cu peste 20% la curgerea în prezența pereților solizi, ducînd la alterarea rezultatelor măsurătorilor efectuate în sufleriile cu pereți solizi. Practicarea orificiilor în pereți determină apropierea valorilor presiunilor măsurate pe machetă de cele existente la curgerea în curent nelimitat.

Luînd în considerație geometria orificiilor, modalitățile de combinare a perforațiilor cu fantele, posibilitatea de control al stratului limită de pe pereți, rezultatele se pot îmbunătăți supunînd studiului teoretic și experimental problemele cuprinzînd cazurile de mai sus.

Primit în redacție la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, *Dinamica fluidelor compresibile*, Edit. Academiei, București, 1984, p. 772—800.
2. T. J. CHUNG, *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, Mc. Graw Hill, New-York, 1978, p. 278—280.
3. I. N. CONSTANTINESCU, M. GH. MUNTEANU, D. G. GOLUMBOVICI, *Calcule de rezistența structurilor de mașini și utilaje*, Edit. Tehnică, București, 1984, p. 222—234.
4. C. DIMA, M. MOISOIU, *Efecte de perete asupra curgerilor bidimensionale subsonice*, Raport INCREST, cod N—6569, București, 1986.
5. C. DIMA, A. DUMITRACHE, *Efecte viscoase în interacțiunea model-perete, cu aplicație la curgerile bidimensionale subsonice*, Raport INCREST, cod N—7843, București, 1987.
6. B. H. GOETHERT, *Transonic Wind Tunnel Testing*, Pergamon Press, New-York, 1961.
7. J. E. MERCER, E. W. GELLER, M. L. JOHNSON, A. JAMESON, *Transonic Flow Calculations for a Wing in a Wind Tunnel*, Journal of Aircraft, **18**, 9 (1981).

METODA DE DETERMINARE EXPERIMENTALĂ A CARACTERISTICILOR DE VIBRAȚII ALE UNEI PALE ÎN ROTAȚIE

de E. ȚURLEA

Institutul de Aviație — București

Scopul articolului este de a prezenta o metodologie simplă de măsurare a vibrațiilor pe palele unei elice în rotație cu ajutorul mărcilor tensometrice, felul cum semnalul rezultat poate fi prelucrat și interpretat. Rezultatele prezentate sînt bazate pe experiența cîștigată pe parcursul efectuării unor experimentări de acest tip, punîndu-se accentul pe dificultățile întîlnite și modul cum au fost rezolvate.

1. INTRODUCERE

Unul din dezavantajele majore ale utilizării elicelor în construcția aeronavelor este nivelul ridicat de vibrații pe care acestea le pot induce în structura aeronavei. Aceste vibrații pot fi datorate mai multor factori, principalul fiind prezența „masei" în mișcare, respectiv elicea, reductorul și motorul [1].

Nivelul acestor vibrații poate fi cu greu prezis prin calcule teoretice, fenomenul producerii acestora fiind foarte dificil de implementat pe un model matematic de calcul : ușor dezechilibru static sau dinamic, ușoare asimetrii, nealinieri sau excentricități în constucție sau montaj, neliniarități, jocuri, turbulență atmosferică, prezența roților dințate din reductor etc. [2].

Din aceste motive este de dorit determinarea experimentală a nivelelor de vibrații pe o pală în rotație cît mai din timp în procesul de omologare a unei elice astfel încît să se poată lua decizii oportune privind reducerea nivelului general de vibrații pe aeronava pe care aceasta urmează să funcționeze (respectiv eliminarea unor frecvențe excitatoare datorate cauzelor enumerate mai sus, micșorarea amplitudinilor, schimbarea valorilor frecvențelor excitatoare, prin modificări constructive sau de turații nominale etc.).

Măsurarea vibrațiilor pe o pală în rotație este foarte dificilă datorită forțelor centrifuge mari ce apar precum și a cerințelor privind aerodinamica palei. Aceasta face aproape imposibilă utilizarea unor traductori de tipul accelerometrilor, chiar și de dimensiuni minuscule. Singurul fel de a măsura nivelul de vibrații este cu ajutorul unor mărci tensometrice lipite pe structură a căror masă este neglijabilă și care nici nu modifică aerodinamica palei. Se remarcă faptul că răspunsul unei mărci în frecvență este foarte bun (>100 kHz) singura problemă fiind amplitudinea semnalului la frecvențe ridicate [3, 4, 5].

În continuare sînt prezentate aspecte referitoare la încercările de vibrații efectuate pe palele unei elice în rotație cu ajutorul unor mărci tensometrice lipite pe structură.

2. CONDIȚII DE INSTRUMENTARE ȘI EFECTUARE A ÎNCERCĂRILOR

Pe două pale diametral opuse s-a stabilit un număr optim de secțiuni pe care s-au lipit pe intrados și extrados un număr de mărci tensometrice simple și rozete, dispuse în principal pe direcțiile longitudinale și trans-

versale, conform rezultatelor teoretice obținute pe modelul de element finit. Cablajul s-a realizat cu sîrmă de bobinaj de cupru email de Ø 0,2 mm direcționate de-a lungul corzilor spre bordul de fugă și respectiv spre butucul palei. Pentru a elimina efectul umidității atmosferice care ar putea reduce valoarea rezistenței la masă a mărcilor tensometrice, mărcile și sîrma au fost acoperite ca primă protecție cu lac de bobinaj și după aceea cu cauciuc siliconic. După realizarea acestor operații, palele și respectiv elicea au fost reechilibrate static și dinamic.

Pentru culegerea semnalelor s-a utilizat un colector cu perii special tip Höttinger SK12 cu 12 canale utilizabil la turații mari (pînă la 6 000 turații/min). Semnalele au fost transmise prin intermediul unui cablu la o punte tensometrică cu 12 canale și înregistrate magnetic.

S-a evitat efectuarea încercărilor pe vreme umedă, de ploaie sau ninsoare sau temperaturi excesive. S-a remarcat faptul că deși s-au luat măsuri de izolare a mărcilor, rezistența la masă era mai scăzută în zilele cu umiditate foarte mare. În acest sens nu s-au efectuat măsurători decît atunci cînd rezistența la masă a depășit 500 kΩ [5].

S-au făcut încercări la mai multe turații cuprinse între aproximativ 400 și 1 200 rot/min și diverși pași ai elicei. Pe parcursul unei măsurători s-a indicat menținerea turației motorului constantă după care s-a trecut la o nouă turație, pas sau grupă de mărci.

3. PRELUCRAREA REZULTATELOR ȘI INTERPRETAREA ACESTORA

Pentru cazurile menționate în paragraful precedent s-au citit valorile furnizate de mărcile tensometrice cu ajutorul punții IEMI concomitent cu înregistrarea magnetică a semnalelor. În figura 1 este prezentată schema bloc a aparaturii de înregistrare și prelucrare a datelor. Considerîndu-se de interes frecvențele sub 250 Hz s-a folosit un filtru „trece jos" cu frecvența de tăiere 250 Hz, utilizîndu-se în analiza pe calculator semnale lungi de 1 024 valori eșantionate cu frecvența de eșantionare de 500 Hz. Aceste valori au fost cuprinse într-un program de prelucrare a datelor scris în limbaj BASIC, atît lungimea semnalului, cît și frecvența de eșantionare putînd fi modificate funcție de cerințe (pînă la 16 384 eșantioane, frecvență de eșantionare pînă la 25 kHz) [6].

Pentru determinarea valorii constante a tensiunii s-a calculat mai întîi :

$$\sigma_{med} = E\varepsilon = E\frac{c}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

unde ε reprezintă deformația în $\mu\varepsilon$; x_i — valoarea semnalului eșantionat (eșantionul i); c — factorul de calibrare în $\mu\varepsilon$; N — numărul total de eșantioane.

Se remarcă faptul că valoarea medie obținută prin această metodă a fost practic identică cu cea citită pe puntea IEMI (diferențele fiind mai mici de 0,1%). Pentru trei rozete plasate pe aceeași secțiune, graficul tensiunilor (valori medii) pentru diverse turații este reprezentat în figura 2 pentru direcția transversală, în figura 3 pentru direcția longitudinală și în figura 4 pentru direcția la 45°.

Prin aplicarea transformatei Fourier unui semnal furnizat de fiecare marcă (prezentat spre exemplificare în figura 5, 1 024 eșantioane din semnalul unei mărci) se obțin frecvențele predominante ce apar în zona respectivă pe pală, figura 6, în domeniul 0—250 Hz, respectiv figura 7 pe un domeniu de frecvențe restrîns 0—50 Hz.

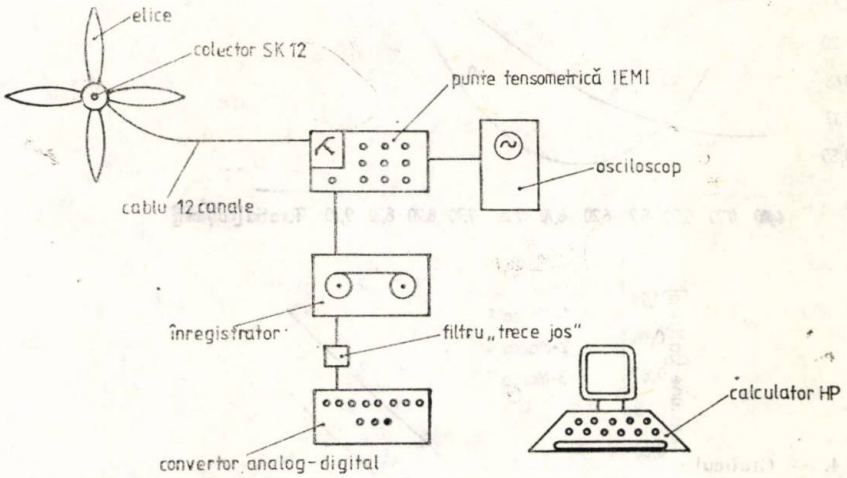


Fig. 1. — Schema bloc a aparaturii de înregistrare și prelucrarea datelor.

Din analiza rezultatelor obținute rezultă că frecvențele predominante reprezintă, așa cum era de așteptat, multiplii frecvenței de rotație, amplitudinea semnalului fiind funcție de poziția mărcii (nod sau ventru) și de turație. Date fiind amplitudinile determinate pentru fiecare marcă se poate defini și forma modală a fiecărui mod determinat. Se remarcă

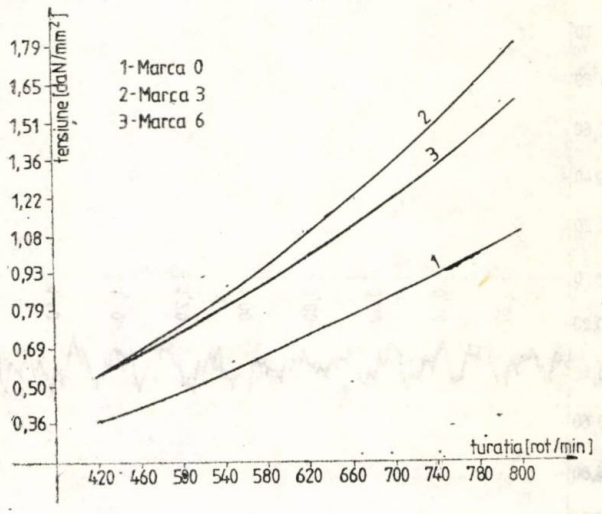


Fig. 2. — Graficul tensiunilor pe direcția transversală.

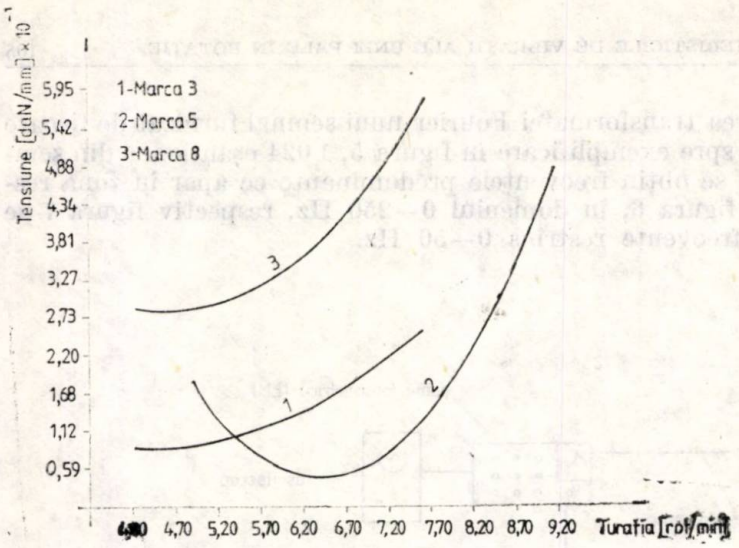


Fig. 3. — Graficul tensiunilor pe direcția longitudinală.

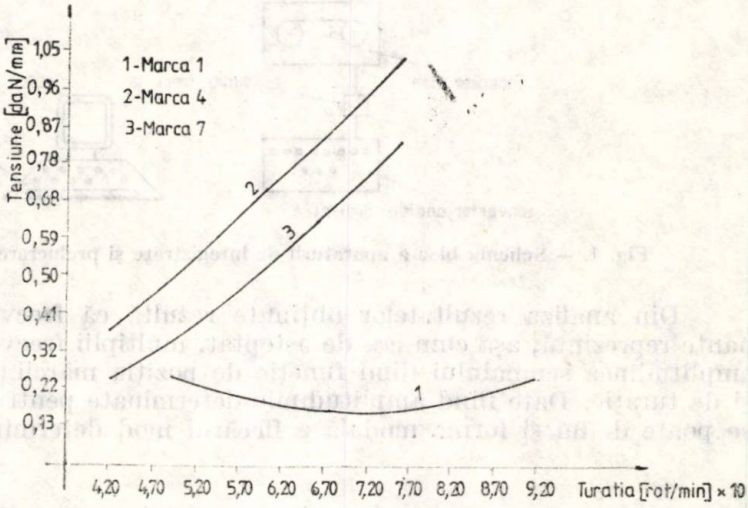


Fig. 4. — Graficul tensiunilor pe direcția 45° la direcția transversală.

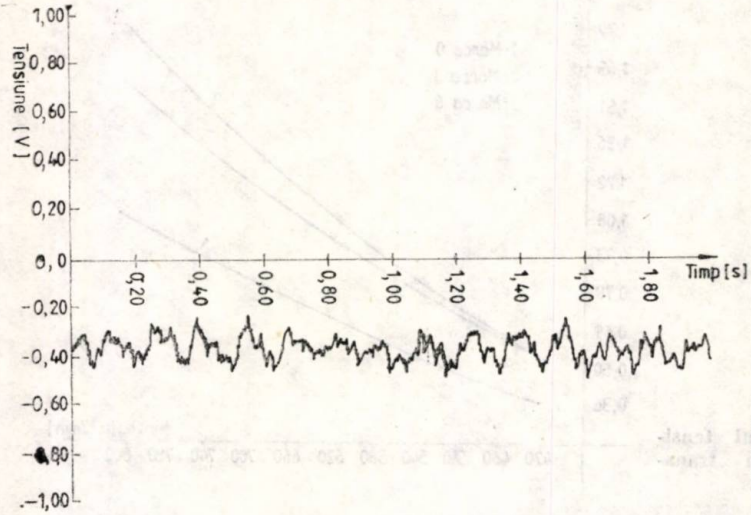


Fig. 5. — Graficul semnalului mărcii 18, turația 433 rot/min, $f_e = 500$ Hz.

faptul că, așa cum era de așteptat, modurile de frecvențe mari sînt mai greu detectabile datorită valorilor mici ale tensiunilor induse în structură față de tensiunile constante datorate forțelor aerodinamice și centrifuge.

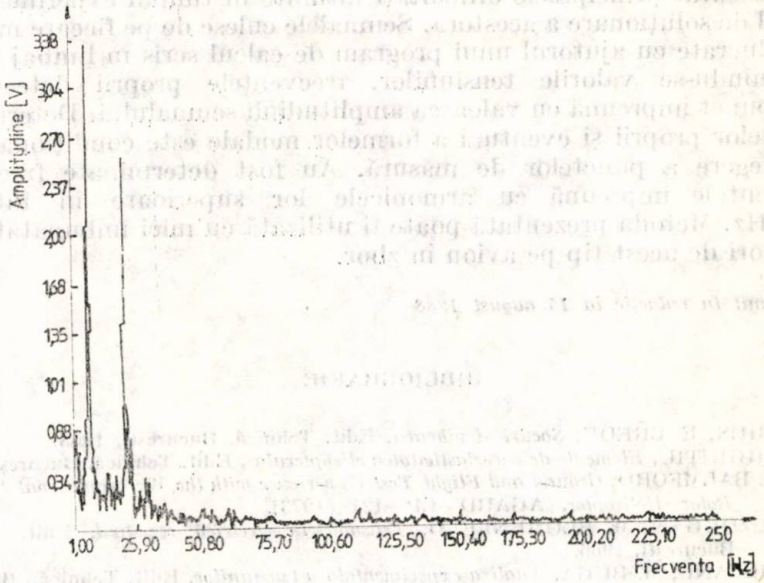


Fig. 6. — Transformata Fourier a semnalului mărcii A în domeniul 0—250 Hz.

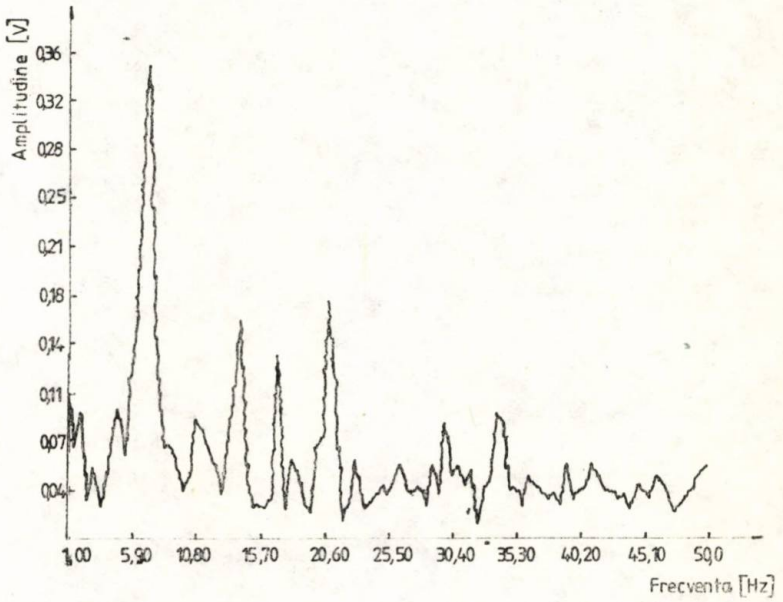


Fig. 7. — Transformata Fourier a semnalului mărcii B în domeniul 0—50 Hz.

4. CONCLUZII

În lucrare a fost prezentată o metodă relativ simplă de determinare a stării de tensiuni într-o pală în rotație cu ajutorul mărcilor tensometrice. S-au prezentat principalele dificultăți întîlnite în timpul experimentărilor și modul de soluționare a acestora. Semnalele culese de pe fiecare marcă au fost prelucrate cu ajutorul unui program de calcul scris în limbaj BASIC determinîndu-se valorile tensiunilor, frecvențele proprii detectate în fiecare punct împreună cu valoarea amplitudinii semnalului. Determinarea frecvențelor proprii și eventual a formelor modale este condiționată de o bună alegere a punctelor de măsură. Au fost determinate frecvențele fundamentale împreună cu armonicele lor superioare în intervalul 0—250 Hz. Metoda prezentată poate fi utilizată cu mici îmbunătățiri și la măsurători de acest tip pe avion în zbor.

Primit în redacție la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. HARRIS, E. CREDE, *Șocuri și vibrații*, Edit. Tehnică, București, 1968.
2. V. GIURGIUȚIU, *Elemente de aeroelasticitatea elicopterului*, Edit. Tehnică, București, 1982.
3. D. E. H. BALMFORD, *Ground and Flight Test Experience with the Wertland Scout Hingeless Rotor Helicopter*, AGARD—CP—121 (1973).
4. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, Edit. Tehnică, București, 1966.
5. D. R. MOCANU, M. BUGA, *Analiza experimentală a tensiunilor*, Edit. Tehnică, București, 1976.
6. J. S. BENDAT, A. G. PIERSOL, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1980.

STUDIU TEORETIC ASUPRA CARACTERISTICILOR AERODINAMICE ALE UNUI SISTEM DE HIPERSUSTENTAȚIE DE TIP FOWLER. EFECTUL SUFLĂRII VOLETULUI CU FANTĂ ȘI RECUL

de ȘT. BOGOS

INCREST, București

În această lucrare este prezentat un studiu teoretic referitor la determinarea caracteristicilor aerodinamice ale unui sistem de hipersustentație de tip Fowler, analizîndu-se și condițiile de suflaj de extrados peste voletul bracat.
S-a studiat mișcarea potențială în regim incompresibil staționar folosind „metoda singularităților" în cazul zborului simetric. Extinderea pentru regimul compresibil se poate face cu ușurință folosind transformarea Prandtl-Glauert.

1. NOTAȚII. SIMBOLURI

A reprezintă alungirea aripii;
b — anvergura aripii;
b' — anvergura porțiunii suflate;
c, c_f — coarda aripii;
c_r — coarda la încastrare;
c_j — coeficientul de jet;
$\vec{F}_i$ — forța care acționează asupra vîrtejului legat din jet;
$m_j \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \frac{1}{\text{m}}\right]$ — debitul secțional al jetului;
V_∞ — viteza curentului neperturbat;
V_j — viteza jetului;
V_t — viteza tangențială;
$Oxyz$ — sistemul de referință;
y_F — semianvergura dîrei;
α — unghiul de incidență;
δ — unghiul inițial al jetului;
ε — unghiul de deflexie;
γ, $\overline{\gamma}$ — circulația în dîră (adimensionalizată);
Γ, $\overline{\Gamma}$ — circulația pe aripă, flaps (adimensionalizată);
θ, θ_i — unghiul local de deflexie al dîrei față de V_∞;
e_r, e_t — versorii locali (radial și tangențial) pentru dîră;
ρ — densitatea;
u, v, w — componentele vitezei de perturbație, indusă de sistemul de vîrtejuri.

2. CONSIDERAȚII GENERALE

În perioada actuală se manifestă un interes crescut în aviație pentru avioanele de tip STOL, cu distanțe mici de decolare și aterizare.

Metoda suflajului sistemului de hipersustentație dă posibilitatea obținerii unor coeficienți de portanță mari în fazele de decolare și aterizare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 109—118

Suflajul pe extradosul sistemului de hipersustentație este o schemă derivată din metoda clasică de suflaj prin fantă și, în general, utilizează jetul motoarelor montate deasupra aripii ca sursă de debit de aer suflat (fig. 1).

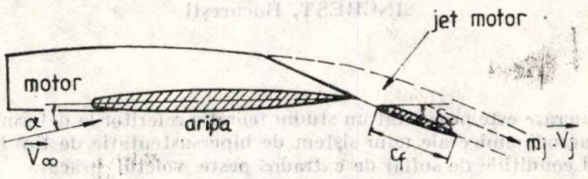


Fig. 1

Deoarece în fazele de zbor la mică viteză apar probleme deosebite din punct de vedere al stabilității și controlabilității avionului, este necesar să se analizeze și spectrul de viteze induse în jurul suprafețelor de comandă primare. Unghiurile mari de deflexie pe ampenajul orizontal datorate prezenței flapsului și jetului pot cauza scăderea spectaculoasă a eficacității ampenajului orizontal și, deci, condiții periculoase de zbor.

3. MODELUL DE CALCUL

3.1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

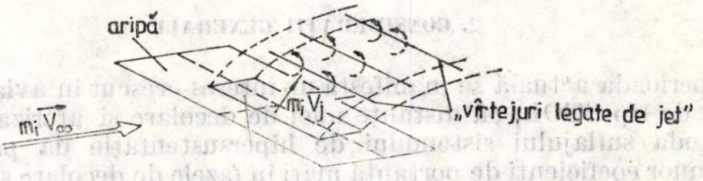
În literatura de specialitate există lucrări care se ocupă de mult timp cu analiza sistemului de hipersustentație suflat, atît experimental, cît și teoretic [1], [2], [6].

În general, rezultatele experimentale au permis cercetătorilor (vezi [1]) realizarea unui model teoretic care să simuleze efectul prezenței jetului în curentul neperturbat și modificarea traiectoriei acestuia în avalul aripii.

Faptul că jetul pătrunde cu un unghi de incidență în curentul neperturbat face ca impulsul său $(m_j \vec{V}_j)$ să se modifice, ca direcție, datorită impulsului curentului de la infinit $(m_i \vec{V}_\infty)$, tinzînd să se alinieze direcției acestuia. Această variație de impuls a jetului se regăsește în forța exterioară care curbează jetul respectînd teorema impulsului (1).

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F}_{ext}. \tag{1}$$

Modelul propus în [1] presupune că suportul forței exterioare $\vec{F}_{ext}$ îl reprezintă apariția unor „vîrtejuri legate de jet", similare ca direcție și efect cu așa-numitele „vîrtejuri legate" de pe aripă (fig. 2).



Aceste „*vîrtejuri legate de jet*" determină, pentru o configurație de hipersustentație suflată, o creștere de circulație denumită „*supercirculație*". Pentru un jet de lățime finită în anvergură, formarea „*vîrtejurilor legate de jet*" impune formarea unor „*vîrtejuri libere de jet*" ce se închid la infinit aval (teorema lui Kelvin). Acest efect este similar cu apariția „*vîrtejurilor libere*" pentru aripa de anvergură finită.

Problema bidimensională pentru „aripă + flaps suflat" a fost tratată analitic cu rezultate remarcabile încă din 1957 de către D. Küchemann în [6]. În ultimii 15 ani, datorită calculatoarelor de mare viteză mulți cercetători au abordat numeric această problemă. Pe lîngă alte avantaje, tratarea numerică permite determinarea iterativă a geometriei „*pînzei de vîrtejuri din jet*", similară cu cea din cazul real, în prezența curentului de la infinit ($\vec{V}_\infty$).

Folosind panouri de vîrtejuri sau potcoave de vîrtejuri, care reprezintă soluții particulare ale ecuației potențialului, multe modele numerice au permis determinarea satisfăcătoare a efectelor jetului asupra portanței și momentului aripii, ca și a distribuției de presiuni și viteze atît pe aripa, cît și în avalul acesteia.

Pentru aceste cazuri, în general, *deformarea jetului în anvergură este neglijată*, curbura jetului din secțiunea centrală fiind considerată aceeași în anvergură.

3.2. DESCRIEREA MATEMATICĂ A MODELULUI

Rezolvarea problemei implică determinarea unei funcții scalare armonice Φ, ca o soluție a ecuației potențialului (2), cu condiții la limită impuse,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{2}$$

Condițiile la limită specifice acestei probleme sînt de două feluri:

1) *Condițiile la limită de frontieră* (cinematice), care impun ca curgerea să fie tangentă pe suprafața corpului, viteza normală în secțiunea centrală a dîrei să fie zero și anularea perturbațiilor la mari distanțe:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}=0, \text{ pe suprafața corpului,}\\ &\vec{V}_n/_{\text{dîră pt. } y=0}=0,\\ &\Phi_\infty=\Phi_0.\end{aligned} \tag{3}$$

2) *Condiții la limită dinamice*: care impun respectarea teoremei impulsului în dîră:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{H}_{jet})=\vec{F}_{ext}. \tag{4}$$

Ecuația (2) fiind valabilă pentru funcții armonice, aceasta înseamnă că se poate înlocui funcția Φ cu una din funcțiile c_p, u, v sau w pe care căutăm să le determinăm în continuare.

Pentru rezolvarea ecuației (2), cu condițiile la limită (3) și (4), s-a ales o soluție particulară de tip *„potcoavă de vîrtej"* care simulează corect caracterul portant al fenomenului fizic.

3.3. REZOLVAREA PROBLEMEI

Ideea de bază constă în aproximarea ecuației integrale (2) cu condițiile (3) și (4) printr-un sistem de ecuații algebrice liniare, folosind o soluție particulară impusă, (vezi și [5]).

3.3.1. Combinația Aripă + Flaps, fără suflaj

Simularea efectului portant al configurației aripă + flaps se realizează printr-un sistem propriu de potcoave de vîrtejuri (Vortex Lattice, Method), aplicat atît aripii cît și flapsului.

Vom numi *„segment"* o suprafață portantă discretizată în mod propriu cu caracteristici geometrice specifice (fig. 3).

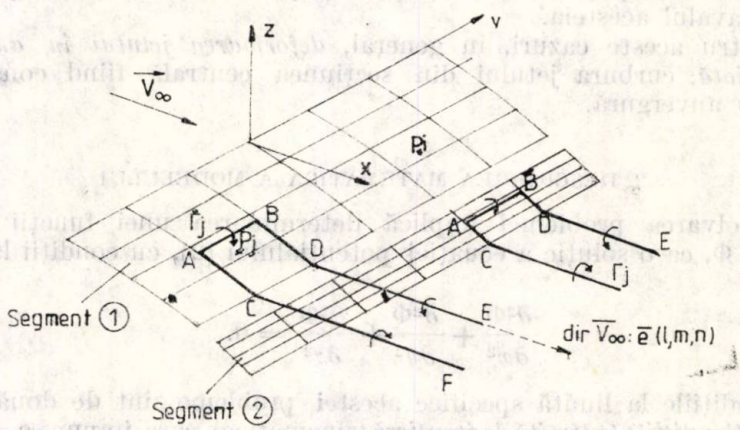


Fig. 3

Discretizarea constă în alegerea unui număr de puncte pe *suprafața determinată de scheletul segmentului portant*, formîndu-se astfel un sistem de boxe. Pentru simularea cît mai corectă a efectelor spațiale și de curgere *am elaborat un model propriu de potcoavă de vîrtej*, format din :

1. *un vîrtej legat* $\overrightarrow{AB}$ situat la 1/4 din coarda fiecărei boxe ;
2. *două vîrtejuri libere* BDE și ACF care urmăresc geometria scheletului, BD și AC, și direcția vitezei de la infinit, neperturbată, $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{CF}$;
3. condiția cinematică de tangență a curgerii se pune în puncte P_i situate la 3/4 din coarda fiecărei baze, conform teoriei lui Weissinger.

Viteza indusă de un segment de vîrtej $\overrightarrow{AB}$, de intensitate Γ, într-un punct P este dată de formula Biot—Savart (5),

$$\vec{V}_p = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_A^B \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}. \tag{5}$$

Pentru un segment de vîrtej $\overrightarrow{AB}$, de intensitate unitară, se deduce din (5) următoarea formulă de calcul (6) a vitezei induse în punctul P, prezentată și în [3]:

$$\vec{V}_{p_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|^2} \left[\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{AP} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP}}{BP} \right]. \tag{6}$$

Această formulă se aplică și segmentelor de vîrtej $\overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{CA}$.

Pentru vîrtejurile libere care se aliniază după viteza $\vec{V}_\infty$, de versor $\vec{e}$: (l, m, n), se obține formula (7) pentru vîrtejul semiinfinit $\overrightarrow{DE}$;

$$\vec{V}_{p_{\overrightarrow{DE}}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\vec{e} \times \overrightarrow{DP}}{|\vec{e} \times \overrightarrow{DP}|^2} \cdot \left[\frac{\overrightarrow{DP} \cdot \vec{e}}{DP} + 1 \right] \tag{7}$$

și formula (8), pentru vîrtejul semiinfinit $\overrightarrow{FC}$,

$$\vec{V}_{p_{\overrightarrow{CF}}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\overrightarrow{CP} \times \vec{e}}{|\vec{e} \times \overrightarrow{CP}|^2} \left[\frac{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{e}}{CP} + 1 \right]. \tag{8}$$

Impunînd condiția de tangență (3) într-un număr de puncte P_i, egal cu cel al necunoscutelor Γ_j, rezultă un sistem liniar de ecuații în intensitățile v rtejurilor Γ_j.

Viteza totală în punctul de control P_i se poate pune sub forma:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^{N} \vec{V}_{ij} \, \Gamma_j, \tag{9}$$

unde $\vec{V}_{ij}$ este viteza de influență a singularității j calculată în punctul i. Înlocuind (9) în (3) rezultă:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \, \Gamma_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

expresie în care

$$a_{ij} = \vec{n}_i \vec{V}_{ij}, \quad b_i = - \vec{n}_i \vec{V}_\infty. \tag{11}$$

În (11) prin $\vec{n}_i$ s-a notat normala la panoul i.

Pentru rezolvarea problemei este necesar deci evaluarea vitezelor induse de către toate singularitățile, în toate punctele de calcul. Cu ajutorul acestora se obțin coeficienții sistemului (10), care va fi rezolvat printr-o metodă corespunzătoare.

3.3.2. Pînza de vîrtejuri datorată suflajului

Așa cum s-a arătat în subcapitolul 3.1., determinarea efectului suflajului se face prin modelarea dîrei folosind un sistem de *„vîrtejuri legat de jet"* și un sistem de *„vîrtejuri libere de jet"* care împreună formează o

pînză de vîrtejuri ce începe din bordul de fugă al flapsului și se întinde, eventual, pînă la infinit aval (fig. 4).

Pînza de vîrtejuri din jet este discretizată similar cu pînza de vîrtejuri de pe aripă (vezi fig. 3). Elementele în anvergură sînt plasate paralel cu vectorul viteză locală calculat pe linia centrală a dîrei pentru fiecare joncțiune.

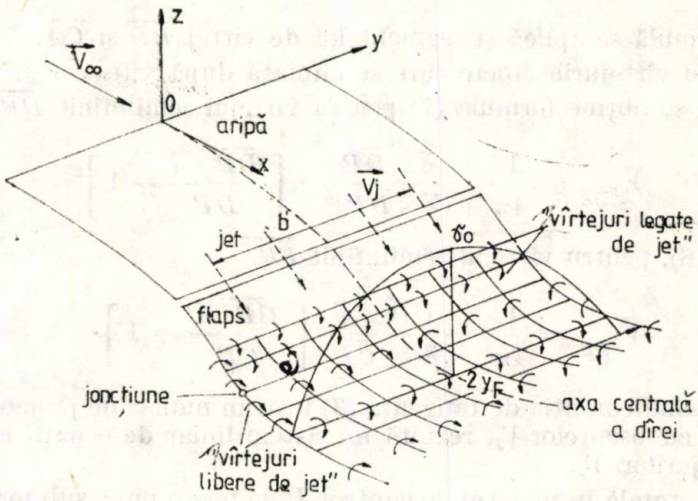


Fig. 4

Această ipoteză rezultă din presupunerea inițială ca *jetul suflat peste flaps este plat și are o grosime mică în comparație cu lățimea sa.*

Presupunem în continuare că distribuția de circulație în anvergura jetului este eliptică, de forma (12),

$$\gamma(y) = \gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{y_F}\right)^2}, \tag{12}$$

în care γ_0 este intensitatea circulației în secțiunea centrală.

Această ipoteză se încadrează în teoria aripii subțiri și a fost folosită cu rezultate remarcabile și de alți cercetători : Maskell, Spence, Thomas și Ross.

Se poate folosi și o distribuție arbitrară în anvergura jetului, similară cu cea de pe aripă. Totuși, aproximația eliptică reduce în mod considerabil timpul de calcul și complexitatea modelului matematic. Izolînd un element infinitesimal în anvergură pe dîra curbată (fig. 5) aplicăm teorema impulsului. Folosind relația Kutta-Jukowski, forța $\vec{F}_i$ indusă datorită vîrtejului legat, plasat pe joncțiune, trebuie să fie egală cu variația impulsului jetului datorită schimbării direcției cu $\Delta\theta_i$ (relația (13)).

$$\int_{-\frac{b'}{2}}^{\frac{b'}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_j \vec{V}_j) = \int_{-y_F}^{y_F} \rho \vec{V} \times \vec{\gamma}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{13}$$

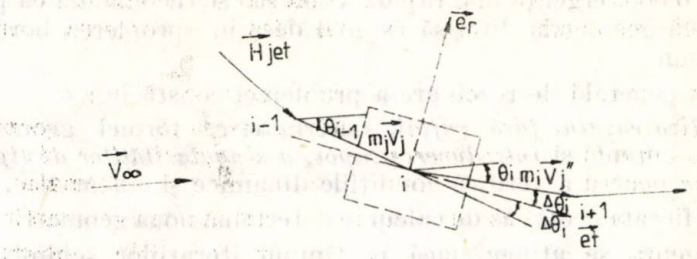


Fig. 5

Presupunînd că modulul impulsului jetului se conservă în dîră și, introducînd notațiile adimensionale :

$$c_j = \frac{2 m_j V_j}{\rho_\infty V_\infty^2 c_r}, \tag{14}$$

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\gamma_0}{b V_\infty}, \tag{15}$$

$$\bar{V}_t = \frac{V_t}{V_\infty}, \tag{16}$$

relația (13) devine :

$$\bar{\gamma}_{0_i} = \frac{2 c_j c_r b'}{\pi \cdot y_F b} \cdot \frac{\Delta\theta_i}{\bar{V}_{t_i}}. \tag{17}$$

În relația (17) a fost folosită distribuția eliptică de circulație γ din (12) și ipoteza că viteza tangențială are aceeași valoare în anvergură ca și cea din secțiunea centrală.

Pentru cazul în care dîra devine linie de curent ($\Delta\theta_i = 0$) expresia vitezei tangențiale este (18) :

$$V_t = (V_\infty + u)\cos\theta_i + w \sin\theta_i, \tag{18}$$

expresie care se poate folosi, iterativ, în (17).

3.3.3. Studiul teoretic al combinației aripă + flaps cu suflaj

Sistemul aripă + flaps și sistemul de vîrtejuri din dîră este compus, formînd un sistem tridimensional de vîrtejuri și puncte de control, pentru care se aplică condițiile la limită cinematice și dinamice. Pentru fiecare joncțiune din dîră, distribuția de circulație este eliptică pe anvergura jetului ca în figura 4. Condițiile la limită în jet impun ca viteza normală în centrul dîrei să fie zero, iar intensitatea vîrtejurilor legate de jet să verifice prin (17), curbarea sa. Rezolvarea problemei se face iterativ pentru a determina forma geometrică stabilă a dîrei pentru un coeficient c_j, de suflaj dat. Geometria dîrei este determinată de coordonatele $(x, z)_i$ ale fiecărui punct de joncțiune ; abscisele (x_i) sînt impuse, pentru un număr (N), rezonabil de puncte care determină geometria dîrei.

Pentru o convergenţă mai rapidă a soluţiei se recomandă ca punctele care determină geometria dîrei să fie mai dese în apropierea bordului de fugă a flapsului.

Schema generală de rezolvare a problemei constă în :

— *analiza cazului fără suflaj*, determinarea formei geometrice a dîrei (linie de curent) şi *introducerea, apoi, a singularităţilor de tip „vîrtej de jet" în dîră* pentru a verifica condiţiile dinamice şi cinematice.

Pentru fiecare acest caz de calcul se determină noua geometrie a dîrei.

Convergenţa se atinge dacă în timpul iteraţiilor schimbarea de geometrie la două iteraţii succesive, pentru toate joncţiunile, nu depăşeşte o valoare impusă : $\varepsilon \approx 1^0/_{00}$.

Dacă, totuşi, convergenţa nu este atinsă sistemul este reiterat, introducînd în dîră, chiar distribuţia de circulaţie de pe aripă şi flaps.

În continuare prezentăm, schematic, acest proces iterativ :

(1) *Iteraţia 0 — fără suflaj*, constă în determinarea formei dîrei ca linie de curent ce pleacă din bordul de fugă al flapsului. Ecuaţia diferenţială a liniilor de curent este :

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w}, \tag{19}$$

care se aplică pe linia centrală a dîrei sub forma (20)

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_i = \left(\frac{w}{u}\right)_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{20}$$

Se presupune iniţial că nu există deflexie a dîrei, calculîndu-se vitezele (u_i şi w_i) în punctele A_i, de pe dreapta AB (fig. 6).

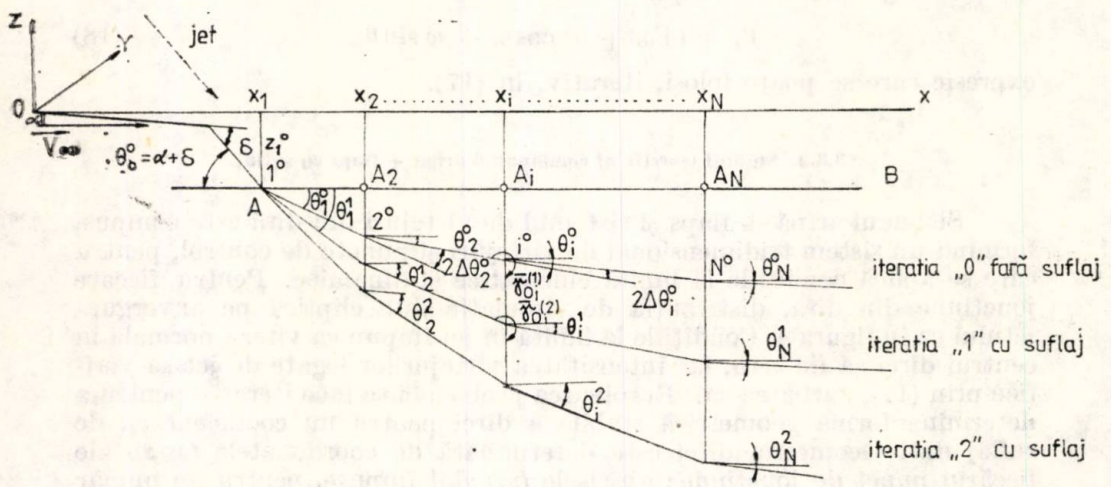


Fig. 6

Folosind panta locală calculată pentru două puncte succesive, coordonata (z_i) se determină cu ușurință după relația

$$\begin{cases} z_1^{(k)} = z_1^0, \\ z_i^{(k)} = z_{i-1}^{(k)} + \left(\dfrac{w}{u}\right)_{i-1}^{(k-1)} (x_i - x_{i-1}). \end{cases} \tag{21}$$

În care prin (k) s-a notat numărul iterației

Procesul iterativ se oprește dacă

$$\left| \frac{z_i^{(k)} - z_i^{(k-1)}}{z_i^{(k)}} \right| \leqslant \varepsilon, \tag{22}$$

rezultînd geometria dîrei fără suflaj din figura 6, notată cu simbolul (0).

(2) *Iterația 1 — cu suflaj*

(2.1.) Avînd construită geometria dîrei fără suflaj (0), deci determinate mărimile :

$$\begin{cases} \theta_i^0 = \operatorname{arctg} \dfrac{w_i^0}{u_i^0}, \\ \vec{V}_{t_{i0}}^0 = \bar{u}_i^0 \cos\theta_i^0 + \bar{w}_i^0 \sin\theta_i^0, \\ \Delta\theta_i^0 = \dfrac{\theta_{i-1}^0 - \theta_i^0}{2}, \quad i = 1, N. \end{cases} \tag{23}$$

Se introduce în fiecare joncțiune un vîrtej de intensitate $\bar{\gamma}_{0_i}^{(1)}$ ce se calculează din formula (17),

$$\bar{\gamma}_{0_i}^{(1)} = \frac{2c_j\, c_r\, b'}{\pi\, y_F b} \frac{\Delta\theta_i^0}{\bar{V}_{t_i}^0}.$$

(2.2.) Se recalculează distribuția de vîrtejuri pe aripă-flaps $(\bar{\Gamma}_j^{(1)})$ datorată prezenței pînzei de vîrtejuri din jet care acum este cunoscută, prin sistemul de ecuații algebrice liniar,

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{aripă \\ flaps}} a_{ij}\, \bar{\Gamma}_j^{(1)} = b_i, \quad i = 1, \ldots, N_{aripă,\, flaps}, \\ b_i = -\vec{n}_i \vec{V}_\infty - \sum\limits_{dîră} \vec{n}_i \vec{V}_{ik}\, \bar{\gamma}_{0k}^{(1)}. \end{cases} \tag{24}$$

(2.3.) Se recalculează distribuția de viteze induse $(u_i^{(1)}, w_i^{(1)}$ în axa centrală a dîrei de la iterația 0 fără suflaj și se construiește noua geometrie a dîrei, folosind relațiile :

$$\begin{cases} \theta_i^{(1)} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{w_i^{(1)}}{u_i^{(1)}}, \\ z^{(1)} = z_{i-1}^{(1)} + \left(\dfrac{w}{u}\right)_{i-1}^{(1)} (x_i - x_{i-1}). \end{cases} \tag{25}$$

MUSZAKI EGYETEM 1848

(2.4.) Se verifică condiţia (22) de convergenţă geometrică,

$$\left| \frac{z_i^{(1)} - z_i^{(0)}}{z_i^{(1)}} \right| \leqslant \varepsilon. \tag{26}$$

Dacă relaţia (26) nu este îndeplinită, procesul iterativ se reia de la punctul (2.1.), pentru *iteraţia 2 — cu suflaj*, geometria de plecare, constituind-o cea rezultată de la iteraţia (1).

Procesul global se opreşte atunci cînd dîra devine stabilă, geometric calculîndu-se coeficienţii aerodinamici locali şi globali pe aripă, flaps şi jet.

3.3.4. Observaţii asupra convergenţei calculului în cazul aripă-flaps suflate

Procesul iterativ prezentat în paragraful anterior cuprinde, pentru fiecare iteraţie, rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice, liniar. Datorită faptului că geometria dîrei este sensibil influenţată de mici schimbări a intensităţilor vîrtejurilor din dîră, instabilitatea geometrică a fost îmbunătăţită prin schema prezentată anterior, atunci cînd la iteraţia (k) se utilizează intensităţile ($\bar{\gamma}_{0i}^{(k-1)}$), de la iteraţia anterioară.

Este de presupus că rezolvarea numerică a problemei să impună cam 7 pînă la 10 iteraţii pentru un caz, ceea ce înseamnă pentru un sistem de ecuaţii de (160 × 160), 30 de minute de calcul pe CYBER—720/120.

Într-o lucrare ulterioară se vor prezenta şi rezultatele numerice pentru cazul *aripă + flaps cu suflaj*.

Primit în redacţie la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. E. LOTH, B. W. McCORMICK, *Numerical Solution of the Downwash Associated with a Blown-Flap System*, Journal of Aircraft, 3 (1987).
2. C. C. SHEN, M. L. LOPEZ, N. F. WASSON, *Jet-Wing Lifting-Surface Theory Using Elementary Vortex Distribution*, Journal of Aircraft, 5 (1975).
3. V. N. CONSTANTINESCU, I. JADIC, *Consideraţii asupra metodelor cu panouri din aerodinamică*, St. cerc. mec. apl., 6 (1985).
4. R. C. PLATT, *Aerodinamic Characteristics of a Wing with Fowler Flaps. Including Flap Loads, Downwash and Calculated Effect on Take—Off*, NACA Technical Reports, 534 (1935).
5. S. G. HEDMAN, *Vortex Lattice Method for Calculation of Quasi Steady Loadings on thin Elastic Wing in Subsonic Flow*, The Aeronautical Research Institute of Sweden, 105 (1965).
6. D. KÜCHEMANN, *A Method for Calculating the Pressure Distribution over Jet-Flapped Wings*, Reports and Memoranda, 3026 (1957).
7. R. C. PLATT, *Aerodynamic Characteristics of Wings with Cambered External—Airfoil Flaps, including Lateral Control with a Full—Span Flap*, NACA Technical Reports, 541 (1935).

RECENZII

P. VARAIYA, A. B. KURZHANSKI (su red.), *Discrete Event Systems: Models and Applications* (Sisteme de evenimente discrete : modele și aplicații), *IIASA Conference, Sopron, Hungary, August 3—7, 1987*, vol. **103** din seria : *Lecture Notes in Control and Information Science* (sub red. M. Thoma și A. Wyner), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1988, 282 p., 47 fig.

Teoria matematică a sistemelor s-a ocupat îndeosebi cu sisteme caracterizate de variabile continui, guvernate de ecuații diferențiale sau cu diferențe finite. Sînt necesare însă modele dinamice ale unor sisteme ale căror stări au o interpretare logică sau simbolică, iar nu numerică. Aceste stări sînt modificate de evenimente care nu pot fi descrise cantitativ. Modelele de acest tip se numesc modele cu evenimente discrete. Necesitatea lor provine din efortul extinderii teoriei sistemelor pentru a trata procesele tehnologice, rețelele de comunicație și alte sisteme a căror comportare este descrisă de succesiunea unor modificări calitative apărute în salt, ignorîndu-se schimbările infinitezimale continui. Astfel, comportarea unei rețele de comunicație poate fi descrisă de afirmații de tipul : „utilizatorul A a trimis la momentul t_a date către utilizatorul B, care le-a primit la momentul t_b''. Asemenea afirmații indică evenimente discrete care produc diverse modificări calitative în operațiile rețelei, ignorîndu-se modificări infinitezimale ca modul real de propagare a semnalelor prin rețea. De asemenea, un proces tehnologic poate fi descris prin evenimente discrete de tipul : „începe prelucrarea'', „utilaj defectat'', „resurse epuizate'', fără precizarea schimbărilor continui în cantitatea de materie primă sau în alte privințe.

Modelele cu evenimente discrete fac deci abstracție de modificarea continuă în timp a unor variabile, înregistrînd doar apariția unei succesiuni discrete de evenimente. O astfel de succesiune se numește secvență (trace). Modelul descrie mulțimea secvențelor care pot fi generate de un sistem. Deși mulțimea reală a secvențelor poate fi infinită datorită condițiilor inițiale, a strategiilor de control sau a efectelor aleatoare, modelul conține un număr finit de secvențe. Modelul cu evenimente discrete (DEM) este deci un model matematic finit care descrie mulțimea infinită a secvențelor unui sistem cu evenimente discrete.

Secvențele pot fi descrise matematic la trei nivele de abstracție : logic, temporal, stohastic. La nivelul logic secvența este definită de succesiunea ordonată a evenimentelor $s = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots$ La nivelul temporal, se specifică evenimentele și momentele lor de apariție : $s = (\sigma_1, t_1)(\sigma_2, t_2)\ldots$ La nivel stohastic, descrierea este aceeași ca la nivelul temporal însă atît σ_i și t_i sînt variabile aleatoare. Formalismul matematic, adică metodele de calcul prin care se pot formula și rezolva probleme privind modelele cu evenimente discrete, se bazează la nivel logic, pe teoria automatelor cu stări finite, rețelele Petri, procesele secvențiale de comunicare. La nivel temporal, formalismul include grafuri de semnal, iar la nivel stohastic teoria proceselor aleatoare, teoria deciziilor și teoria așteptării. Cu cît nivelul de abstracție este mai coborît, formalismul matematic asociat este mai puternic dar simplificările față de sistemul real sînt mai pronunțate.

Avantajul modelelor cu evenimente discrete constau în relevarea similarității de structură între sisteme diferite. Analiza modelului permite predicția comportării sistemului, arătînd de exemplu, posibilitatea unei transmisii incorecte de date într-un sistem de comunicație sau productivitatea maximă a unui proces tehnologic. Sinteza pe baza modelelor permite creșterea rapidității de prelucrare a semnalelor, optimizarea resurselor proceselor de fabricație etc.

Volumul conține 18 lucrări prezentate la Conferința informațională asupra sistemelor cu evenimente discrete, desfășurată în R.P.U. în august 1987. Primele opt lucrări se referă la nivelul logic al modelelor, următoarele patru la nivelul temporal și ultimele șase la nivelul stohastic. Trei lucrări se ocupă de procese tehnologice, patru de rețele de comunicație, una de prelucrarea semnalelor digitale, iar celelalte zece de probleme metodologice generale ca simularea, complexitatea de calcul a problemelor de sinteză etc.

A. Mihalache

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 119—122

J. S. FREUDENBERG, D. P. LOOZE, *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems* (Proprietăţile sistemelor cu reacţie scalare şi multivariabile în domeniul frecvenţei), vol. **104** din seria : *Lecture Notes in Control and Information Science* (sub red. M. Thoma şi A. Wyner), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1988, 281 p., 22 fig.

Lucrarea „Proprietăţile sistemelor cu reacţie scalare şi multivariabile în domeniul frecvenţei" de J. S. Freudenberg şi D. P. Looze este publicată în seria de lucrări asupra teoriei informaţiei şi a controlului editate de Springer. Lucrarea cuprinde rezultatele unor cercetări desfăşurate de autori la Universitatea Illinois, beneficiind şi de discuţiile purtate cu persoane din centrul de cercetare de la Honeywell. Scopul principal al autorilor a fost acela de a extinde pe cît posibil rezultatele teoriei clasice a sistemelor cu reacţie scalare la studiul sistemelor cu reacţie cu mai multe variabile.

Lucrarea de 281 pagini este compusă din 13 capitole şi 5 anexe (care cuprind anumite demonstraţii matematice) şi este organizată în 4 secţiuni. Într-o primă secţiune, formată din capitolele 2 pînă la 4 se examinează rezultatele principale ale teoriei clasice a sistemelor cu reacţie scalare şi metodologia obişnuită de alegere a considerentelor de proiectare. În secţiunea următoare, formată din capitolele 5 pînă la 7, se prezintă rezultatele anterioare obţinute în extinderea conceptelor clasice din teoria reacţiei asupra sistemelor multivariabile, arătîndu-se că există multe sisteme multivariabile care nu pot fi studiate printr-o simplă extindere a teoriei scalare. În secţiunea a treia, formată din capitolele 8—11, se prezintă o nouă metodă de studiu a sistemelor multivariabile care conduce în final la o generalizare a relaţiei scalare clasice a lui Bode. Rezultatele finale sînt prezentate în ultima secţiune formată de capitolul 12 în care noua teorie este aplicată pentru analiza unui sistem multivariabil care se comportă nescalar. Capitolul 13 prezintă concluziile asupra lucrării şi direcţiile unor dezvoltări ulterioare.

În capitolul 2 se prezintă principalele rezultate ale teoriei clasice a reacţiei clasice, cu intenţia de a se identifica posibilităţile de extindere a rezultatelor la sistemele cu reacţie cu mai multe variabile. Astfel se arată că pentru analiza oricărui sistem cu reacţie este important să se poată aprecia calitatea sistemului pe baza unor funcţii de merit ; de asemenea este important să se ofere proiectantului nişte reguli simple de ajustare a buclei de reacţie prin intermediul unor mărimi variabile cu efect uşor de urmărit. În sfîrşit, se arată necesitatea stabilirii unor compromisuri în optimizarea proprietăţilor sistemelor cu reacţie.

În capitolul 3 se discută limitele potenţiale ale unui sistem cu reacţie în îndeplinirea unor specificaţii de proiectare impuse : compensarea singularităţilor sistemului care trebuie stabilizat prin reacţie, modificarea încă din timpul realizării a sistemelor pentru a permite o compensare mai eficientă sau limitările impuse de banda de frecvenţe finită a sistemului.

În capitolul 4 se fac o serie de consideraţii asupra modului de rezolvare a problemelor de poiectare în teoria clasică scalară a reacţiei în legătură cu îndeplinirea obiectivelor propuse şi ţinînd seama de constrîngerile impuse de realizabilitatea fizică şi de particularităţile sistemului fără reacţie. Se arată cum alegerea convenabilă a parametrilor de optimizare poate conduce la o rezolvare eficientă a obiectivelor de proiectare.

În capitolul 5 se arată stadiul lucrărilor anterioare care încearcă să generalizeze rezultatele obţinute în domeniul scalar pentru a rezolva şi problemele sistemelor cu reacţie cu mai multe variabile. Se arată limitele acestor metode, care nu pot rezolva problemele specifice sistemelor multivariabile, datorită lipsei unor corelaţii simple între proprietăţile sistemului cu şi fără reacţie. Se dau exemple de asemenea cazuri întîlnite în aplicaţii.

În capitolul 6 se începe fundamentarea unei noi metodologii de rezolvare a cazului sistemelor multivariabile cu reacţie prin redefinirea unor concepte de bază importante în acest caz, cum ar fi cîştigul, faza şi direcţia. Se arată cum se defineşte diferenţa de fază între două mărimi vectoriale, aceasta determinînd modul în care ele vor interacţiona la trecerea prin sistem.

În capitolul 7 se discută proprietăţile sistemelor multivariabile cu reacţie, în special în ceea ce priveşte proprietăţile sistemelor ale căror funcţii de transfer pot fi considerate ca fiind formate din două părţi cu cîştiguri mult diferite între ele. Se arată că aceste sisteme se comportă satisfăcător numai în cazul în care părţile diferite ale sistemului sînt suficient de bine decuplate.

Se discută de asemenea problema alegerii specificaţiilor optime pentru un astfel de sistem, avînd drept exemplu cazul unui sistem cu zgomot pe calea de traductor (reacţie).

Metoda folosită reprezintă o extindere a posibilităţilor oferite de analiza sistemelor scalare şi poate fi folosită numai pentru optimizarea proprietăţilor sistemelor la o singură frecvenţă.

În cazul cînd se dorește obținerea unor anumite proprietăți impuse într-o bandă largă de frecvențe, se impune găsirea unei generalizări a relațiilor Bode de legătură dintre fază și modul la sistemele multivariabile.

În capitolul 8 se expun bazele matematice oferite de proprietățile funcțiilor analitice de variabilă complexă care vor fi folosite în capitolele următoare pentru obținerea unei metode analitice generale de studiu.

În capitolul 9 se arată cum pot fi definiți vectorii unitari complecși în spațiul n-dimensional și proprietățile spațiului proiectiv complex folosit ca instrument de studiu în acest caz. Se arată cum în cazul general n-dimensional acțiunea unui sistem liniar se caracterizează prin trei tipuri de modificări ale semnalelor aplicate la intrare : modificarea modulului (mărimii), modificarea direcției (sau a subspațiului) și modificarea unei mărimi analoge fazei din sistemele scalare.

În capitolul 10 se stabilește setul de ecuații diferențiale care trebuie satisfăcute de fiecare pereche de vectori singulari ai unei funcții de transfer matriceale și se pune în evidență termenul suplimentar care este corelat cu diferența de fază dintre perechea de vectori singulari. În acest fel se stabilesc noi relații analoge condițiilor scalare Cauchy-Riemann care leagă fiecare valoare singulară de diferența de fază dintre perechea asociată de vectori singulari.

În capitolul 11 se transformă ecuațiile Cauchy-Riemann generalizate obținute anterior într-o formă mai potrivită aplicațiilor practice. Se obține astfel o relație integrală care leagă diferența de fază de proprietățile valorilor singulare și a subspațiilor singulare asociate. Această relație integrală reprezintă o generalizare a relațiilor scalare ale lui Bode și se poate privi ca fiind formată dintr-o parte asemănătoare cazului scalar la care se adaugă un termen suplimentar multivariabil.

În capitolul 12 se prezintă un exemplu de utilizare a relației integrale generalizate de legătură între cîștig (modul) și fază obținute anterior. Se consideră cazul unui sistem cu două intrări la care se caută obținerea unei optimizări prin modificarea gradului de cuplaj între secțiunea cu cîștig mare și aceea cu cîștig mic. Metoda de analiză prezentată, tipică pentru sistemele cu mai multe variabile, se poate aplica și în multe alte cazuri.

În concluzie, lucrarea analizată contribuie prin mai multe căi la dezvoltarea teoriei generale a sistemelor multivariabile cu reacție. Mai întîi se face o trecere în revistă a stadiului actual al teoriilor clasice asupra sistemelor cu reacție scalare în tratarea problemelor tipice de proiectare și extindere a aplicabilității lor în sistemele multivariabile. Apoi se stabilește relația dintre comportarea sistemelor multivariabile cu bucla de reacție închisă și comportarea lor cu bucla deschisă, analiză utilă pentru înțelegerea modului de optimizare a cerințelor în cazul unui sistem cu mai multe variabile. În sfîrșit, s-a obținut o relație generală care leagă modulul de fază în cazul sistemelor multivariabile, relație care generalizează rezultatele cunoscute ale teoriei scalare. Aceste rezultate au fost utilizate în cadrul tratării unui exemplu de proiectare al unui sistem cu două variabile.

Pentru viitor rămîn de dezvoltat noi tehnici și metode de analiză adecvate sistemelor multivariabile cu reacție, în special în ceea ce privește obținerea unor căi eficiente de sinteză a unor sisteme cu performanțe impuse.

A. Manolescu

K. RATHMILL (sub. red.), *Control and Programming in Advanced Manufacturing* (Comandă și programare în fabricația avansată), în seria : *International Trends in Manufacturing Technology* (Tendințe internaționale în tehnologia de fabricație), sub red. J. Holingum, J. Mortimer și B. Rooks, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, 1988, 467 p.

Volumul face parte dintr-o serie de cărți consacrate tendințelor actuale pe plan mondial în perfecționarea fabricației. El conține un număr de 28 articole referitoare la proiectarea asistată de calculator, programarea și comanda sistemelor de fabricație flexibile automată grupate în 6 capitole.

Primul capitol conține 4 articole referitoare la proiectarea asistată de calculator. Ele se referă la transformarea datelor de proiectare în instrucțiuni tehnologice și la băncile de date pentru proiectare care leagă într-un tot unitar informații privind marketing-ul, proiectarea, estimarea, planificarea procesului, producția, asamblarea și livrarea. Se examinează de asemenea proiectarea și simularea funcționării pe model a unei celule de fabricație flexibilă robotizate.

Capitolul 2 al volumului se referă la programarea roboților industriali și conține de asemenea 4 articole. Pornind de la necesitatea dezvoltării unor unelte de programare superioare, adecvate unor elemente de inteligență artificială și senzorilor, se trece în revistă stadiul actual al metodelor și limbajelor de programare, se compară critic acestea din urmă, se expun unele considerente de standardizare. Se fac de asemenea referiri la programarea automată a roboților și la strategiile de programare la nivel de obiectiv.

Cel de-al treilea capitol al volumului se referă la programarea echipamentelor tehnologice. În cadrul celor 4 articole incluse în acest capitol se argumentează necesitatea introducerii unor noi metode de programare a echipamentelor tehnologice, urmărindu-se creșterea factorului de utilizare a acestora și reducerea costurilor de fabricație. Se propun noi limbaje de programare avansate, utilizabile și în cazul folosirii automatelor programabile. Sînt interesante ideile referitoare la implicația factorului uman în comanda și programarea sistemelor de fabricație flexibilă cuprinse în articolul lui B. J. Davies de la Universitatea din Manchester, Marea Britanie.

În cel de-al patrulea capitol sînt grupate 5 articole referitoare la modelarea și simularea pe calculator a funcționării sistemelor de fabricație flexibilă. În ultima decadă modelarea și simularea pe calculator a proceselor industriale a crescut în importanță. Articolele din capitol se referă la modul de constituire a modelelor, descriu aplicarea tehnicilor de simulare la sisteme de fabricație și examinează unele tendințe de viitor. Se prezintă de asemenea 6 limbaje de programare specializate pentru modelarea și simularea pe calculator a sistemelor de fabricație.

Capitolul 5 este intitulat „Dezvoltări în programarea și comanda de nivel superior" și conține 4 articole care prezintă fiecare cîte un limbaj de programare avansată pentru sisteme de fabricație, respectiv de asamblare. Un al cincilea articol, avîndu-l ca autor pe P. Anstiss de la BAeCAM British Aerospace din Marea Britanie, prezintă implementarea unui sistem de fabricație flexibilă de mare complexitate pentru executarea unor piese de dimensiuni mici pentru mai multe avioane militare și civile.

Ultimul capitol, 6, conținînd 6 articole, se intitulează „Realizări privind integrarea efectivă și comanda sistemelor de fabricație". Sînt prezentate cîteva realizări concrete, punîndu-se un accent pe dezvoltarea sistemului de management al întreprinderilor în vederea adecvării acesteia fabricației flexibile automate, pe perfecționarea schimbului de informații intrauzinal și pe dezvoltarea unor „unelte software". Se tratează de asemenea unele aspecte economice ale fabricației integrate cu calculatorul.

Volumul se adresează specialiștilor din domeniul roboticii și organizării întreprinderilor industriale. Articolele sînt semnate de un număr de 29 autori.

F. Kovács

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectelor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotorii).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, 79717, Bucureşti 22, Calea Victoriei 125.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 48, nr. 2 martie—aprilie 1989

SUMAR

STUDII

M. MUNTEANU, Asupra echilibrului solidului rigid cu legături elastice triaxiale . . . 125

V. BURACU, Asupra semiplanului elastic încărcat cu sarcină normală distribuită pe frontieră, cu aplicaţie la problema contactului plan 141

D. DUBINĂ, Consideraţii privind interacţiunea dintre flambaj şi voalare în studiul instabilităţii barelor cu pereţi subţiri 157

D. BĂTUCĂ, Calculul numeric al curgerii permanente a apei din albiile rîurilor şi canalelor, bazat pe utilizarea tehnicii elementelor finite 179

I. FILIMON, S. IANCA, Contribuţii la calculul ductilităţii şi capacităţii de absorbţie a energiei la elementele din beton armat folosite în structuri antiseismice 201

NOTE

M. V. SOARE, Asupra unei generalizări a multiplicatorului de impact. I 219

R. FRIEDRICH, Funcţii de formă pentru elemente finite ierarhice 225

RECENZII 233

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

ASUPRA ECHILIBRULUI SOLIDULUI RIGID CU LEGĂTURI ELASTICE TRIAXIALE

de M. MUNTEANU

Institutul Politehnic București

În lucrare se determină ecuațiile poziției de echilibru ale unui solid rigid cu legături elastice triaxiale supus unui torsor de forțe exterioare. Se analizează cazuri particulare posibile prestabilite ale poziției de echilibru în legătură cu torsorul forțelor exterioare. În final se studiază cazul deformațiilor mici ale elementelor elastice, ilustrat printr-o aplicație.

1. INTRODUCERE

Se consideră un solid rigid legat de mediul exterior prin n legături elastice triaxiale. Montajul se realizează astfel încît direcțiile principale ale elasticității tuturor elementelor elastice să fie paralele cu axele unui sistem de referință fix $Ox'y'z'$ [3].

Dacă forțele exterioare aplicate, inclusiv greutatea, sînt neglijabile, elementele elastice nu sînt tensionate, corpul ocupă poziția de echilibru figurată punctat în figura 1, iar sistemul mobil $Oxyz$ legat de corp se alege astfel încît să coincidă cu $Ox'y'z'$ în această poziție. Sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, elementele elastice vor deveni tensionate, iar solidul va ocupa poziția de echilibru figurată cu linie plină. Prima poziție fiind stabilită prin configurația sistemului de legături, a doua poziție urmează să fie determinată.

În situația unor mișcări oscilatorii, fiecare punct al solidului în poziția de echilibru reprezintă un centru de oscilație pentru acel punct. Pentru studiul mișcărilor vibratorii este necesară cunoașterea poziției centrului de oscilație, iar în numeroase probleme practice se pune problema stabilirii configurației sistemului de elemente elastice astfel încît pentru un sistem de forțe exterioare dat, să se obțină o poziție de echilibru prestabilită.

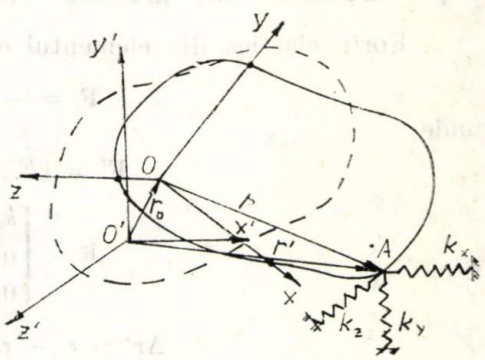


Fig. 1

2. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

Poziția solidului rigid este complet determinată de șase parametrii independenți. Vectorul de poziție al solidului rigid format din cele șase coordonate generalizate este :

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ \ldots\ q_6]^T = [\mathbf{q}'^T\ \mathbf{q}''^T]^T, \tag{1}$$

unde

$$\mathbf{q}' = \mathbf{r}_0 = [x_0\, y_0\, z_0]^T = [q_1\, q_2\, q_3]^T \tag{2}$$

reprezintă vectorul de poziție a originii sistemului mobil, iar

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{\Phi} = [\varphi\ \psi\ \theta]^T = [q_4\, q_5\, q_6]^T, \tag{3}$$

unde ψ, φ și θ sînt unghiuri ale lui Euler specifice vibrațiilor definite în figura 2 [1], [2].

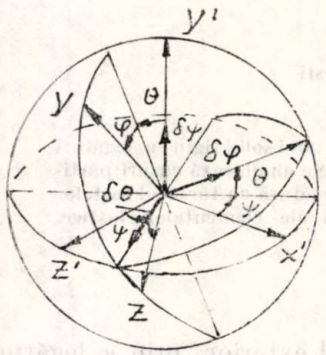


Fig. 2

Un punct de montaj A al unui element elastic cu constantele elastice k_x, k_y, k_z este poziționat înainte de tensionare prin vectorul de poziție $\mathbf{r}$, iar după tensionare, prin vectorul de poziție

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{r}, \tag{4}$$

unde

$$\mathbf{r}' = [x'\, y'\, z']^T; \quad \mathbf{r} = [x\, y\, z]^T; \quad \boldsymbol{\alpha} = \|\alpha_{ij}\|,\ i, j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ este matricea cosinusurilor directoare ale axelor sistemului mobil în raport cu axele sistemului fix.

Expresia matricei funcție de φ, ψ și θ este

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Forța elastică din elementul elastic tensionat este

$$\mathbf{F}'_e = -\,\mathbf{k}\ \Delta\,\mathbf{r}', \tag{6}$$

unde

$$\mathbf{F}'_e = [F_{ex'}\, F_{ey'}\, F_{ez'}]^T, \tag{7}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}, \tag{7'}$$

$$\Delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\alpha}_0\mathbf{r}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{I}_3. \tag{9}$$

Lucrul mecanic virtual corespunzător forței $\mathbf{F}'_e$ este

$$\delta L = \mathbf{F}'^T_e\ \delta\mathbf{r}'. \tag{10}$$

Utilizînd operatorul de derivare

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\ \frac{\partial}{\partial q_2}\ \ldots\ \frac{\partial}{\partial q_6}\right]^T \tag{11}$$

și diferențiala

$$\delta \mathbf{q} = [\delta q_1 \; \delta q_2 \; \ldots \; \delta q_6]^T \tag{12}$$

se obține

$$\delta \mathbf{r}' = (\nabla \mathbf{r}'^T)^T \, \delta \mathbf{q}. \tag{13}$$

Ținînd seama de (4), rezultă

$$\nabla \mathbf{r}'^T = [\mathbf{I}_3 \; \Lambda]^T, \tag{14}$$

unde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \alpha_{1p}}{\partial q_4} r_p & \cdot & \dfrac{\partial \alpha_{1p}}{\partial q_6} r_p \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \alpha_{3p}}{\partial q_4} r_p & \cdot & \dfrac{\partial \alpha_{3p}}{\partial q_6} r_p \end{bmatrix} \quad (p = 1, 2, 3), \tag{15}$$

cu notația

$$x = r_1; \quad y = r_2; \quad z = r_3. \tag{16}$$

În termenii matricei (15) și în însumările care urmează se utilizează convenția de însumare după indicii care se repetă într-un monom.

Introducînd (6), (8), (13) și (14) în (10) se obține

$$\delta L = - \, [(\mathbf{I}_3 \; \Lambda)^T \, \mathbf{k}(\mathbf{r}_0 + \alpha_0 \, \mathbf{r})]^T \, \delta \mathbf{q}. \tag{17}$$

Deoarece

$$\delta L = \mathbf{Q}_e^T \, \delta \mathbf{q} \tag{18}$$

forța generalizată corespunzătoare elementului elastic din punctul A este

$$\mathbf{Q}_e = - \, [\mathbf{I}_3 \; \Lambda]^T \, \mathbf{k}[\mathbf{r}_0 + \alpha_0 \, \mathbf{r}] \tag{19}$$

ce se mai poate scrie sub forma

$$\mathbf{Q}_e = [\mathbf{Q}_e'^T \; \mathbf{Q}_e''^T]^T = [Q_{e1} \; Q_{e2} \; \ldots \; Q_{e6}]^T \tag{20}$$

unde

$$\mathbf{Q}_e' = - \, \mathbf{k}(\mathbf{q}' + \alpha_0 \, \mathbf{r}), \tag{21}$$

$$\mathbf{Q}_e'' = - \, \Lambda^T \, \mathbf{k}(\mathbf{q}' + \alpha_0 \, \mathbf{r}) \tag{22}$$

reprezintă vectorii forță și respectiv moment.

Sistemul de forțe exterioare efectiv aplicate este echivalent cu torsorul lor de reducere în punctul 0, $\tau_0 \, (\mathbf{R} \; \mathbf{M}_0)$.

Lucrul mecanic elementar virtual corespunzător torsorului de reducere în punctul O este

$$\delta L = \mathbf{R} \, \delta \mathbf{r}_0 + \mathbf{M}_0^T \, \delta \Phi', \tag{23}$$

unde

$$\mathbf{R} = [R_{x'}\ R_{y'}\ R_{z'}]^T; \quad \mathbf{M}_0 = [M_{x'}\ M_{y'}\ M_{z'}]^T. \tag{24}$$

Deoarece, așa cum se cunoaște, rotațiile elementare au caracter vectorial, în sistemul de referință mobil avem

$$\delta\boldsymbol{\Phi} = [\delta\Phi_x\ \delta\Phi_y\ \delta\Phi_z]^T. \tag{25}$$

Din figura 2 se obține

$$\delta\boldsymbol{\Phi} = \gamma\delta\ \mathbf{q}'', \tag{26}$$

unde

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \quad \delta\mathbf{q}'' = [\delta\varphi\ \delta\psi\ \delta\theta]^T. \tag{27}$$

Dar

$$\delta\boldsymbol{\Phi}' = \boldsymbol{\alpha}\ \delta\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\alpha}\gamma\ \delta\mathbf{q}''. \tag{28}$$

Introducînd (28) în (23) și ținînd seama de (3), rezultă

$$\delta L = \mathbf{R}^T\ \delta\mathbf{q}' + (\gamma^T\ \boldsymbol{\alpha}^T\ \mathbf{M}_0)^T\ \delta\mathbf{q}'', \tag{29}$$

care se mai poate scrie

$$\delta L = \mathbf{Q}_F^T\ \delta\mathbf{q}. \tag{30}$$

Expresia forței generalizate corespunzătoare torsorului de reducere τ_0 este

unde

$$\mathbf{Q}_F = [\mathbf{Q}_F'^T\ \mathbf{Q}_F''^T]^T, \tag{31}$$

$$\mathbf{Q}_F' = \mathbf{R}' \tag{32}$$

$$\mathbf{Q}_F'' = \gamma^T\ \boldsymbol{\alpha}^T\ \mathbf{M}_0'. \tag{33}$$

Condiția necesară și suficientă de echilibru exprimată prin principiul deplasărilor virtuale este

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{34}$$

Condiția (34) se mai scrie

$$\mathbf{Q}_E' + \mathbf{Q}_F' = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{Q}_E'' + \mathbf{Q}_F'' = \mathbf{0}, \tag{35}$$

unde

$$\mathbf{Q}_E = \Sigma\ \mathbf{Q}_{ej} = -(\mathbf{I}_3\ \Lambda_j)^T\ \mathbf{k}_j(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\alpha}_0\ \mathbf{r}^j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

reprezintă forța generalizată corespunzătoare ansamblui celor n elemente elastice.

Introducînd (21), (22), (32) și (33) în (35) și (36) se obține

$$\mathbf{k}_j(\mathbf{q}' + \alpha_0 \mathbf{r}^j) = \mathbf{R},$$

$$\mathbf{\Lambda}_j^T \mathbf{k}_j(\mathbf{q}' + \alpha_0 \mathbf{r}^j) = \gamma^T \alpha^T \mathbf{M}_0 \ (j = 1, 2, \ldots, n,). \tag{37}$$

Forma explicită a sistemului de ecuații (37) este

$$k_{jl}(q_l + \alpha_{ls} r_s^j) = R_l' \begin{pmatrix} s = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, 3 \end{pmatrix},$$

$$k_{jx}(q_1 + \alpha_{01s} r_s^j) \frac{\partial \alpha_{1p}}{\partial q_l} r_p^j + k_{jy}(q_2 + \alpha_{02s} r_s^j) \frac{\partial \alpha_{2p}}{\partial q_l} r_p^j + \tag{38}$$

$$+ k_{jz}(q_3 + \alpha_{03s} r_s^j) \frac{\partial \alpha_{3p}}{\partial q_l} r_p^j = \gamma_{hl} \alpha_{th} M_t' \begin{pmatrix} p, s = 1, 2, 3; \ h, t = 1, 2, 3) \\ j = 1, 2, \ldots, n; \ l = 4, 5, 6 \end{pmatrix},$$

în care s-a utilizat notația (16) sub forma

$$x_j = r_1^j; \quad y_j = r_2^j; \quad z_j = r_3^j; \quad k_{jx} = k_{j1}; \quad k_{jy} = k_{j2}; \quad k_{jz} = k_{j3} \tag{39}$$

și notațiile

$$R_{x'} = R_1'; \ R_{y'} = R_2' \ R_{z'} = R_3'; \ M_{x'} = M_1'; \ M_{y'} = M_2' \ M_{z'} = M_3' \tag{40}$$

Ecuațiile (38) sînt liniare în raport cu $\mathbf{q}'$ și neliniare transcendente în raport cu $\mathbf{q}''$. Soluțiile acestui sistem nu pot fi în general explicitate analitic decît în cazuri particulare. Într-o astfel de situație poate fi aflată forța din orice element elastic. Astfel, pentru elementul elastic din punctul A, parametrii poziției de echilibru se introduc în expresia (6) pusă sub forma

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{k}(\mathbf{q}' + \alpha_0 \mathbf{r}). \tag{40'}$$

3. CONSIDERAȚII ASUPRA ECHILIBRULUI. CAZURI PARTICULARE

Cu ajutorul ecuațiilor de echilibru pot fi aflate condițiile în care solidul poate ocupa o poziție de echilibru prestabilită în raport cu poziția în care elementele elastice nu sînt tensionate. Astfel, dacă solidul rigid este adus din prima poziție cu elementele netensionate în a doua poziție printr-o translație geometrică finită, astfel încît sub acțiunea sistemului de forțe solidul să fie în echilibru în a doua poziție, trebuie să fie îndeplinite condițiile $\mathbf{q}'' = 0$ ($\varphi = \psi = \theta = 0$). În acest caz rezultă

$$\alpha = \gamma = \mathbf{I}_3; \quad \alpha_0 = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_j = \tilde{\mathbf{r}}^{jT}, \tag{41}$$

unde

$$\tilde{\mathbf{r}}^j = \begin{bmatrix} 0 & -z_j & y_j \\ z_j & 0 & -x_j \\ -y_j & x_j & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

reprezintă matricea pătratică asociată vectorului $\mathbf{r}^j$.

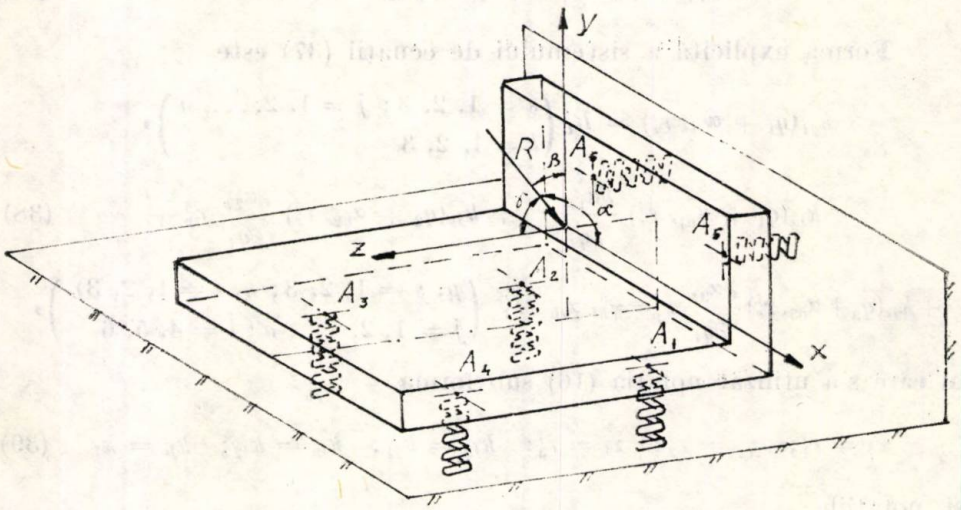


Fig. 3

Introducînd (41) în (37), se obține

$$(\sum_j \mathbf{k}_j)\,\mathbf{q}' = \mathbf{R}\,; \qquad \sum_j (\tilde{\mathbf{r}}^j\,\mathbf{k}_j)\,\mathbf{q}' = \mathbf{M}_0. \tag{43}$$

Din prima relație (43) se obine

$$\mathbf{q}' = (\sum_j \mathbf{k}_j)^{-1}\,\mathbf{R}, \tag{44}$$

adică sub formă explicită

$$q' = x_0 = \frac{R_{x'}}{\Sigma\, k_{jx}}\,; \quad q_2 = y_0 = \frac{R_{y'}}{\Sigma\, k_{jy}}\,; \quad q_3 = z_0 = \frac{R_{z'}}{\Sigma\, k_{jz}}\,, \tag{45}$$

unde numitorii reprezintă constante elastice echivalente ale sistemului de elemente elastice legate în paralel.

Introducînd (44) în a doua ecuație (43) rezultă

$$\sum_j (\tilde{\mathbf{r}}^j\,\mathbf{k}_j)\,(\sum_j \mathbf{k}_j)^{-1}\,\mathbf{R} = \mathbf{M}_0 \tag{46}$$

sau

$$\mathbf{E}\,\mathbf{R} = \mathbf{M}_0, \tag{47}$$

unde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & 0 & -\xi_3 \\ -\eta_1 & \xi_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

iar perechile de coordonate reprezintă ecuațiile axelor elasticității de ordinul unu $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ și $\bar{\zeta}$ paralele cu axele sistemului de coordonate $Oxyz$,

$$\bar{\xi} \parallel Ox \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\Sigma k_{jx}\, y_j}{\Sigma\, k_{jx}}; \\ \zeta_1 = \dfrac{\Sigma\, k_{jx}\, z_j}{\Sigma\, k_{jx}}; \end{cases} \qquad \bar{\eta} \parallel Oy \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{\Sigma\, k_{jy}\, x_j}{\Sigma\, k_{jy}} \\ \zeta_2 = \dfrac{\Sigma\, k_{jy}\, z_j}{\Sigma\, k_{jy}}; \end{cases}$$

$$\bar{\zeta} \parallel Oz \Rightarrow \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{\Sigma k_{jz}\, x_j}{\Sigma\, k_{jz}}, \\ \eta_3 = \dfrac{\Sigma\, k_{jz}\, y_j}{\Sigma\, k_{jz}}. \end{cases} \tag{49}$$

Pentru ca solidul translatat să fie în echilibru în noua sa poziție sub acțiunea torsorului $\tau_0\,(\mathbf{R}, \mathbf{M}_0)$, este necesară și suficientă îndeplinirea condițiilor (47). Forma explicită a condițiilor (47) este

$$\begin{aligned} -\zeta_2\, R_{y'} + \eta_3\, R_{z'} &= M_{x'}, \\ \zeta_1\, R_{x'} - \xi_3\, R_{z'} &= M_{y'}, \\ -\eta_1\, R_{x'} + \xi_2\, R_{y'} &= M_{z'}. \end{aligned} \tag{50}$$

Dacă reducerea sistemului de forțe se face în raport cu un punct oarecare de pe o axă de elasticitate, se obțin relații de condiție mai simple. Astfel, dacă se obține torsorul de reducere $\tau_0\,(\mathbf{R}, \mathbf{M}_0)$ în rapot cu un punct $A(\xi, \eta_1, \zeta_1)$ de pe axa $\bar{\xi}$ și se plasează sistemul de coordonate mobil în acest punct, atunci $\eta_1 = \xi_1 = 0$ și din (50) se obține

$$\frac{\eta_3}{\xi_3}\, M_{y'} + \frac{\zeta_2}{\xi_2}\, M_{z'} = -\, M_{x'}. \tag{51}$$

Reducînd sistemul de forțe la un punct de pe axa $\bar{\eta}$ sau $\bar{\zeta}$ se obține

$$\frac{\xi_3}{\eta_3}\, M_{x'} + \frac{\zeta_1}{\eta_1}\, M_{z'} = -\, M_{y'} \tag{52}$$

sau

$$\frac{\xi_2}{\zeta_2}\, M_{x'} + \frac{\eta_1}{\zeta_1}\, M_{y'} = -\, M_{z'}. \tag{53}$$

Să considerăm cazul particular curent cînd sistemul elastic admite un centru elastic, adică un punct de intersecție între două axe ale elasticității. Fie E' punctul de intersecție între axele $\overline{\xi}$ și $\overline{\eta}$ pentru care $\xi_1 = \zeta_2 = \zeta$. Considerînd torsorul de reducere în acest punct astfel încît acesta să coincidă cu origina sistemului de referință mobil, condiția $\zeta_1 = \zeta_2 = \xi_2 = \eta_1 = 0$ aplicată relațiilor (50) conduce la relația de condiție

$$\frac{M_{x'}}{M_{y'}} = -\frac{\eta_3}{\xi_3}. \tag{54}$$

Pentru $E'' = \overline{\eta} \cap \zeta$ avem $\xi_2 = \xi_3 = \xi$ și potrivit cu condiția $\eta_3 = \zeta_2 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, rezultă

$$\frac{M_{y'}}{M_{z'}} = -\frac{\zeta'}{\eta'}, \tag{55}$$

iar pentru $E''' = \overline{\xi} \cap \overline{\zeta}$ cu $\eta_1 = \eta_3 = \eta$ și respectiv $\eta_1 = \eta_3 = \zeta_1 = \xi_3 = 0$

$$\frac{M_{x'}}{M_{z'}} = -\frac{\zeta_2}{\xi_2}. \tag{56}$$

Dacă sistemul elastic admite un centru elastic prncipal, adică punctul de intersecție al acelor trei axe elastice, atunci avem simultan $\xi_2 = \xi_3 = \xi$, $\eta_1 = \eta_3 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, iar

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{r}}_E, \tag{57}$$

unde $\mathbf{r}_E = [\xi\ \eta\ \zeta]^T$ este vectorul de poziție al centrului elastic principal, E.

Introducînd (57) în (47) se obține

$$\tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{r}_E = \mathbf{M}_0, \tag{58}$$

unde $\tilde{\mathbf{R}}$ este matricea pătratică asimetrică asociată vectorului $\mathbf{R}$.

Relațiile (58) pot fi considerate ca un sistem algebric liniar în necunoscutele ξ, η și ζ. Deoarece $\det \tilde{\mathbf{R}} = 0$, numai două din ecuațiile sistemului (58) sînt independente, astfel încît relațiile de condiție (50) devin

$$\begin{aligned} -\zeta R_{y'} + \eta R_{z'} &= M_{x'}, \\ \zeta R_{x'} - \xi R_{z'} &= M_{y'}. \end{aligned} \tag{59}$$

Dacă solidul este adus dintr-o poziție cu elementele elastice netensionate într-o altă poziție printr-o rotație geometrică finită astfel încît sub acțiunea sistemului de forțe să fie în echilibru în această poziție, se pune condiția $\mathbf{q}' = 0$ ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$).

Sistemul (37) devine

$$\sum_j (\mathbf{k}_j \alpha_0 \mathbf{r}^j) = \mathbf{R}\,; \quad \sum_j (\Lambda_j^T \mathbf{k}_j \alpha_0 \mathbf{r}^j) = \gamma^T \alpha^T \mathbf{M}_0. \tag{60}$$

Eliminînd $\mathbf{q}''$ între aceste două ecuații se obține relația matriceală de condiție pentru acest caz.

Posibilitățile de aplicare ale relațiilor obținute pot fi mai bine ilustrate prin analiza unor cazuri particulare.

3.1. SISTEME PARTICULARE DE FORȚE

a) Torsorul de reducere este $\tau_0(\mathbf{R}, \mathbf{0})$

În cazul translației, expresiile (45) se păstrează, iar expresiile (50) iau forma

$$\begin{aligned} -\zeta_2 R_{y'} + \eta_3 R_{z'} &= 0, \\ \zeta_1 R_{x'} - \xi_3 R_{z'} &= 0, \\ -\eta_1 R_{x'} + \xi_2 R_{y'} &= 0, \end{aligned} \tag{61}$$

ce reprezintă un sistem omogen în $R_{x'}\ R_{y'}\ R_{z'}$.

Condiția de compatibilitate a sistemului (61) conduce la relația de condiție

$$\eta_1 \zeta_2 \xi_3 = \zeta_1 \xi_2 \eta_3, \tag{62}$$

iar forțele ce realizează echilibrul în condiția dată trebuie să îndeplinească două din condițiile (61), adică

$$\frac{R_{y'}}{R_{z'}} = \frac{\eta_3}{\zeta_2}; \quad \frac{R_{x'}}{R_{z'}} = \frac{\xi_3}{\zeta_1}. \tag{63}$$

Relațiile de condiție (51)—(56) și (59) sînt îndeplinite identic, astfel că pentru aceste cazuri nu există relații de condiție între parametrii sistemului elastic.

În cazul rotației, din (60) rezultă

$$\sum_j \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{R}; \quad \sum_j \boldsymbol{\Lambda}_j^T \boldsymbol{\lambda}_j = 0,$$

unde

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{k}_j \alpha_0 \mathbf{r}^j \neq \mathbf{0} \text{ pentru } \mathbf{r}^j \neq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

deci

$$\boldsymbol{\Lambda}_j = 0,\ j = 1, ,2, \ldots, n, \tag{64}$$

ceea ce se întîmplă numai dacă $\mathbf{r}^j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, adică cu acest torsor particular nu se poate realiza poziția de echilibru în urma unei rotații geometrice finite pure.

b) Sistemul forțelor exterioare este format numai din forțele de greutate cu torsorul de reducere

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} = [0 \; -G \; 0]^T, \tag{65}$$

$$\mathbf{M}_0 = (\alpha \, \tilde{\mathbf{r}}_c)\, \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}^T \, \alpha \, \mathbf{r}_c = [G \, \alpha_{3p} \, r_{cp} \; 0 \; -G \, \alpha_{1p} \, r_{cp}]^T,$$

unde $\mathbf{r}_c$ reprezintă vectorul de poziție al centrului de masă C.

La scrierea vectorului moment (65) s-a utilizat notația (16).

În cazul translației, relațiile (45), (65) și (50) devin

$$q_1 = q_3 = 0; \quad q_2 = y_0 = -\frac{G}{\Sigma k_{jy}}, \tag{66}$$

$$\mathbf{M}_0 = [G \, z_c \;\; 0 \;\; -G \, x_c]^T, \tag{67}$$

$$x_c = \frac{\Sigma k_{jy} \, z_j}{\Sigma k_{jy}}; \quad z_c = \frac{\Sigma k_{jy} \, x_j}{\Sigma k_{jy}}, \tag{68}$$

adică centrul de masă trebuie să se afle pe axa elastică $\overline{\eta}$.

Cînd punctele O și C coincid, $\mathbf{r}_c = \mathbf{0}$, relațiile (66) se păstrează, iar relațiile de condiție (68) devin

$$\Sigma k_{jy} \, z_j = \Sigma k_{jy} \, x_j = 0. \tag{69}$$

Ținînd seama de (65) și (67) se obțin forme particulare ale relațiilor (50)—(56) și (59).

3.2. DEFORMAȚII MICI ALE ELEMENTELOR ELASTICE

Acest caz se întîmplă cînd rigiditatea elementelor elastice este mare în raport cu torsorul forțelor exterioare, astfel că pot fi utilizate relațiile aproximative $\cos \varphi \simeq 1$, $\sin \varphi \simeq 1$, $\cos \psi \simeq 1$ etc. Rezultă

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\theta & \psi \\ \theta & 1 & -\varphi \\ -\psi & \varphi & 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha_0 = \tilde{\mathbf{q}}'' = \begin{bmatrix} 0 & -\theta & \psi \\ \theta & 0 & -\varphi \\ -\psi & \varphi & 0 \end{bmatrix}. \tag{69'}$$

Introducînd (69) în (36) și ținînd seama că

$$\mathbf{A}_j = \tilde{\mathbf{r}}^{jT}; \quad \alpha_0 \, \mathbf{r}^j = \tilde{\mathbf{r}}^{jT} \, \mathbf{q}'',$$

se obține

$$\mathbf{Q} = -\Sigma [\mathbf{I}_3 \, \tilde{\mathbf{r}}^{jT}]^T \, \mathbf{k}_j \, [\mathbf{I}_3 \, \tilde{\mathbf{r}}^{jT}] \, \mathbf{q}. \tag{70}$$

Efectuînd calculele, rezultă

$$\mathbf{Q}_e = -\mathbf{K}\mathbf{q}, \tag{71}$$

unde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_t & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^T & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}, \tag{72}$$

$$\mathbf{k}_t = \Sigma \begin{bmatrix} k_{jx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{jy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{jz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_k = \sum_j \mathbf{k}_j \tilde{\mathbf{r}}^{jT} = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & k_{jx} z_j & -k_{jx} y_j \\ -k_{jy} z_j & 0 & k_{jy} x_j \\ k_{jz} y_j & -k_{jz} x_j & 0 \end{bmatrix}, \tag{73}$$

$$\mathbf{J}_k = \sum_j \tilde{\mathbf{r}}^j \mathbf{k}_j \tilde{\mathbf{r}}^{jT} = \Sigma \begin{bmatrix} k_{jy} z_i^2 + k_{jz} y_i^2 & -k_{jz} x_j y_j & -k_{jy} x_j z_j \\ -k_{jz} y_j x_j & k_{jx} z_j^2 + k_{jz} x_j^2 & -k_{jx} y_j z_j \\ -k_{jy} z_j x_j & -k_{jx} z_j y_j & k_{jy} x_j^2 + k_{jx} y_j^2 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{K}$ se numește matrice de elasticitate, iar $\mathbf{h}_t$ $\mathbf{S}_k$ și $\mathbf{J}_k$ sînt matricele momentelor de ordinul 0, 1 și 2 ale elasticității.

Exprimînd energia potențială a sistemului elastic prin forma pătratică pozitivă,

$$V = -\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \tag{74}$$

unde U reprezintă funcția de forță, se observă că

$$\mathbf{Q}_e = \nabla U = -\nabla V. \tag{75}$$

În termenii expresiilor (71) și (72), ecuațiile de echilibru (37) devin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t \mathbf{q}' + \mathbf{S}_k \mathbf{q}'' &= \mathbf{R}, \\ \mathbf{S}_k^T \mathbf{q}' + \mathbf{J}_k \mathbf{q}'' &= \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_0. \end{aligned} \tag{76}$$

Ținînd seama de (69) și că

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi \\ 0 & -\varphi & 1 \end{bmatrix}, \tag{77}$$

se obține

$$\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0 + \overline{\mathbf{M}}_0 \mathbf{q}'', \tag{78}$$

unde

$$\overline{\mathbf{M}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -M_{z'} & M_{y'} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{x'} & 0 \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Introducînd (78) în (76), rezultă forma liniarizată a ecuațiilor de echilibru

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t \mathbf{q}' + \mathbf{S}_k \mathbf{q}'' &= \mathbf{R}, \\ \mathbf{S}_k^T \mathbf{q}' + (\mathbf{J}_k - \overline{\mathbf{M}}_0) \mathbf{q}'' &= \mathbf{M}. \end{aligned} \tag{80}$$

Deoarece determinantul sistemului (80) este întotdeauna diferit de zero, soluţia este

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_t & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^T & \mathbf{J}_k - \overline{\mathbf{M}}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}. \tag{81}$$

Introducînd (81) în expresia forţei elastice din elementul elastic j pusă sub forma

$$\mathbf{F}_{ej} = -\mathbf{k}_j \mathbf{q}' - \mathbf{S}_{kj} \mathbf{q}'', \tag{82}$$

se obţine expresia forţei elastice funcţie de torsorul forţelor exterioare.

Pentru deplasare prin translaţie în poziţia de echilibru, rămîn valabile relaţiile (50)—(56) şi (59).

Pentru deplasarea prin rotaţie pură în poziţia de echilibru $\mathbf{q}' = 0$ şi sistemul (80) devine

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k \mathbf{q}'' &= \mathbf{R}, \\ (\mathbf{J}_k - \overline{\mathbf{M}}_0) \mathbf{q}'' &= \mathbf{M}_0, \end{aligned} \tag{83}$$

de unde

$$\mathbf{q}'' = (\mathbf{J}_k - \overline{\mathbf{M}}_0)^{-1} \mathbf{M}_0, \tag{84}$$

şi relaţia de condiţie

$$\mathbf{S}_k (\mathbf{J}_k - \overline{\mathbf{M}}_0)^{-1} \mathbf{M}_0 = \mathbf{R}, \tag{85}$$

cu observaţia că matricea $\mathbf{S}_k$ este singulară.

Cazul particular al torsorului $\tau_0(\mathbf{R}, \mathbf{0})$ conduce la relaţia imposibilă $\mathbf{J}_k \mathbf{q}'' = 0$, unde $\mathbf{q}'' \neq 0$ dar şi $\mathbf{J}_k \neq 0$ deoarece elementele de pe diagonala principală sînt diferite de zero, deci acţiunea unui astfel de torsor nu satisface condiţia impusă. Acţiunea torsorului $\tau_0(0, \mathbf{M}_0)$ conduce la relaţia (84) şi la condiţia

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{0}, \tag{86}$$

adică obţinerea unei rotaţii este posibilă numai dacă punctul O coincide cu centrul elastic principal al sistemului dacă acesta există.

Considerînd acţiunea torsorului forţelor de greutate (65), expresia momentului $\mathbf{M}_0$, ţinînd seama de (69), este

$$\mathbf{M}_0 = G[-x_c \psi + y_c \varphi + z_c \quad 0 \quad -x_c + y_c \theta - z_c \psi]^T. \tag{87}$$

Utilizînd (69), (77), (78) şi păstrînd numai termenii liniari se obţine

$$\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_c \mathbf{G} + G y_c \mathbf{I}_3' \mathbf{q}'', \tag{88}$$

unde

$$\mathbf{I}_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relaţiile (76) devin

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}_t\,\mathbf{q}' + \mathbf{S}_k\,\mathbf{q}'' = \mathbf{G}, \\ &\mathbf{S}_k^T\,\mathbf{q}' + (\mathbf{J}_k - G y_c\,\mathbf{I}_3')\,\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{r}}_c\,\mathbf{G}. \end{aligned} \tag{89}$$

4. APLICAŢIE

Se consideră suportul antivibratil din figura 3, montat pe un set de arcuri elicoidale identice. Forţele exterioare se reduc numai la rezultanta **R**,

$$\mathbf{R} = [R\cos\alpha \quad R\cos\beta \quad R\cos\gamma]^T \tag{90}$$

ce trece prin originea sistemului de referinţă mobil.

Arcurile se consideră încastrate în structura fixă şi în punctele $A_j(x_j, y_j, z_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ de pe suport. Coordonatele lor sînt :

$$\begin{aligned} &x_1 = x_4 = x_5 = a\,; \qquad y_j = -b\ (j = 1, 2, 3, 4), \qquad z_1 = z_2 = c\,; \qquad z_5 = z_6 = -c', \\ &x_2 = x_3 = x_6 = -a\,; \qquad y_5 = y_6 = b'\,; \qquad z_3 = z_4 = 2c. \end{aligned} \tag{91}$$

Fie k şi k_t constantele elastice longitudinală şi respectiv transversală a unui arc elicoidal [2]. Rezultă

$$\begin{aligned} &k_{jx} = k_{jz} = k_t\,; \qquad k_{jy} = h \quad (j = 1, 2, 3, 4), \\ &k_{jx} = k_{jy} = k_t\,; \qquad h_{jz} = k \quad (j = 5, 6). \end{aligned} \tag{92}$$

Suportul rămîne paralel cu el însuşi şi sub acţiunea forţei R dacă se îndeplinesc condiţiile (63), adică

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\xi_3}{\zeta_1}, \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\eta_3}{\zeta_2}. \tag{93}$$

Introducînd (92) şi (91) în (49) se obţine

$$\begin{aligned} &\eta_1 = b' - 2b\,; \qquad \xi_2 = 0\,; \qquad \xi_3 = 0, \\ &\zeta_1 = 3c - c'\,; \qquad \zeta_2 = \frac{3kc - k + c'}{2k + k_t}\,; \qquad \eta_3 = \frac{kb' - 2k_t\,b}{k + 2k_t}. \end{aligned} \tag{94}$$

Ţinînd seama de (94), din prima relaţie (93) se obţine $\cos\alpha = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$, dacă $3c \neq c'$, deci forţa trebuie să se afle în planul de simetrie a punctelor $A_j (j = 1, 2, \ldots, 6)$.

Din a doua condiţie (93), avînd în vedere că îndeplinirea primei condiiţii conduce la $\cos\gamma = \sin\beta$, se obţine

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{2k + k_t}{k + 2k_t} \cdot \frac{kb' - 2k_t b}{3kc - k_t c}. \tag{95}$$

În ipoteza deformaţiilor mici, introducînd (92) şi (93) în (74) se obţine

$$\mathbf{k}_t = 2\begin{bmatrix} 3k_t & 0 & 0 \\ 0 & 2k+k_t & 0 \\ 0 & 0 & k+2k_t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_k = 2\begin{bmatrix} 0 & k_t(3c-c') & k_t(2b-b') \\ -3kc+k_tc' & 0 & 0 \\ kb' - k_t b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{96}$$

$$\mathbf{J}_k = 2\begin{bmatrix} k(5c^2+b'^2)+k_t(2b^2+c'^2) & 0 & 0 \\ 0 & ka^2+k_t(5c^2+2a^2+c'^2) & k_t(3cb + b'c') \\ 0 & k_t(3bc+b'c') & 2ka^2+k_t(2b^2+a^2+b'^2) \end{bmatrix}.$$

Relaţia (81) vectorului poziţiei de echilibru este

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_t & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^T & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{97}$$

Pentru cazul particular cînd $b = b' = c = c'$ şi $k_t = k$ se obţine

$$\mathbf{k}_t = 6k\,\mathbf{I}_3; \quad \mathbf{S}_k = 4\,ka\,\mathbf{S}; \quad \mathbf{J}_k = 2ka^2\mathbf{J},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}. \tag{98}$$

Introducînd (98) în (97), rezultă

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2k}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & 2\mathbf{S} \\ 2\mathbf{S} & \mathbf{J} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{99}$$

În expresia (99) s-a utilizat convenţia de înmulţire astfel încît termenii primei matrice se înmulţesc cu blocurile celei de-a doua.

Efectuînd calculele, se obţine

$$x_0 = 0{,}413\frac{R}{k}\cos\alpha,$$

$$y_0 = (0{,}547\cos\beta + 0{,}19\cos\gamma)\frac{R}{k},$$

$$z_0 = (0{,}19\cos\beta + 0{,}262\cos\gamma)\frac{R}{k},$$

$$\varphi = (0{,}285 \cos \beta + 0{,}143 \cos \gamma) \frac{R}{ka},$$

$$\psi = -0{,}174 \frac{R}{ka} \cos \alpha,$$

$$\theta = -0{,}021 \frac{R}{ka} \cos \alpha.$$

Primit în redacție la 9 mai 1988

BIBLIOGRAFIE

1. R. F. GAINEV, V. O. KONONENKO, *Kolebania tverdih tel*, Izd. Nauka, Moskva, 1976.
2. M. MUNTEANU, *Dynamics of single mass vibrating machines mounted on elastic supports. General case*. Bul. Inst. Polit. București, seria Mecanică, **XLVI—XLVII**, 1984—1985.
3 M. MUNTEANU, *Caracteristicile elementelor elastice liniare triaxiale*. Bul. Inst. Polit. București, seria Mecanică (sub tipar).

ASUPRA SEMIPLANULUI ELASTIC ÎNCĂRCAT CU SARCINĂ NORMALĂ DISTRIBUITĂ PE FRONTIERĂ, CU APLICAȚIE LA PROBLEMA CONTACTULUI PLAN

de V. BURACU

Academia Militară, București

Lucrarea studiază semiplanul elastic solicitat pe frontieră cu o sarcină normală, distribuită după o lege oarecare.
Sînt obținute formule pentru a descrie starea elastică (deplasări și tensiuni) a semiplanului. Ca o aplicație la acest studiu este descris fenomenul de contact elastic (plan) între un cilindru rigid de lungime infinită și semispațiul elastic.

1. NOTAȚII

x, y, z, ξ, η — coordonate carteziene;
u, v, w — componentele vectorului deplasare;
$\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$ — componente ale tensorului deformație;
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$ — componente ale tensorului tensiune;
ρ — rază de curbură;
E — modul de elasticitate al lui Young;
ν — coeficientul lui Poisson.

2. INTRODUCERE

Se cunoaște din studiul problemei lui Neumann pentru semispațiul elastic $z \geqslant 0$, că în cazul unei încărcări normale $p(\xi, \eta)$ repartizate pe un domeniu mărginit D situat pe frontiera $z = 0$ a semispațiului, componentele deplasării unui punct de coordonate (x, y, z) din interiorul semispațiului pot fi obținute cu ajutorul reprezentării lui Hertz ([3]):

$$u(x, y, z) = z\frac{\partial \Omega}{\partial x}(x, y, z) + (1-2\nu)\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, y, z),$$

$$v(x, y, z) = z\frac{\partial \Omega}{\partial y}(x, y, z) + (1-2\nu)\frac{\partial \omega}{\partial y}(x, y, z), \tag{1}$$

$$w(x, y, z) = z\frac{\partial \Omega}{\partial z}(x, y, z) - 2(1-\nu)\,\Omega(x, y, z).$$

Funcțiile Ω și ω sînt funcții armonice în interiorul semispațiului, fiind cunoscute ca potențialii lui Hertz:

$$\Omega(x, y, z) = -\frac{1+\nu}{2\pi E}\iint_D \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\omega(x, y, z) = -\frac{1+\nu}{2\pi E}\iint_D p(\xi, \eta)\ln(z+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2})\,d\xi\,d\eta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z}(x, y, z) = \Omega(x, y, z).$$

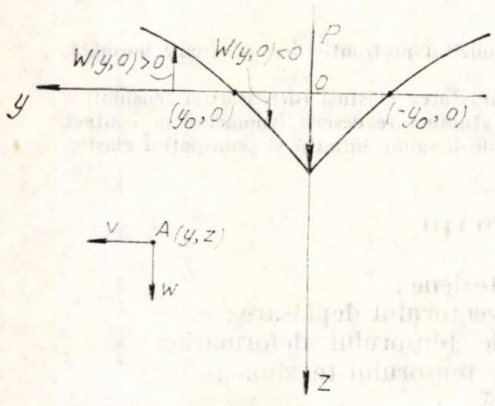


Fig. 1

În această lucrare se studiază posibilitatea găsirii unei reprezentări similare în cazul semiplanului elastic. Spre deosebire de cazul tridimensional, în care soluția (1) a fost obținută cu ajutorul reprezentării Neuber-Papkovici, cel bidimensional va fi abordat cu ajutorul unui alt rezultat cunoscut din teoria elasticității : problema Flamand-Boussinesq. Această problemă furnizează o soluție pentru componentele deplasării unui punct A de coordonate (y, z) ce aparține semiplanului elastic $z \geqslant 0$, supus acțiunii unei forțe concentrate P aplicate în O, normală la frontiera semiplanului (fig. 1) :

$$v(y, z) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi E}\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{y} - \pi\,\mathrm{sign}\,y\right) + \frac{(1+\nu)P}{\pi E}\cdot\frac{yz}{y^2+z^2},$$

$$w(y, z) = \frac{(1-\nu^2)P}{\pi E}\ln\frac{y^2}{y^2+z^2} + \frac{(1+\nu)P}{\pi E}\cdot\frac{z^2}{y^2+z^2}. \quad (3)$$

În (3), y_0 reprezintă abscisa unui punct aparținînd frontierei semiplanului ($z = 0$) ce are deplasare verticală nulă.

Pentru obținerea lui (3) autorul recomandă efectuarea calculelor ce decurg urmînd indicațiile din [1], pentru o stare plană de deformații.

3. REPREZENTAREA DEPLASĂRILOR ȘI TENSIUNILOR PENTRU SEMIPLANUL ELASTIC

Fie a, b numere reale astfel încît $a < b$. Vom considera că frontiera semiplanului este supusă unei încărcări normale cunoscute $p(\eta)$, distribuite pe intervalul $[a, b]$, $p(\eta)$ funcție integrabilă pe $[a, b]$. Admițînd ipoteza însumării efectelor presiunii distribuite pe $[a, b]$, deplasările elementare ale punctului $A(y, z)$ din interiorul semiplanului elastic, produse de forța elementară $p(\eta)\,d\eta$ se vor obține din (3) prin înlocuirile (fig. 2) :

$$P \to p(\eta)\,d\eta,\ y \to y - \eta,\ y_0 \to y_0(\eta) + \eta, \quad (4)$$

constanta y_0 din (3) devenind acum funcție de variabila η. Rezultă

$$dv(y, z) = \left[\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{z}{y-\eta} - \pi \operatorname{sign}(y-\eta)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\nu}{\pi E} \frac{z(y-\eta)}{(y-\eta)^2+z^2}\right] p(\eta)\, d\eta, \tag{5}$$

$$dw(y, z) = \left[\frac{1-\nu^2}{\pi E} \ln \frac{(y_0(\eta)+\eta)^2}{(y-\eta)^2+z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\nu}{\pi E} \cdot \frac{z^2}{(y-\eta)^2+z^2}\right] p(\eta)\, d\eta.$$

Deplasarea totală a punctului $A(y, z)$ va fi obținută prin integrarea relațiilor (5), așa încît:

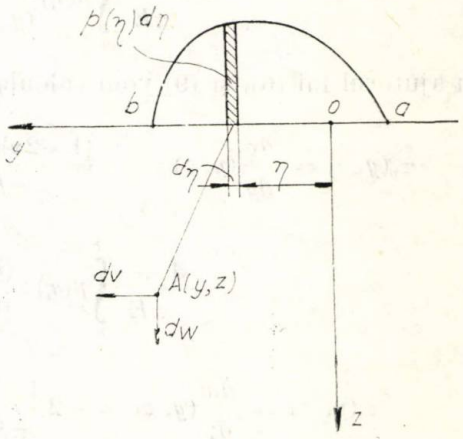


Fig. 2

$$v(y,z) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \times$$

$$\times \int_a^b p(\eta)\left(2 \operatorname{arctg} \frac{z}{y-\eta} - \right.$$

$$\left. - \pi \operatorname{sign}(y-\eta)\right) d\eta + \frac{1+\nu}{\pi E} \int_a^b p(\eta) \frac{z(y-\eta)}{(y-\eta)^2+z^2}\, d\eta, \tag{6}$$

$$w(y, z) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_a^b p(\eta) \ln \frac{(y_0(\eta)+\eta)^2}{(y-\eta)^2+z^2}\, d\eta +$$

$$+ \frac{1+\nu}{\pi E} \int_a^b p(\eta) \frac{z^2}{(y-\eta)^2+z^2}\, d\eta.$$

Din $(6)_2$ pentru $z = 0$ rezultă că $w(y, 0)$ poate lua valori negative dacă y este suficient de mare, în timp ce pentru y în $[a, b]$, $w(y, 0)$ e pozitiv. Funcțiile v și w fiind continue în raport cu y și z, rezultă că există cel puțin un punct $(y_0, 0)$, pe frontiera $z = 0$ a semiplanului, astfel încît $w(y_0, 0) = 0$.

Aceasta înseamnă

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_a^b p(\eta) \ln \frac{(y_0(\eta)+\eta)^2}{(y_0-\eta)^2}\, d\eta = 0, \tag{7}$$

egalitate care este satisfăcută pentru

$$y_0(\eta) = -y_0. \tag{8}$$

Cu ajutorul lui (8) vom putea scrie $(6)_2$ sub forma :

$$w(y,z) = 2\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\ln\frac{|y_0-\eta|}{\sqrt{(y-\eta)^2+z^2}}\,d\eta + \\ + \frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{z^2}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta. \tag{9}$$

Cu ajutorul lui $(6)_1$ și (9) vom calcula deformațiile specifice :

$$\varepsilon_y(y,z) = \frac{\partial v}{\partial y}(y,z) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{z^2}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta - \\ -\frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\,z\frac{(y-\eta)^2-z^2}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta,$$

$$\varepsilon_z(y,z) = \frac{\partial w}{\partial z}(y,z) = -2\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{z}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta + \\ + 2\frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{z(y-\eta)^2}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta. \tag{10}$$

$$\gamma_{yz}(y,z) = \frac{\partial v}{\partial z}(y,z) + \frac{\partial w}{\partial y}(y,z) = -\frac{4(1+\nu)}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{z^2(y-\eta)}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta.$$

Componentele tensorului tensiune vor rezulta din legea lui Hooke. Deoarece ne găsim în cazul unei stări plane de deformație vom avea :

$$\sigma_y(y,z) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\,\varepsilon_y(y,z) + \nu\varepsilon_z(y,z)] = \\ = -\frac{2}{\pi}z\int_a^b\frac{p(\eta)}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta + \frac{2}{\pi}z^3\int_a^b\frac{p(\eta)}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta,$$

$$\sigma_z(y,z) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z(y,z) + \nu\varepsilon_y(y,z)] = \\ = -\frac{2}{\pi}z^3\int_a^b p(\eta)\frac{1}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta. \tag{11}$$

$$\tau_{yz}(y, z) = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}(y, z) = -\frac{2z^2}{\pi}\int_a^b p(\eta)\frac{y-\eta}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta,$$

$$\sigma_x(y, z) = \nu\,[\sigma_y(y, z) + \sigma_z(y, z)] = -\frac{2\nu}{\pi}z\int_a^b p(\eta)\frac{1}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta.$$

Formulele (11) soluționează cîmpul de tensiune pentru semiplanul elastic încărcat pe porțiunea $[a, b]$ a frontierei cu sarcina normală cunoscută $p(\eta)$.

Revenim acum la formulele lui Hertz (1). Vom presupune că și în cazul semiplanului elastic există două funcții armonice în interiorul semiplanului Ω și ω, astfel încît formulele (1) să rămînă iar valabile. Deoarece starea elastică nu depinde de variabila x ($\partial/\partial x = 0$), iar deplasarea u este nulă, rezultă că funcțiile Ω și ω vor verifica următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale :

$$\begin{aligned} v(y, z) &= z\frac{\partial\Omega}{\partial y}(y, z) + (1-2\nu)\frac{\partial\omega}{\partial y}(y, z),\\ w(y, z) &= z\frac{\partial\Omega}{\partial z}(y, z) - 2(1-\nu)\Omega(y, z),\\ \frac{\partial\omega}{\partial z}(y, z) &= \Omega(y, z). \end{aligned} \tag{12}$$

Comparînd $(12)_2$ cu (9), rezultă că o soluție a ecuației $(12)_2$ este funcția :

$$\Omega(y, z) = -\frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\ln\frac{|y_0-\eta|}{\sqrt{(y_0-\eta)^2+z^2}}\,d\eta. \tag{13}$$

Se verifică imediat că această funcție este armonică în interiorul semiplanului. Deoarece funcția

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y}(y, z) = \frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta$$

este regulată la infinit și, $\int_z^\infty [\partial\Omega(y, z)/\partial y]\,dz$ este convergentă, folosind $(12)_3$ se poate scrie :

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}(y, z) = -\int_z^\infty \frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial z}(y, z)\,dz = -\int_z^\infty \frac{\partial\Omega}{\partial y}(y, z)\,dz =$$

$$= -\frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\left[\int_z^\infty \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+z^2}\,dz\right]d\eta. \tag{14}$$

Cum

$$\int_z^\infty \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y-\eta) - \operatorname{arctg}\frac{z}{y-\eta}, \tag{15}$$

rezultă că $(12)_1$ se scrie sub forma :

$$v(y,z) = \frac{1+\nu}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\frac{z(y-\eta)}{(y-\eta)^2+z^2}\,d\eta + \\ + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E}\int_a^b p(\eta)\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(y-\eta) - \operatorname{arctg}\frac{z}{y-\eta}\right]d\eta, \tag{16}$$

adică tocmai $(6)_1$.

Funcția ω rezultă, de asemenea, armonică întrucît

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}(y,z) = -\int_z^\infty \frac{\partial^3\omega}{\partial y^2\partial z}(y,z)\,dz = -\int_z^\infty \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}(y,z)\,dz, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}(y,z) = \frac{\partial\Omega}{\partial z}(y,z) = -\int_z^\infty \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(y,z)\,dz. \tag{17}$$

Să observăm că formulele de reprezentare (14) și (17) sînt valabile numai pentru derivatele funcției ω nu și pentru funcția ω însăși. Aceasta provine din faptul că $\int_z^\infty \Omega(y,z)\,dz$ nu este convergentă.

Am dovedit astfel că soluția problemei lui Neumann pentru semispațiul elastic, exprimată prin formulele lui Hertz (1), își menține valabilitatea și în cazul semiplanului elastic (formulele (12)) cu prețul înlocuirii potențialului dat de $(2)_1$ cu cel dat de (13). Funcțiile Ω date de $(2)_1$ și (13) se numesc, în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic, potențiali de strat simplu. Să mai remarcăm că în cazul încărcării frontierei semiplanului cu sarcina normală $p(\eta)$, distribuită nu pe un interval $[a, b]$ ci pe o reuniune de intervale $[a_i, b_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, soluția (13) a sistemului (12) își menține valabilitatea prin extinderea integralei la $\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$.

4. APLICAȚIE. CONTACTUL UNUI CILINDRU RIGID, INFINIT LUNG CU SEMISPAȚIUL ELASTIC

Fie C un corp cilindric, rigid, infinit lung pe care-l vom numi ștanță, aflat în contact cu semispațiul elastic, inițial în lungul unei generatoare. Vom presupune că ștanța este supusă acțiunii unui sistem de forțe, reduc-

tibil la o sarcină normală pe frontiera semispațiului în lungul generatoarei de contact, uniform distribuită de-a lungul lui C. Starea elastică din interiorul semispațiului nu va depinde de poziția unei secțiuni în semispațiul elastic, normală la generatoarea cilindrului. Problema este plană în deformații; studiul se poate face într-un plan normal la generatoarea cilindrului. Sistemele de coordonate atașate semispațiului și ștanței vor fi orientate ca în figura 3, axa Ox având direcția generatoarei de contact.

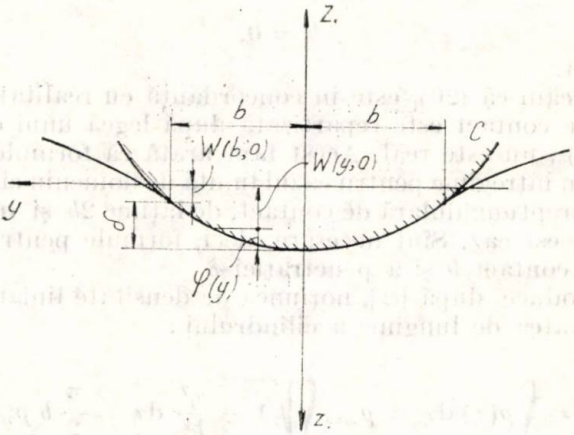


Fig. 3

Notînd cu $Z = \varphi(y)$ ecuația frontierei ștanței, vom presupune că funcția φ este de clasă cel puțin C^2 pe porțiuni. Punctul de contact O nu este punct de inflexiune pentru curba $Z = \varphi(y)$ la care axa Oy este tangentă în O. Aceasta înseamnă:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \tag{18}$$

Echilibrul sistemului ștanță-semispațiu se va stabili cînd ștanța va fi pătruns la o anumită adîncime δ, cînd generatoarea inițială de contact va fi înlocuită cu o suprafață de contact pe care ștanța vine acum în atingere cu frontiera deformată a semispațiului și cînd tensiunile ce iau naștere pe această suprafață vor face echilibru forțelor aplicate asupra ștanței.

Să mai presupunem că ștanța prezintă simetrie în raport cu planul $y = 0$, ceea ce înseamnă că funcția φ este pară ($\varphi(-y) = \varphi(y)$).

Dacă deplasările și deformațiile ce apar sînt suficient de mici, suprafața cilindrică de contact poate fi înlocuită cu o suprafață dreptunghiulară infinită avînd două laturi paralele cu axa Ox, distanța între ele fiind de lungime necunoscută $2b$ (fig. 3). S-a demonstrat în [3] că pentru un domeniu de contact de formă eliptică avînd semiaxele a și b, repartiția presiunii de contact se face după legea unui elipsoid:

$$p(\xi, \eta) = p_{max} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}, \tag{19}$$

p_{max} fiind valoarea maximă a presiunii de contact ce se realizează în centrul elipsei. În [3] se dau formule pentru determinarea lui p_{max}, a, b, δ în funcție de încărcarea și geometria ștanței. Aplicarea acestor formule la cazul considerat în acest studiu conduce la

$$a = +\infty,$$

$$p(\eta) = p_{max}\sqrt{1-\frac{\eta^2}{b^2}}, \tag{20}$$

$$b = 0,$$

δ nedeterminat.

Să remarcăm că $(20)_1$ este în concordanță cu realitatea; $(20)_2$ arată că presiunea de contact este repartizată după legea unui cilindru eliptic, în timp ce $(20)_3$, nu este real. Acest fapt arată că formulele din [3] nu pot fi aplicate în întregime pentru cazul limită de domeniu eliptic de contact care este fișia dreptunghiulară de contact, de lățime $2b$ și lungime infinită, ce rezultă în acest caz. Sînt necesare, deci, formule pentru determinarea semilățimii de contact b și a penetrației δ.

Vom introduce, după [2], noțiunea de densitate liniară a distribuției sarcinii pe unitatea de lungime a cilindrului:

$$q = \int_{-b}^{b} p(\eta)\,d\eta = p_{max}\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{\eta^2}{b^2}}\,d\eta = \frac{\pi}{2}\,b\,p_{max}. \tag{21}$$

Neglijînd componenta orizontală a deplasării frontierei semiplanului sub ștanță obținem (fig. 3):

$$w(y, 0) - w(b, 0) = \delta - \varphi(y). \tag{22}$$

Pentru $z = 0$ și $a = -b$, din (9) și (22) rezultă

$$2\,\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_{-b}^{b} p(\eta)\ln\frac{|b-\eta|}{|y-\eta|}\,d\eta = \delta - \varphi(y). \tag{23}$$

Vom numi (23), după [3], ecuație integrală de contact elastic plan. Membrul stîng din (23) prezintă singularități în $\eta = b$ și $\eta = y$ cînd $y \in [-b, b]$, dar acestea sînt înlăturabile, astfel încît integrala este convergentă. Pentru calculul acesteia să notăm

$$I(y) = \int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{\eta^2}{b^2}}\ln\frac{|b-\eta|}{|y-\eta|}\,d\eta. \tag{24}$$

Prin schimbarea de variabilă $y - \eta = u$, obținem ([5], p. 74)

$$I'(y) = -\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{\eta^2}{b^2}}\,\frac{d\eta}{y-\eta} = -\pi\,\frac{y}{b}. \tag{25}$$

Deoarece $I(b) = 0$, (24) devine :

$$I(y) = \frac{\pi}{2b}(b^2 - y^2). \tag{26}$$

Cum b este mic, iar funcția φ a fost presupusă de clasă cel puțin C^2 pe porțiuni, putem aproxima $\varphi(y)$ prin polinomul Taylor de gradul al doilea asociat funcției φ în punctul $y = 0$. În concordanță cu (18) obținem

$$\varphi(y) \simeq \frac{\varphi''(0)}{2} y^2. \tag{27}$$

Se cunoaște, de asemenea, că raza de curbură a curbei φ în origine se calculează cu formula :

$$\rho = \frac{(1 + \varphi'^2(0))^{3/2}}{|\varphi''(0)|}. \tag{28}$$

Din (18), (21), (23), (26), (27), (28) și ținînd seama că $\varphi''(0) > 0$, rezultă

$$2\frac{1 - \nu^2}{\pi E} q\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = \delta - \frac{y^2}{2\rho}. \tag{29}$$

Formula (29) furnizează valorile semilățimii zonei de contact și a penetrației :

$$b = 2\sqrt{q\frac{1 - \nu^2}{\pi E}\rho}, \tag{30}$$

$$\delta = 2q\frac{1 - \nu^2}{\pi E}. \tag{31}$$

O importanță deosebită prezintă determinarea efectivă a stării elastice a semispațiului solicitat de ștanța rigidă acum cînd $p(\eta)$ și b sînt determinate. Notînd

$$I_1(y, z) = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}\,\frac{1}{(y - \eta)^2 + z^2}\,d\eta,$$

$$I_2(y, z) = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}\,\frac{1}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta, \tag{32}$$

$$I_3(y, z) = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}\,\frac{y-\eta}{[(y-\eta)^2+z^2]^2}\,d\eta,$$

formulele (11) care dau componentele tensorului tensiune în semispațiul elastic devin :

$$\sigma_y(y, z) = -\frac{2}{\pi} b\, p_{max}[z\, I_1(y, z) - z^3 I_2(y, z)],$$

$$\sigma_z(y, z) = -\frac{2}{\pi} b p_{max} z^3\, I_2(y, z), \tag{33}$$

$$\tau_{yz}(y, z) = -\frac{2}{\pi} bp_{max} z^2 I_3(y, z),$$

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{2\nu}{\pi} bp_{max} z I_1(y, z).$$

Integralele din (32) au fost calculate printr-o succesiune de schimbări de variabilă : $\eta = tb$, $u^2 = \dfrac{1-t}{1+t}$ (bijective) integranzii fiind aduși la funcții raționale și folosindu-se [5]. Notînd :

$$\alpha = \sqrt{\frac{z^2 + (b-y)^2}{z^2 + (b+y)^2}}; \qquad \beta = \sqrt{2\alpha + 2\frac{z^2 + y^2 - b^2}{z^2 + (b+y)^2}},$$
$$\gamma = z^2 + (b+y)^2, \tag{34}$$

(33) devine :

$$\sigma_y(y, z) = -2bp_{max}\left[\frac{z}{b^2}\left(\frac{1+\alpha}{\beta} - 1\right) - \frac{2z^3(1+\alpha)}{\alpha\beta^3\gamma^2}\right],$$

$$\sigma_z(y, z) = -4bz^3 p_{max}\frac{1+\alpha}{\alpha\beta^3\gamma^2},$$

$$\tau_{yz}(y, z) = -4bz^2 p_{max}\frac{y(1+\alpha) - b(1-\alpha)}{\alpha\beta^3\gamma^2}, \tag{35}$$

$$\sigma_x(y, z) = -2\nu p_{max}\frac{z}{b}\left(\frac{1+\alpha}{\beta} - 1\right).$$

Se verifică cu ușurință că pentru $|y| \leqslant b$;

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\beta} = \frac{(b+y)\sqrt{b^2 - y^2}}{2b},$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{y(1+\alpha) - b(1-\alpha)}{z} = 0, \tag{36}$$

ceea ce arată că pentru punctele aflate în interiorul zonei de contact ($z = 0$, $|y| \leqslant b$) starea de tensiune este dată de

$$\sigma_y(y, 0) = -p_{max}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$\sigma_z(y, 0) = -p_{max}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

$$\tau_{yz}(y, 0) = 0, \tag{37}$$

$$\sigma_x(y, 0) = -2\nu p_{max}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Formula $(37)_2$ justifică formula $(20)_2$ obținută prin trecere la limită din (19) (valabilă pentru cazul tridimensional). Se confirmă, de asemenea, și $(37)_3$, care în cazul tridimensional a condus la (19) (vezi [3]).

În exteriorul zonei de contact, pe frontiera semispațiului, starea de tensiune este nulă. Se observă, de asemenea, că

$$\lim_{\substack{|y|\to\infty \\ z\to\infty}} z\, I_1(y, z) = \lim_{\substack{|y|\to\infty \\ z\to\infty}} z^3\, I_2(y, z) = \lim_{\substack{|y|\to\infty \\ z\to\infty}} z^2\, I_3(y, z) = 0, \tag{38}$$

ceea ce arată că starea de tensiune este nulă și în punctul de la infinit al semispațiului elastic.

Formulele (35) au fost prelucrate cu ajutorul calculatorului electronic. În figura 4 se prezintă o imagine spațială a tensiunilor, iar în figura 5 este arătată o descriere grafică a stării de tensiune, în care s-a folosit ca abscisă variabila adimensională $\bar{z} = z/b$, iar ca parametru $\bar{y} = y/b$.

În ceea ce privește cîmpul de deplasări în semispațiul elastic, acesta este dat prin formulele $(6)_1$ și (9) cu mențiunea înlocuirii lui a cu $-b$. Se remarcă, ca și în problema lui Boussinesq, imposibilitatea determinării lui y_0. Aceasta înseamnă că deplasarea verticală nu poate fi determinată decît, abstracție făcînd, de o constantă aditivă. Să alegem această constantă deplasarea verticală a punctului $(b, 0)$. Cîmpul de deplasări verticale se va obține, deci, din (9), prin înlocuirea lui y_0 cu b. Procedîndu-se la adimensionalizarea $\bar{y} = y/b$, $\bar{z} = z/b$, se obține

$$\begin{aligned}
\frac{Ev(\bar{y}, \bar{z})}{bp_{max}} &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\bar{z}}{\bar{y}-t} - \pi\operatorname{sign}(\bar{y}-t)\right)\mathrm{d}t + \\
&+ \frac{1+\nu}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\bar{z}(\bar{y}-t)}{(\bar{y}-t)^2+\bar{z}^2}\,\mathrm{d}t, \\
\frac{Ew(\bar{y}, \bar{z})}{bp_{max}} &= \frac{1-\nu^2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{(1-t)^2}{(\bar{y}-t)^2+\bar{z}^2}\,\mathrm{d}t + \\
&+ \frac{1+\nu}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\bar{z}^2}{(\bar{y}-t)^2+\bar{z}^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{39}$$

În urma deformării semispațiului, un punct de coordonate (y, z) va avea coordonatele: $(y^*, z^*) = (y + v(y, z), z + w(y, z))$. În figura 6 s-a obținut, cu ajutorul calculatorului electronic, vizualizarea deformării planelor paralele cu frontiera semispațiului, pentru o încărcare $\frac{p_{max}}{E} = \frac{1}{20}$ și $\nu = 0{,}3$.

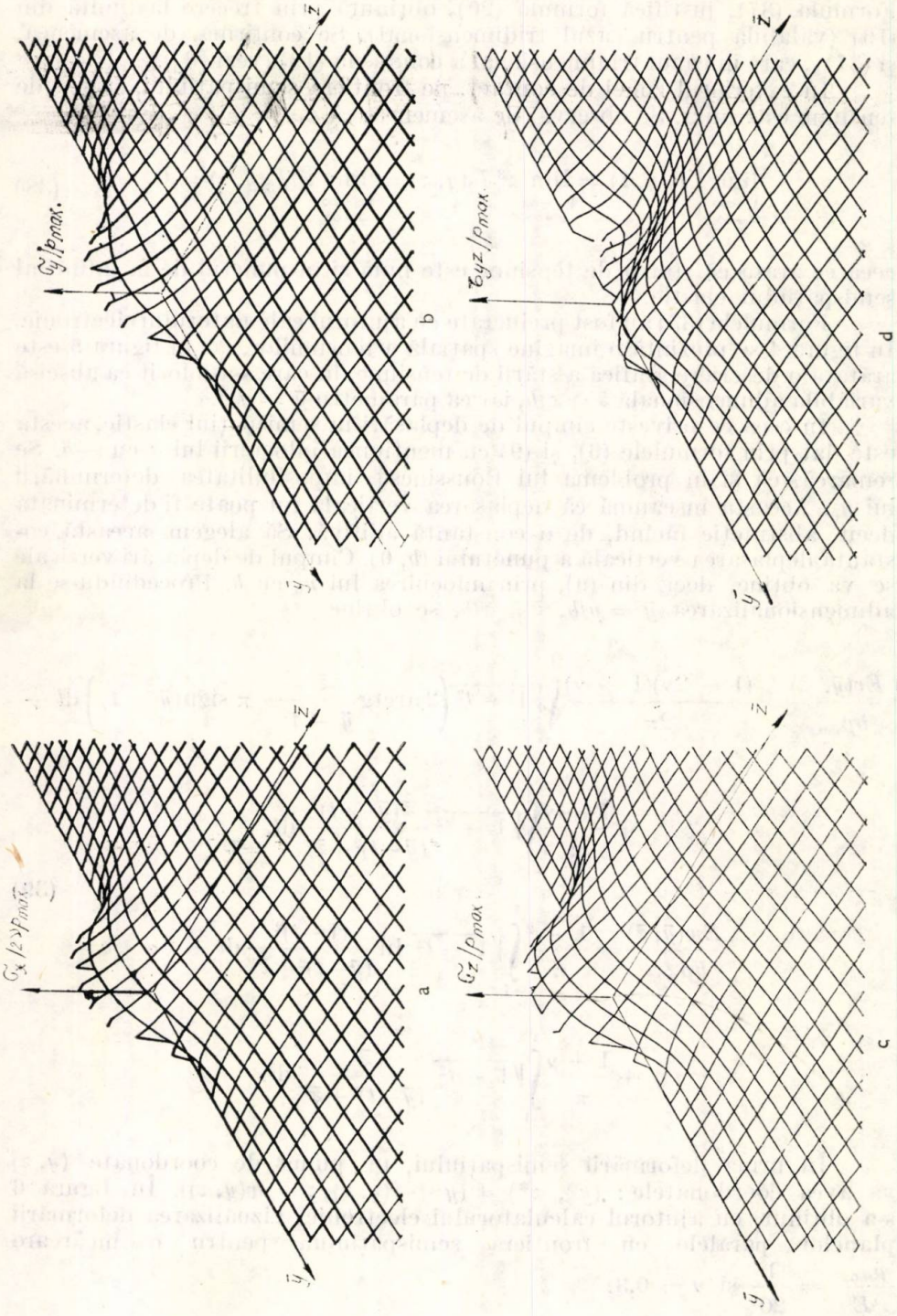


Fig. 4

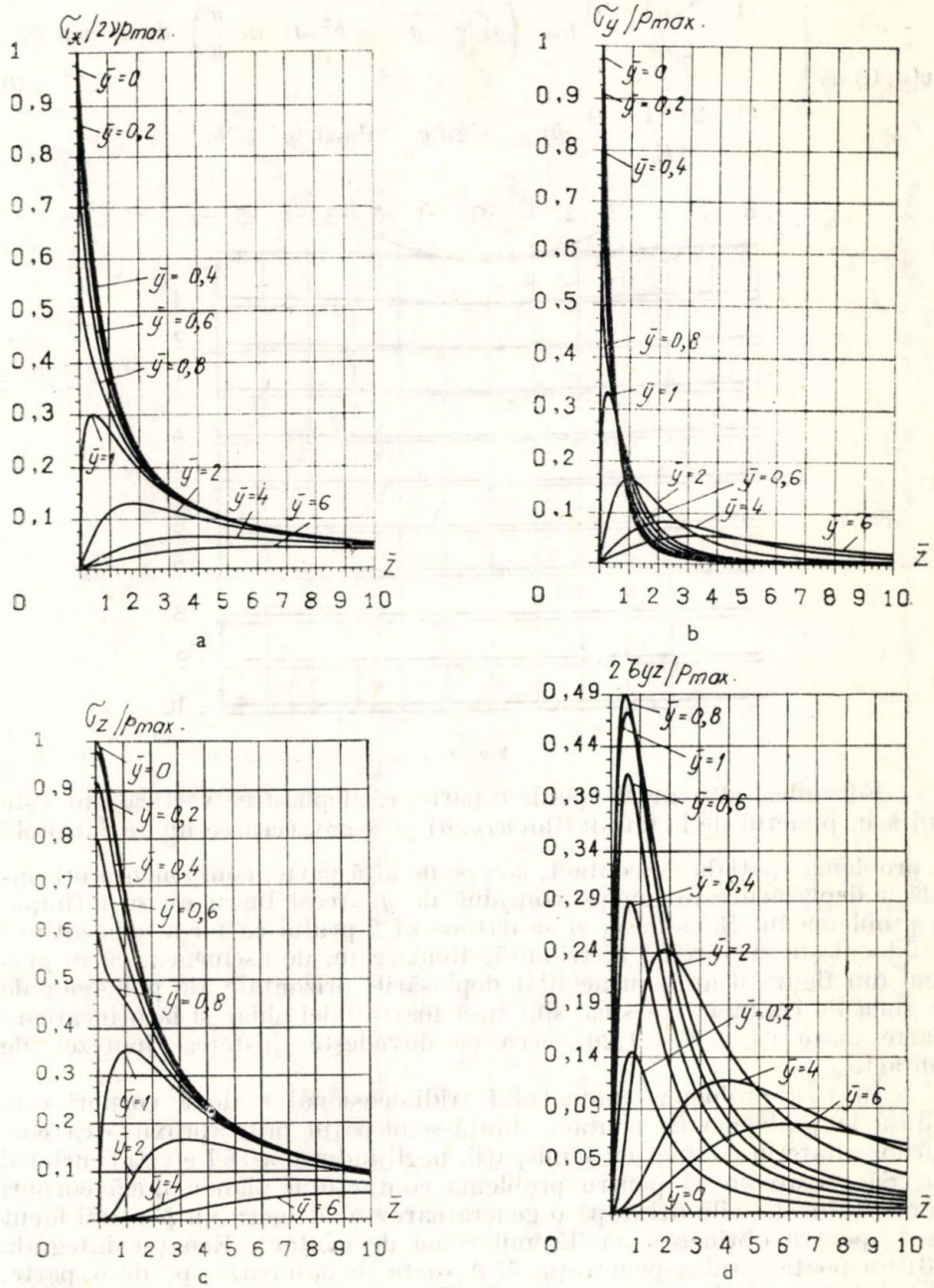


Fig. 5

Deplasările punctelor aflate pe frontiera semispațiului sînt date de :

$$w(y, 0) = \frac{1-\nu^2}{bE} p_{max}(b^2 - y^2),$$

$$v(y,0)=\begin{cases} -\dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2bE}\,p_{max}\left(y\sqrt{b^2-y^2}+b^2\arcsin\dfrac{y}{b}\right) & \text{dacă } |y|\leqslant b. \\ -\dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)}{4E}\,\pi b p_{max}\operatorname{sign} y & \text{dacă } |y|\geqslant b. \end{cases} \tag{40}$$

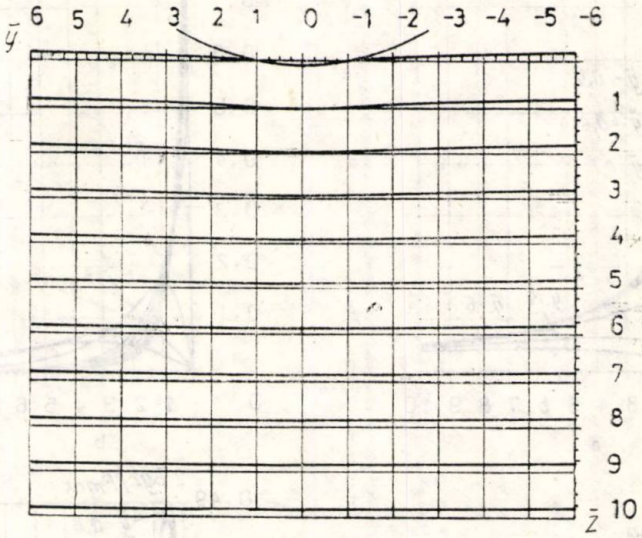


Fig. 6

Formulele (40) arată pe de o parte, că deplasarea verticală nu este finită în punctul de la infinit ($\lim_{|y|\to\infty} w(y,0) = -\infty$), ceea ce nu se întîmplă în problema spațială de contact, iar, pe de altă parte, componenta orizontală a deplasării este funcție continuă de y. Acest lucru nu se întîmplă în problema lui Boussinesq și se datorează faptului că forța concentrată se înlocuiește cu sarcină distribuită. Remarcăm, de asemenea, că în graficul din figura 6 nu s-au neglijat deplasările orizontale ale punctelor de pe zona de contact. Acestea sînt însă foarte mici chiar și la o încărcare foarte mare ($p_{max}/E = 1/20$), ceea ce dovedește justețea ipotezei de contact.

În [3], problema contactului tridimensional a două corpuri este redusă la problema de contact ștanță-semispațiu prin aproximarea corpurilor aflate în contact cu semispații, neglijîndu-se astfel efectul curburii lor. Să remarcăm că pentru problema contactului plan a două corpuri (contactul a doi cilindri după o generatoare) acest lucru nu poate fi făcut decît pentru obținerea semilățimii zonei de contact. Ecuația integrală (23) nu poate furniza penetrația δ. Aceasta se datorează, pe de o parte, faptului că se neglijează efectul curburii corpurilor aflate în contact, iar, pe de altă parte, în problema bidimensională deplasările nu tind la zero cînd punctul se deplasează la infinit.

Pentru determinarea lui δ recomandăm a se consulta [4].

Primit în redacție la 8 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. BEZUHOV, *Teoria elasticității și plasticității*, Edit. Tehnică, București, 1957, p. 242—244.
2. S. D. PONOMARIOV, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, Edit. Tehnică, București, 1963, p. 417—418.
3. L. SOLOMON, *Elasticitate liniară*, Edit. Academiei, București, 1969. p. 594—598; 618—681.
4. TSU—TAO LOO, *Effect of Curvature on the Hertz Theory for Two Circular Cylinders in Contact*, Journal of Applied Mechanics, 1 (1958).
5. M. L. SMOLEANSKI, *Tabele de integrale nedefinite*, Edit. Tehnică, București, 1972.
6. P. P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticității*. I. Edit. Academiei, București, 1961.

CONSIDERAȚII PRIVIND INTERACȚIUNEA DINTRE FLAMBAJ ȘI VOALARE ÎN STUDIUL INSTABILITĂȚII BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI *)

de D. DUBINĂ

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Lucrarea constituie o sinteză a rezultatelor cercetărilor întreprinse de autor și a celor înregistrate în ultimii ani, pe plan mondial, în domeniul instabilității barelor cu pereți subțiri. Se prezintă relații originale pentru determinarea lățimii echivalente în analiza postcritică a barelor cu pereți subțiri comparîndu-se rezultatele cu cele obținute prin aplicarea formulelor din normele ECCS și AISI și se stabilește domeniul lor de valabilitate și influența în interacțiunea dintre flambaj și voalare. Bibliografia vastă de la finele lucrării constituie un ghid deosebit de util pentru specialiștii și cercetătorii cu preocupări în domeniul barelor cu pereți subțiri.

1. INTRODUCERE

Problema instabilității barelor cu pereți subțiri formate la rece constituie un subiect care s-a situat, în ultimii ani, în mod constant în atenția cercetătorilor din domeniu. Acest fapt este justificat, pe de o parte, de spectrul de utilizare foarte larg al profilelor cu pereți subțiri formate la rece — construcții civile și industriale, construcții aerospațiale, construcții navale etc. —, datorită caracteristicilor de rezistență superioare și a unor greutăți mai scăzute în comparație cu profilele laminate la cald, iar pe de altă parte, de necesitatea cunoașterii și stăpînirii fenomenelor de instabilitate care caracterizează comportarea structurilor realizate din aceste profile, cu zvelțeți de bară și de perete pronunțate.

Interesul față de această problemă este dovedit și de faptul că, la toate manifestările internaționale consacrate problemelor de instabilitate a structurilor metalice, comportarea barelor cu pereți subțiri formate la rece constituie una din temele cel mai viu dezbătute, precum și prin dinamica evoluției normelor de calcul, din diferite țări, în acest domeniu.

Lucrarea de față prezintă în sinteză rezultatele obținute în cadrul cercetărilor teoretice și experimentale efectuate la Catedra de construcții metalice a Institutului Politehnic „Traian Vuia" din Timișoara în perioada anilor 1980—1988, dintre care unele au fost prezentate la manifestări științifice internaționale de înalt prestigiu, [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], precum și în cadrul comunicărilor susținute de către autor în cadrul Comisiei de stabilitate a structurilor metalice a Academiei R. S. România [12], [13].

---

*) Lucrare prezentată în ședința Comisiei de stabilitate a structurilor metalice a Academiei R.S.România, desfășurată la Facultatea de Construcții din Timișoara în data de 15 aprilie 1988.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 2, 1989, P. 157—178

2. FORME DE INSTABILITATE ALE BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI

Mecanismul pierderii stabilității se discută pe un profil U, la care fenomenele de cuplare ale tipurilor de instabilitate sînt cele mai semnificative.

Instabilitatea unui profil U ideal se poate produce prin următoarele forme simple (fig. 1):

a) flambaj prin încovoiere în jurul axei y, FI (fig. 1a), la încărcarea critică N_y;

b) voalarea locală a pereților, V (fig. 1b) — inima, VI sau tălpile, VT — la încărcarea N_v;

c) flambaj prin încovoiere-răsucire, FIR (fig. 1c), răsucirea producîndu-se în jurul centrului de răsucire C, la încărcarea critică $N_{x\omega}$.

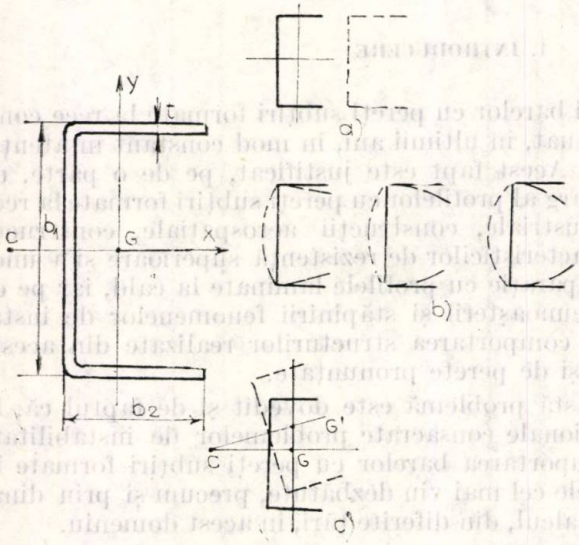


Fig. 1. — Forme de instabilitate simplă.

În cazul barelor cu pereți subțiri solicitate la încovoiere apare și flambajul prin încovoiere laterală sau deversare D, pentru momentul încovoietor critic M_{cr}.

Formele de instabilitate cuplate (fig. 2) sînt următoarele:

a) flambaj prin încovoiere cu voalare, $FI + V$ (fig. 2 a), încărcarea critică rezultînd din interacțiunea încărcărilor N_y și N_v;

b) flambaj prin încovoiere în jurul axei y cu flambaj prin încovoiere-răsucire, $FI + FIR$ (fig. 2b), încărcarea critică rezultînd din interacțiunea încărcărilor N_y și $N_{x\omega}$;

c) flambaj prin încovoiere-răsucire cu valoare, $FIR+V$ (fig. 2c), încărcarea critică rezultînd din interacțiunea încărcărilor $N_{x\omega}$ și N_v;

d) flambaj prin încovoiere în jurul axei y, cu voalarea pereților și flambaj prin încovoiere-răsucire, $FI+V+FIR$ (fig. 2d), încărcarea critică rezultînd din interacțiunea încărcărilor N_y, N_v și $N_{x\omega}$.

Formele de instabilitate depind de rapoartele lt/b_1^2, b_2/b_1 și b_1/t se încadrează în cinci zone (fig. 3) care caracterizează tipurile de instabilitate simple și cuplate. În reprezentarea din figura 3 s-a avut în vedere că, pentru

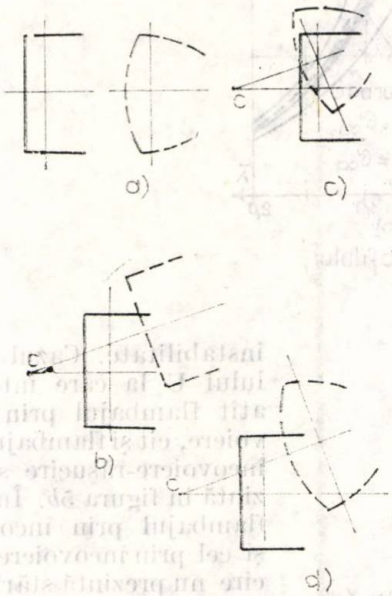


Fig. 2. — Forme de instabilitate cuplate.

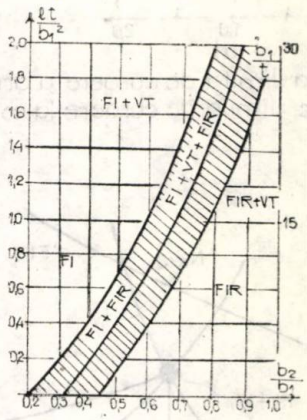


Fig. 3. — Domenii de instabilitate.

dimensiunile curente ale profilelor U, este mai importantă voalarea tălpilor, *VT*, decît cea a inimii, *VI* [14].

La profilele cu pereți subțiri, singurele imperfecțiuni semnificative sînt imperfecțiunile geometrice, devieri de la axa geometrică sau excentricități inițiale; prin procesul de formare la rece a profilelor, imperfecțiunile mecanice — tensiuni inițiale — sînt practic neglijabile. Variația mare a limitei de curgere σ_c în lungul profilului, cu valori mari la colțuri datorită ecruisării, duce la o comportare similară cu cea a profilelor cu tensiuni inițiale. Cercetări recente [15] efectuate pe corniere obținute prin îndoire la rece, pun în evidență efectul favorabil al ridicării rezistenței la colțuri (fig. 4*a* — efectul tensiunilor reziduale de membrană σ_{rm}; *b* — efectul tensiunilor reziduale de încovoiere σ_{rf}).

Influența imperfecțiunilor asupra pierderii stabilității profilului U se prezintă în figura 5. Pentru valori mici ale raportului b_2/t este semnificativă instabilitatea prin încovoiere, iar la valori mari, instabilitatea prin voalarea tălpilor (fig. 5 *a*). Întrucît voalarea tălpilor nu înseamnă cedarea barei, tălpile putînd lucra în domeniul postcritic, încărcarea critică va fi mai mare decît cea de voalare și va corespunde instabilității prin încovoiere cu voalare.

Primul care a studiat influența imperfecțiunilor geometrice a fost Van der Neut [16], care a demonstrat că efectul de eroziune al încărcării critice este maxim în apropierea punctelor de cuplare a formelor simple de

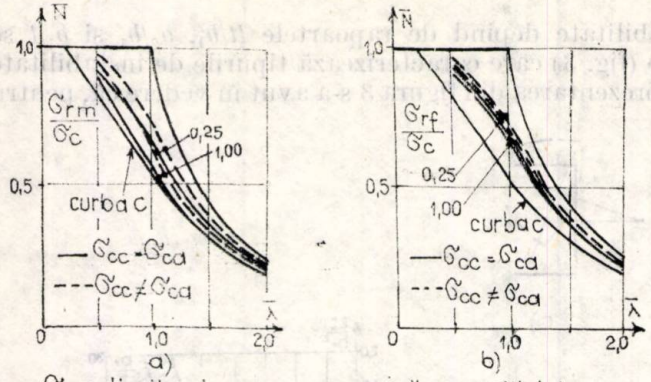


Fig. 4. — Influența tensiunilor reziduale.

σ_{ca} : limita de curgere a aripilor profilului;
σ_{cc} : limita de curgere la colț.

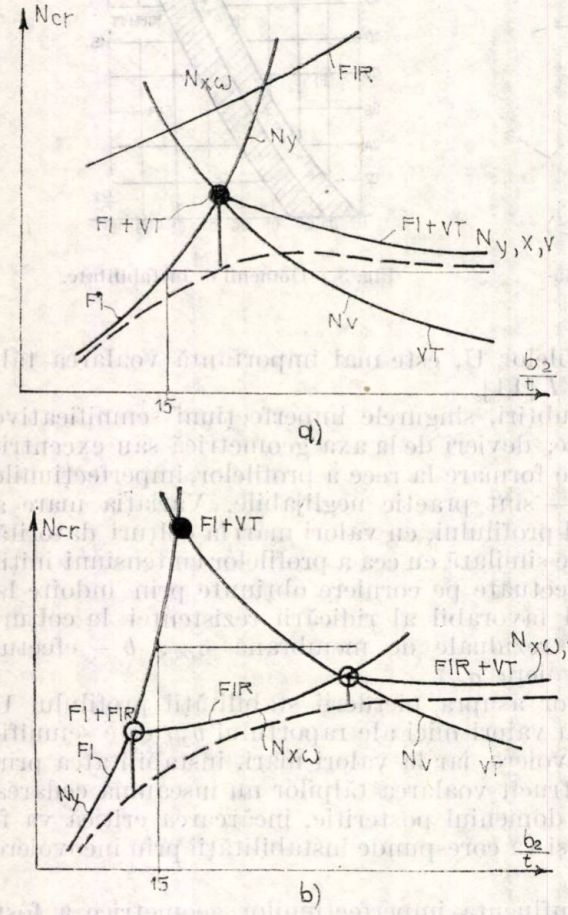


Fig. 5. — Influența imperfecțiunilor

instabilitate. Cazul profilului U la care intervine atît flambajul prin încovoiere, cît și flambajul prin încovoiere-răsucire se prezintă în figura 5*b*. Întrucît flambajul prin încovoiere și cel prin încovoiere-răsucire nu prezintă stări postcritice, cuplarea *Fl* cu *FlR* se produce numai în jurul punctului de intersecție. În domeniul postcritic va exista o cuplare între flambajul prin încovoiere-răsucire și voalarea tălpilor.

Faptul că voalarea pereților nu scoate din uz bara, efectul fiind însă concretizat printr-o reducere a rigidității barei, modifică esențial comportarea barelor cu pereți subțiri formate la rece, la care voalarea este prezentă, față de barele laminate la cald, unde acest fenomen nu apare. La barele cu pereți subțiri se produce o interacțiune între flambajul de tip bară cu flambajul de tip placă. În figura 6 se prezintă curbele de insta-

bilitate pentru bara fără voalare (fig. 6*a*), pentru placa plană (fig. 6*b*), care constituie modelul de comportare al pereților barelor cu pereți subțiri, și pentru bara la care pereții voalează (fig. 6*c*).

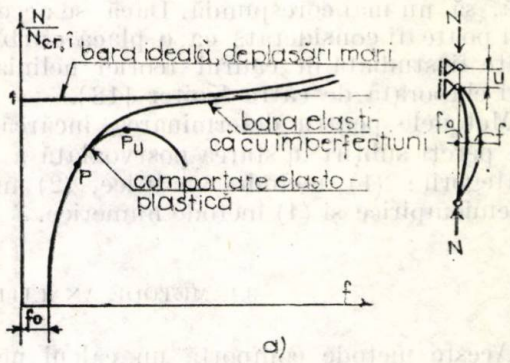
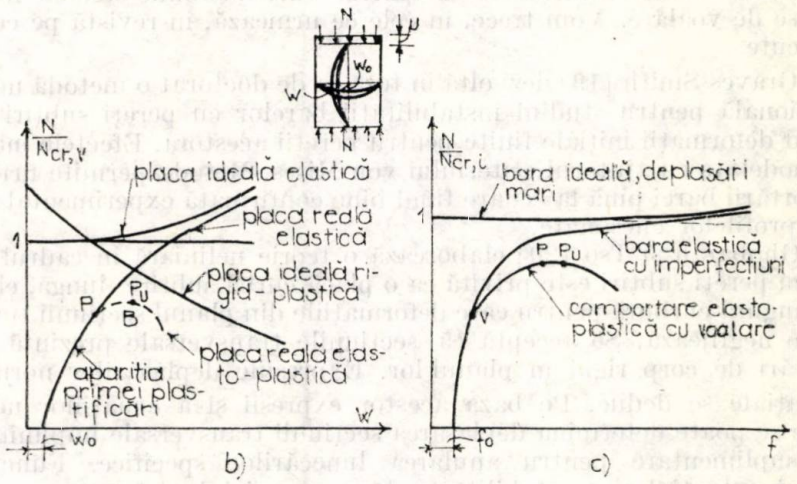


Fig. 6. — Forme de instabilitate structurală.



Se remarcă că voalarea pereților V amorsează pierderea de rigiditate a barei, devansînd apariția primei plastificări P. Acest fapt face ca rezerva de rezistență în domeniul postelastic a barelor cu pereți subțiri să fie foarte redusă, întrucît plastificarea apare în momentul cînd bara și-a pierdut substanțial rigiditatea datorită voalării.

Trei concepte, principial diferite, introduc efectul voalării în interacțiunea cu flambajul barei. Acestea sînt :

a) metoda lățimii reduse sau a lățimii echivalente ;

b) metoda grosimii reduse ;

c) metoda rigidității reduse.

Primele două se uitilizează separat sau împreună și au ca efect reducerea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale a barei.

3. METODE DE CALCUL

Studiul instabilității barelor cu pereți subțiri în domeniul poscritic — în starea postvoalată a pereților — constituie, în ultimă instanță, o problemă neliniară. Acest fapt face ca teoria lui Vlasov [17], în forma ei clasică, să nu mai corespundă. Dacă se acceptă ideea că o bară cu pereți subțiri poate fi considerată ca o placă curbă subțire lungă, comportarea ei poate fi studiată în cadrul teoriei neliniare generale a plăcilor curbe subțiri elaborată de către Koiter [18].

Metodele pentru determinarea încărcării critice de flambaj a barelor cu pereți subțiri în starea postvoalată a pereților se pot grupa în patru categorii: (1) metode analitice, (2) metode semianalitice, (3) metode semiempirice și (4) metode numerice.

3.1. METODE ANALITICE

Aceste metode comportă un calcul neliniar care aplică fie teoria neliniară a plăcilor curbe subțiri a lui Koiter, fie teoria barelor cu pereți subțiri a lui Vlasov ameliorată cu ipoteze care introduc efectele neliniare produse de voalare. Vom trece, în cele ce urmează, în revistă pe cele mai cunoscute.

Graves Smith [19] dezvoltă în teza sa de doctorat o metodă neliniară variațională pentru studiul instabilității barelor cu pereți subțiri presupunînd deformații inițiale finite pentru pereții acestora. Efectele inelastice sînt modelate cu ajutorul criteriului von Mises. Metoda permite urmărirea comportării barei pînă la cedare fiind bine confirmată experimental pentru cazul profilelor chesonate.

Ghobarah și Tso [20] elaborează o teorie neliniară în cadrul căreia bara cu pereți subțiri este privită ca o placă curbă subțire lungă, elastică, cu o singură curbură pentru care deformațiile din planul secțiunii transversale se neglijează. Se acceptă că secțiunile transversale prezintă numai deplasări de corp rigid în planul lor. Expresiile deplasărilor normale și tangențiale se deduc. Pe baza acestor expresii și a ecuațiilor neliniare exacte se poate determina deplasarea secțiunii transversale impunînd condiții suplimentare pentru anularea lunecărilor specifice. Funcționala energiei potențiale este stabilită pe baza energiei de deformare a plăcilor curbe subțiri în care prima ipoteză Kirkhoff-Love este corelată cu cîmpul deplasărilor anterior definit. Ecuațiile diferențiale neliniare complete și condițiile de margine rezultă în urma aplicării criteriilor variaționale. Autorii și-au verificat teoria studiind comportarea neliniară a grinzilor în consolă cu secțiune dublu T solicitate la torsiune pură. Deși verificările experimentale o confirmă, teoria lui Ghobarah și Tso prezintă o serie de deficiențe: neglijarea termenilor de ordinul trei și patru în deplasări din expresia energiei potențiale, spre exemplu, conduce la neconcordanțe semnificative în comparație cu rezultatele obținute prin teoria postcritică a lui Koiter.

Rhodes și Harvey [21], avînd la bază studiile efectuate împreună pentru plăci plane izolate și apoi împreună cu Loughlan [22], propun o metodă de calcul pentru analiza instabilității barelor cu secțiune U și C

ținînd seama de reducerea rigidităților în domeniul postcritic datorită voalării pereților. Metoda are un caracter semienergetic, tensiunea critică de voalare σ_{crv} fiind determinată cu ajutorul metodei Rayleigh-Ritz. Metoda permite introducerea efectului imperfecțiunilor de bară fiind bine confirmată experimental.

Epstein și Murray [23], [24] dezvoltă o teorie neliniară care ține seama și de deformațiile de lunecare. Teoria este valabilă pentru deplasări finite arbitrare în cazul barelor cu secțiune constantă compusă din dreptunghiuri înguste. Fiecărui element al secțiunii transversale i se atașează un tensor de ordinul trei al tensiunilor reduse în suprafața mediană asupra căruia se aplică principiul lucrului mecanic virtual pentru a stabili ecuațiile de echilibru și condițiile de margine. Dificultăți apar la evaluarea tensiunilor tangențiale pe grosimea elementelor care compun secțiunea transversală. Problema poate fi depășită dacă se acceptă că lucrul mecanic virtual produs de aceste eforturi este egal cu acela produs de eforturile din teoria liniară clasică a torsiunii Saint-Venant (valabilă pentru valori mici ale răsucirii specifice). Din acest motiv, această metodă trebuie aplicată cu prudență în cazul barelor care-și pierd stabilitatea preponderent prin FIR.

Trahair și Woolcoock [25] studiază stabilitatea grinzilor cu secțiune dublu T articulat-simplu rezemate cu momente egale la capete formulînd ecuațiile neliniare exacte de echilibru în stadiul critic. Aceste ecuații se liniarizează și se rezolvă tratîndu-se ca o problemă de valori proprii, ținînd seama și de deformațiile din stadiul precritic. Teoria lui Trahair și Woolcoock este completă în sensul că ecuațiile diferențiale care guvernează comportarea grinzilor au la bază ipoteze bine fundamentate, dar are dezavantajul că aplicarea ei este restrînsă la secțiunile dublu simetrice.

Grimaldi și Pignataro [26] studiază comportarea critică și postcritică a barelor cu pereți subțiri articulat-simplu rezemate comprimate cu secțiune deschisă. Funcționala energetică este stabilită pornindu-se de la componentele cîmpului deplasărilor definite în teoria liniară a lui Vlasov, pe baza relațiilor neliniare dintre deplasări și componentele tensorului Lagrange al tensiunilor. După ce se determină expresia energiei potențiale, ai cărei termeni de ordinul patru și superiori în deplasări se neglijează, analiza critică și postcritică a barelor cu pereți subțiri se realizează prin aplicarea teoriei lui Koiter. Într-o lucrare mai recentă, Pignataro, Luongo și Rizzi [27] studiază eroziunea încărcării limită a barelor comprimate cu secțiune U datorită interacțiunii dintre două moduri diferite de instabilitate ($FI + V$, $FIR + V$, $FI + FIR$) pornind de la teoria lui Koiter și ținînd seama de efectul imperfecțiunilor.

Interacțiunea dintre două moduri de instabilitate constituie obiectul unei interesante lucrări a lui Reis și Roorda [28], care dezvoltă o teorie neliniară variațională pe care o aplică la studiul barelor cu secțiune T comprimate centric și excentric.

Mollman [29] și apoi Pedersen [39] dezvoltă o teorie neliniară a barelor cu pereți subțiri plecînd de la teoria neliniară a plăcilor curbe subțiri la care adaugă ipotezele lui Vlasov cu privire la neglijarea tensiunilor tangențiale și la modul de deformare a secțiunii transversale.

3.2. METODE SEMIANALITICE

Metodele semianalitice au la bază conceptul ariei reduse (efective) a secțiunii transversale. Comportarea neliniară a barei comprimate este modelată printr-un calcul de ordinul doi clasic, interacțiunea cu valoarea pereților fiind introdusă prin diminuarea rigidităților prin intermediul lățimii echivalente în cadrul unui algoritm numeric pas cu pas, de regulă metoda Runge-Kutta. În acest sens se amintesc lucrările lui Klöppel și Schubert [31], Skaloud și Naprstek [32], Thomasson [33], respectiv Mulligan și Peköz [34] care, principial, urmează aceeași cale, deosebirea între programele de calcul prezentate în aceste lucrări constînd în relațiile de calcul utilizate pentru determinarea lățimii echivalente.

3.3. METODE SEMIEMPIRICE

Baza acestor metode o constituie studiile experimentale. Cel mai edificator exemplu, în acest sens, îl constituie curbele europene de flambaj elaborate de ECCS [34], care valorifică prelucrările statistice efectuate asupra rezultatelor a mii de încercări experimentale realizate în mai multe centre de cercetare din Europa.

Pentru barele cu pereți subțiri se încearcă să se meargă pe aceeași cale. Sînt cunoscute în acest sens rezultatele obținute la Universitatea din Liège de către Rondal [35], Batista, Maquoi și Rondal [36] și, mai recent, de către Batista în teza sa de doctorat [37], care extind utilizarea curbelor europene de flambaj la barele cu pereți subțiri înlocuind limita de elasticitate σ_e cu tensiunea critică de voalare σ_{cri} în relațiile care le definesc și utilizînd pentru exprimarea lor o formulare generalizată de tip Ayrton-Perry.

Thomasson [38] examinează la rîndul său posibilitatea extinderii aplicării curbelor de flambaj ECCS la barele cu pereți subțiri propunînd unele modificări ale valorilor numerice ale factorului de imperfecțiuni α și încadrări în curbele de flambaj ale diferitelor tipuri de secțiuni de bare cu pereți subțiri. Pe baza acestui studiu și a rezultatelor obținute la Liège s-au elaborat Recomandările ECCS pentru calculul barelor cu pereți subțiri [39].

În Statele Unite, dimensionarea barelor cu pereți subțiri este reglementată de specificațiile AISI [40], care propun o curbă de flambaj unică, indiferent de forma secțiunii transversale, care nu conține palierul care modelează comportarea barelor scurte, ai căror pereți voalează, și care nu ține seama de eroziunea rezistenței la compresiune datorită imperfecțiunilor. Reducerea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale datorită voalării se face prin intermediul lățimii echivalente determinate cu formula lui Winter.

În recomandările de calcul ale statelor nordice [41] se urmează o cale asemănătoare cu cea propusă în recomandările ECCS cu deosebirea că factorul de reducere a ariei secțiunii transversale combină metoda lățimii echivalente pentru cazul pereților rigidizați cu metoda grosimii echivalente pentru pereții nerigidizați.

Normele românești [42] au la bază specificațiile AISI din 1968, fiind, desigur, din acest punct de vedere, susceptibile de perfecționări și actualizare.

3.4. METODE NUMERICE

Metodele numerice, respectiv programele de calcul pentru simularea numerică a comportării barelor cu pereți subțiri, utilizează metoda elementelor finite (MEF) sau, o formă mai particulară a acesteia, metoda fîșiilor finite (MFF).

Primii care aplică metoda fîșiilor finite pentru studiul instabilității barelor cu secțiuni compuse din pereți plani în conexiune sînt Przemieniecky [43] și Wittrick [44].

Graves Smith și Sridharan [45] studiază utilizînd MFF comportarea postcritică — datorată voalării — a barelor cu pereți subțiri cu secțiune prismatică solicitate arbitrar.

Mahendran și Murray [46] elaborează un program de calcul capabil să furnizeze tensiunile critice și modurile de instabilitate pentru structuri perfecte formate din plăci plane rigidizate, închise sau deschise.

Lee, Harris și Cheng-Tzu Thomas Hsu [47] utilizează elemente finite în stare de membrană pentru a elabora un program de calcul neliniar, care ține seama atît de neliniaritatea geometrică, cît și de cea fizică, în studiul comportării barelor cu pereți subțiri.

Crisfield [48] utilizează, de asemenea, MEF pentru studiul comportării neliniare a structurilor cu pereți subțiri, comportarea inelastică fiind modelată cu criteriile von Mises și Ilyushin.

Pe baza rezultatelor obținute de Little, Kragerup [49] utilizează metoda energiei active — LEM (o variantă specializată a metodei Rayleigh-Ritz) pentru analiza neliniară a barelor cu pereți subțiri. Comparativ cu FEM această metodă are avantajul unui număr de necunoscute mult mai redus, utilizarea ei fiind, din acest punct de vedere, mai economică.

Un program de calcul cu facilități diverse pentru analiza neliniară a structurilor, inclusiv a celor realizate din bare cu pereți subțiri este programul FINELG realizat la Universitatea din Liège de către profesorul Frey și colaboratorii săi [50].

Se poate afirma cu certitudine că, în prezent, analiza neliniară a structurilor din bare cu pereți subțiri, în ansamblu sau a barei independente, cu ajutorul MEF constituie metoda de investigare cea mai perfecționată, utilizabilă în cercetările științifice, dar, din păcate, inpracticabilă în calculele inginerești, în proiectare, datorită dificultăților de utilizare cauzate de complexitatea aplicării programelor de calcul și a costurilor ridicate.

Din punct de vedere al complexității și al dificultăților de aplicare în practica de proiectare aceste concluzii sînt valabile și pentru metodele analitice și, în bună măsură, pentru cele semianalitice.

Se impun, prin urmare, atenției metodele semiempirice care, de altfel, sînt, așa cum s-a văzut, la baza celor mai multe norme de calcul. În acest sens, și în mod deosebit în determinarea caracteristicilor geometrice echivalente ale barelor cu pereți subțiri în stare postcritică, constau contribuțiile originale ale studiului de față.

4. FORMULAREA GENERALIZATĂ A ECUAȚIILOR DE INSTABILITATE ALE BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI

Dwight [51], respectiv Rondal și Maquoi [52] au arătat că se poate da o reprezentare matematică a curbelor de flambaj europene cu ajutorul ecuației Ayrton-Perry (Perry-Robertson) în maniera următoare :

$$(\sigma_{cr} - \sigma_u)(\sigma_e - \sigma_u) = \eta\, \sigma_{cr}\, \sigma_u , \tag{1}$$

în care

$\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ este tensiunea critică Euler, $\lambda = \dfrac{l}{i}$;

σ_e — limita de elasticitate a oțelului ;

σ_u — tensiunea ultimă (de cedare), care caracterizează tipul de instabilitate al barei ;

η — coeficientul Perry, care, după [55], este de forma :

$$\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2), \tag{2}$$

unde prin $\bar{\lambda} = \sqrt{\dfrac{\sigma_e}{\sigma_{cr}}}$ s-a notat coeficientul de zvelțețe redus al barei, iar α este factorul de imperfecțiuni din curbele de flambaj ECCS, [34]:

Tabelul nr. 1

Curba	a_0	a	b	c	d
α	0,125	0,206	0,339	0,489	0,756

Dacă se introduce notația [53] :

$$\bar{N} = \frac{\sigma_u}{\sigma_e} = \frac{N_u}{A\,\sigma_e} \tag{3}$$

reprezentînd forța de compresiune redusă, N_u fiind forța ultimă (de cedare) caracteristică tipului de instabilitate, iar A —aria secțiunii transversale, relația (1) se poate pune într-o formă adimensională :

$$\bar{N} = F - \sqrt{F^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} , \tag{4}$$

cu

$$F = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(1+\eta)}{\bar{\lambda}^2}\right], \tag{5}$$

care permite o reprezentare matematică generalizată a formelor de instabilitate simplă ale barelor cu pereți subțiri [52], [3]:

Tabelul nr. 2

Forma de instabilitate	$\overline{N}$	$\overline{\lambda}$
FI	$\overline{N} = \frac{N_{u,i}}{N_e}$	$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr,i}}}$; $i = x$ sau y
FIR	$\overline{N} = \frac{N_{u,\omega}}{N_e}$	$\overline{\lambda} = \sqrt{\sigma_e/\sigma_{cr,\omega}}$
V	$\overline{N} = \frac{N_{u,v}}{N_e}$	$\overline{\lambda} = \sqrt{\sigma_e/\sigma_{cr,v}}$

Expresia (1), respectiv (4) prezintă două limite:

$$\sigma_u = \sigma_{cr}\,;\quad N_u = N_{cr} \tag{6 a, b}$$

și

$$\sigma_u = \sigma_e\,;\quad N_u = N_e \tag{7 a, b}$$

sau

$$\sigma_u = \sigma_c\,;\quad N = N_{pl}\,. \tag{8 a, b}$$

Întrucît în expresiile din tabelul nr. 2 în calculele de verificare se ia $N_u = N_{cr}$, în tabelul nr. 3 se particularizează N_{cr} pentru cele trei forme de instabilitate.

Tabelul nr. 3

Forma de instabilitate	N_{cr} , σ_{cr}
FI	$N_{cr,x} = N_x = \frac{\pi^2 E I_x}{l_{fx}^2}$; $N_{cr,y} = N_y = \frac{\pi^2 E I_y}{l_{fy}^2}$; $\sigma_{cr,i} = \frac{N_{cr,i}}{A}$, $i = x$ sau y
FIR	$N_{cr,\omega} = N_\omega = \frac{1}{2k}\,[N_y + N_r - \sqrt{(N_y + N_r)^2 - 4k\,N_y\,N_r}]$; $\sigma_{r,\omega} = \frac{N_{cr,\omega}}{A}$ $N_{cr,r} = N_r = \frac{1}{i_c^2}\left[\frac{\pi^2 E I_\omega}{l_{fr}^2} + G I_r\right]$; $i_c^2 = i_x^2 + i_y^2 + y_c^2$; $k = 1 - \left(\frac{y_c}{i_c}\right)^2$
V	$N_{cr,v} = N_v = A_e \sigma_e = QA\sigma_e$; $\sigma_{cr,v} = k_v \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2$

Aria echivalentă A_e se calculează cu ajutorul lățimii echivalente de placă b_e cu relația:

$$A_e = t \sum_{i=1}^{n} b_{ei} + A_c \tag{9}$$

în care s-au notat cu b_{ei} lățimile echivalente ale pereților componenți ai secțiunii transversale a profilului și cu A_c aria colțurilor (fig. 7 *a*).

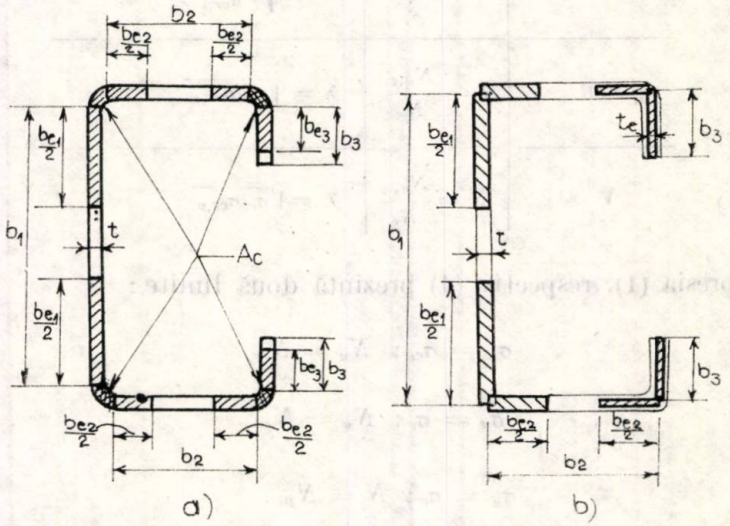


Fig. 7. — Aria echivalentă.

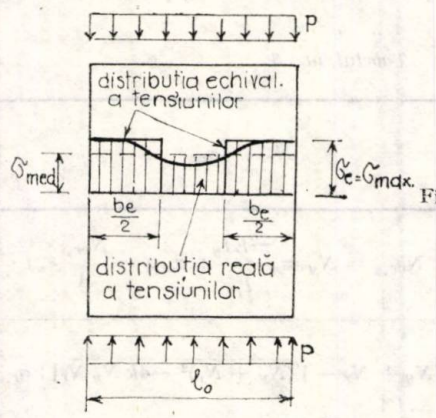


Fig. 8. — Lățimea echivalentă.

Lățimea echivalentă (fig. 8) se calculează, atît în normele europene ECCS [39], cît și în cele americane AISI [40] cu cunoscuta relație a lui Winter:

$$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}\left(1 - \frac{0{,}22}{\bar{\lambda}_p}\right) \leqslant 1, \tag{10}$$

unde

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr,v}}} = \frac{1{,}052}{\sqrt{k_v}} \cdot \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}} \,. \tag{11}$$

Pentru coeficientul de voalare k_v marea majoritate a normelor de calcul prevăd valorile $k_v = 4$ pentru pereții rigizi. Valoarea acestor coeficienți de voalare s-a determinat considerînd pereții componenți ai barei ca plăci independente; luarea în considerare a interacțiunii dintre pereți modifică aceste valori, așa cum se poate vedea din figura 9. Rezultate interesante din acest punct de vedere se prezintă în lucrările [14], [37],

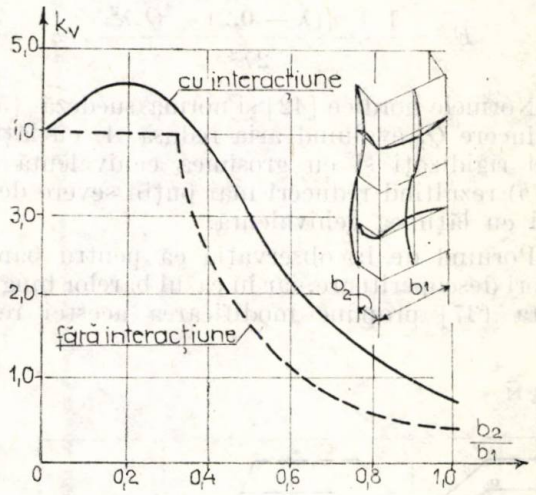


Fig. 9. — Influența interacțiunii dintre pereți asupra coeficientului de voalare.

și [54]. Recentele recomandări ECCS [39] introduc efectul conlucrării dintre pereții componenți ai secțiunii transversale majorînd coeficientul de voalare pentru pereții nerigidizați, $k_v = 0{,}49$. În [3] s-a arătat pe baza cercetărilor experimentale că pentru pereții nerigidizați se poate conta ce un $k_v = 0{,}85$.

În ceea ce privește limita de elasticitate medie a secțiunii, σ_e, normele ECCS [39] prevăd utilizarea următoarei relații (după Lind și Schreff):

$$\sigma_e = \sigma_{eb} + C(\sigma_{rb} - \sigma_{eb}) \frac{B \cdot t^2}{A} \leqslant 1{,}25\ \sigma_{eb} \,, \tag{12}$$

unde $C = 5$ pentru profilele obținute din laminare la rece și $C = 7$ pentru cele obținute prin îndoire la rece, σ_{eb} și σ_{rb} sînt, respectiv, limita de elasticitate și rezistența la rupere a oțelului din care s-a confecționat profilul, iar B este un coeficient care introduce efectul unghiurilor θ_i ale colțurilor secțiunii transversale:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \left(2 - \frac{\theta_i}{90}\right). \tag{13}$$

Pentru colțuri se prevede $\sigma_e = \sigma_{eb}$.

În calculele practice, de regulă, se lucrează nu cu limita elastică a oțelului, σ_e, ci cu limita de curgere, σ_c.

Interacțiunea dintre flambaj și voalare se ia în considerare prin intermediul coeficientului de reducere a secțiunii barei, $Q = A_e/A$ datorită voalării [38], [39], [53]:

$$\bar{N} = F - \sqrt{F^2 - \frac{Q}{\bar{\lambda}^2}} \tag{14}$$

cu

$$F = \frac{1 + \eta_1(\bar{\lambda} - 0{,}2) + Q\,\bar{\lambda}^2}{2\bar{\lambda}^2}, \quad \eta_1 = (4 - 3Q) \leqslant 0{,}76. \tag{15}$$

Normele nordice [42] și norma suedeză [58], determină coeficientul de reducere Q, evaluînd aria redusă A_e cu lățimea echivalentă b_e pentru pereții rigidizați și cu grosimea echivalentă t_e pentru pereții rigidizați (fig. 7*b*) rezultînd reduceri mai puțin severe decît atunci cînd se lucrează numai cu lățimea echivalentă.

Pornind de la observația că pentru barele scurte relația (14) este adeseori descoperitoare, iar în cazul barelor lungi prea acoperitoare (fig. 10), Batista [37] propune modificarea acestei relații după cum urmează:

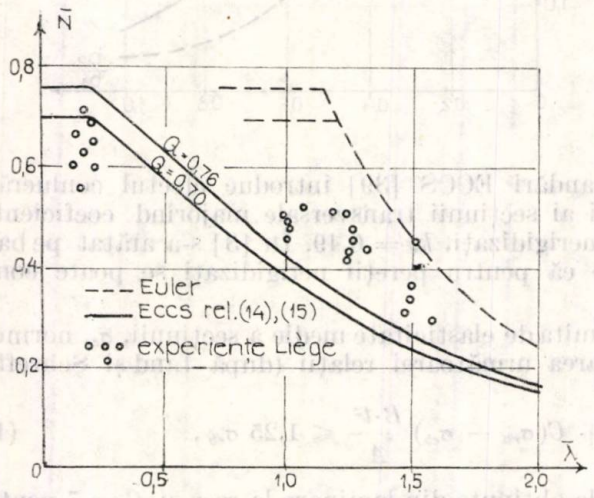


Fig. 10. — Corespondența dintre rezultatele experimentale și cele furnizate de relația (14).

$$\bar{N} = \frac{N_u}{N_e} = Q = \frac{1}{\bar{\lambda}_p}\left(1 - \frac{0{,}22}{\bar{\lambda}_p}\right) \quad \text{dacă } \bar{\lambda} \leqslant 0{,}22 \tag{16}$$

și

$$\bar{N} = \frac{N_u}{QN_e} = F - \sqrt{F^2 - \frac{1}{\bar{\lambda}^2}} \quad \text{dacă } \bar{\lambda} > 0{,}2, \tag{17}$$

cu

$$F = \frac{1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0{,}2) + \bar{\lambda}^2}{2\bar{\lambda}^2}, \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Q\sigma_e}{\sigma_{cr}}} \tag{18}$$

și

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr,v}}} = \frac{1.052}{\sqrt{k_v}} \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}}. \tag{19}$$

Aceste relații ameliorează rezultatele în cazul barelor scurte, care ies din uz datorită voalării, dar rămîn în continuare prea acoperitoare în cazul barelor lungi. Explicația constă în faptul că expresia (10) conduce la valori prea mici ale lățimii echivalente și, în consecință, la scăderi prea drastice ale coeficientului Q.

Este evident deci, că, aprecierea corectă a lățimii echivalente constituie un element decisiv în interacțiunea dintre voalare și flambajul general al barei, justificînd din acest punct de vedere atenția acordată de către cercetători acestei probleme.

5. FORMULE RECENTE PENTRU DETERMINAREA LĂȚIMII ECHIVALENTE

În trei studii [4], [5], [12] s-au examinat un număr de 30 de relații pentru determinarea lățimii echivalente propuse de diverși autori sau conținute în normele tehnice ale unor țări, punîndu-se în evidență dispersia rezultatelor furnizate de aceste relații. Cu această ocazie s-a propus o relație pentru determinarea lățimii echivalente care ține seama de inperfecțiunile geometrice inițiale, de placă, w_0, ale pereților barelor [5], [6]. Această formulă are expresii diferite pentru elementele rigidizate după cum urmează:

— elemente rigidizate: $\frac{b_e}{b} = 0{,}5 + \frac{0{,}25}{\bar{\lambda}_p^2}$, (20)

— elemente nerigidizate: $\frac{b_e}{b} = 0{,}254 + \frac{0{,}558}{\bar{\lambda}_p^2}$. (21)

Curbele de voalare trasate pe baza acestor relații au arătat o foarte bună concordanță cu rezultatele experimentale obținute în laboratorul Catedrei de construcții metalice din Timișoara [7], [10], [14], în domeniul $1{,}0 \leqslant \bar{\lambda}_p \leqslant 1{,}35$ pentru elementele rigidizate și $0{,}8 \leqslant \bar{\lambda}_p \leqslant 1{,}4$ pentru cele nerigidizate (fig. 11).

Acest lucru a reieșit, de altfel, și din analiza făcută de către J. Rondal în Raportul final la Colocviul regional de stabilitate de la Budapesta [55], care compară relațiile (20) și (21) cu formulele din Eurocode n° 3 și cu cele din norma britanică, BS 5950, vol. 5, rezultînd o bună concordanță în domeniile menționate.

Eurocode n°. 3 utilizează relații identice, de forma (10), pentru elementele rigidizate și cele nerigidizate, iar relațiile conținute în norma bri-

tanică sînt de forma următoare :

$$\text{— elemente rigidizate : } \frac{b_e}{b} = [1 + 14(\bar{\lambda}_p - 0{,}35)^4]^{-1/5}, \tag{22}$$

$$\text{— elemente nerigidizate : } \frac{b_e}{b} = 0{,}11 + 0{,}89\left(\frac{b_e}{b}\right)_{\text{rigid}}. \tag{23}$$

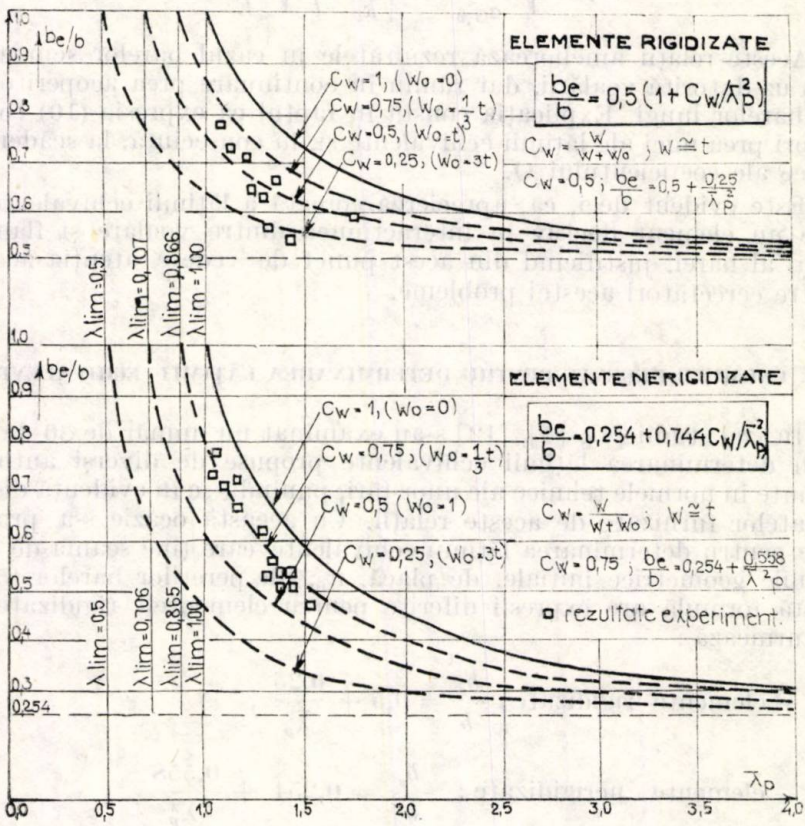


Fig. 11. — Comparația rezultatelor obținute cu relațiile (20) și (21) cu rezultatele experimentale.

Diferențele consemnate pentru $\bar{\lambda}_p > 1{,}5$ $(b_e/b) > 90$) se justifică prin faptul că determinarea coeficienților numerici de la numărătorul termenilor doi al relațiilor (20) și (21) s-a făcut pe cale experimentală, lotul de bare încercate fiind caracterizate prin supleți de perete $\frac{b}{t} < 90$.

Reexaminarea acestor relații, pe baza rezultatelor experimentale efectuate de către Batista la Universitatea din Liège [37], [56] pe circa 200 de bare cu $0{,}5 \leqslant \bar{\lambda}_p \leqslant 2{,}0$ a condus la modificarea relației (20) după cum

urmează :

$$\frac{b_e}{b} = 0{,}5 + \frac{0{,}25}{\bar{\lambda}_p^2}, \quad 0{,}7 < \bar{\lambda}_p \leqslant 1{,}316, \tag{24 a}$$

$$40 < \frac{b}{t} \leqslant 75,$$

$$\frac{b_e}{b} = \frac{0{,}5}{3\sqrt{\bar{\lambda}_p}} + \frac{0{,}25}{\bar{\lambda}_p^2} - 0{,}044, \quad \bar{\lambda}_p \geqslant 1{,}316, \tag{24 b}$$

$$\frac{b}{t} \geqslant 75.$$

Comparația între rezultatele oferite de cele patru seturi de relații este prezentată în figura 12.

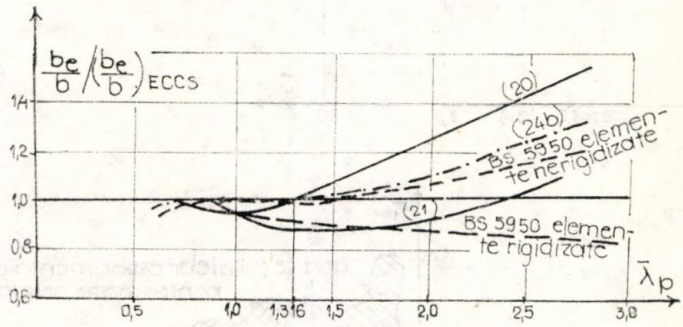


Fig. 12. — Comparația între formulele (20), (21), (24), (10), (22) și (23).

În figura 13 se prezintă o comparație între rezultatele obținute cu formulele (21) și (24) cu o propunere relativ recentă făcută de Mulligan și Peköz [57] și cu relația lui Thomasson [33] inclusă în norma suedeză [58].

Aceste relații, valabile pentru calculul deformațiilor, sînt :

$$\text{Mulligan și Peköz : } \frac{b_e}{b} = \frac{A}{\bar{\lambda}_{pd}^2} + \frac{B}{\bar{\lambda}_{pd}} + C + D\bar{\lambda}_{pd}, \tag{25}$$

$$\bar{\lambda}_0 \leqslant \bar{\lambda}_{pd} \leqslant \bar{\lambda}_p, \quad \bar{\lambda}_0 = 0{,}6789,$$

$$A = \bar{\lambda}_0^2\left(1 - \frac{B}{\bar{\lambda}_0} - C - \bar{\lambda}_0 D\right),$$

$$B = \bar{\lambda}_p(2C + 3D\bar{\lambda}_p),$$

$$C = \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_p} - 1{,}5\ D(\bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}_p),$$

$$D = \frac{2[(1 - \bar{\lambda}_0)\bar{\lambda}_p - 0{,}218]}{(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_p)^3}.$$

$$\text{Thomasson}: \frac{b_e}{b} = 0{,}827\ \bar{\lambda}_{pd}(-0{,}662); \tag{26 a}$$

$$\bar{\lambda}_0 \leqslant \bar{\lambda}_{pd} \leqslant \bar{\lambda}_1,\ \bar{\lambda}_p = \sqrt{\sigma_e/\sigma_{cr,e}}\ \bar{\lambda}_0 = 0{,}75,$$

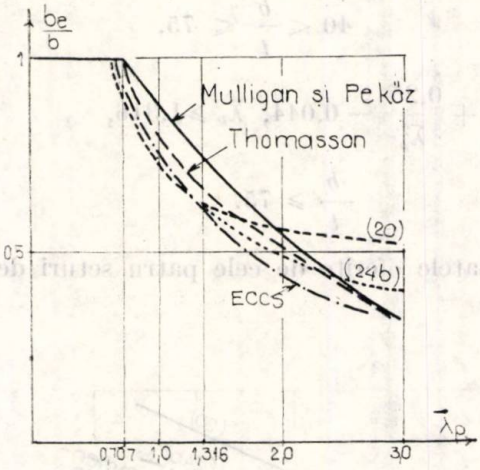


Fig. 13. — Comparație între formulele (21), (24), (10), (25) și (26).

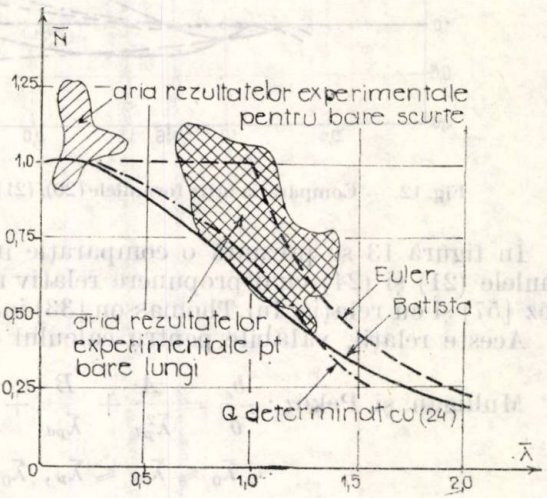


Fig. 14. — Influența rezultatelor obținute cu relația (24) asupra forței critice $\bar{N}$ în interacțiunea flambajului cu voalarea.

$$\frac{b_e}{b} = R_1 + \frac{R_p - R_1}{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_1}(\bar{\lambda}_{pd} - \bar{\lambda}_1);\ \bar{\lambda}_1 \leqslant \bar{\lambda}_{pd} \leqslant \bar{\lambda}_p, \tag{26 b}$$

$$\bar{\lambda}_1 = 0{,}3 + 0{,}6\bar{\lambda}_p,\ R_1 = 0{,}827\ \bar{\lambda}_1(-0{,}662),\ R_p = 0{,}78\ \bar{\lambda}_p(-0{,}864),$$

$$\frac{b_e}{b} = 0{,}78\ \bar{\lambda}_{pd}(-0{,}864);\ \bar{\lambda}_{pd} = \bar{\lambda}_p \tag{26 c}$$

Faptul că relația (24) conduce la lățimi echivalente mai mari în domeniul $1{,}316 \leqslant \lambda_p \leqslant 2$, domeniu în care se încadrează în supleţile uzuale ale barelor cu pereți subțiri întîlnite în practică, are ca efect o mai bună acoperire a rezultatelor experimentale de către curba $\bar{N} - \bar{\lambda}$ în cazul barelor lungi. În figura 14 se pune în evidență, printr-o reprezentare calitativă, această concluzie, baza de comparație fiind furnizată de rezultatele experimentale din lucrările [7], [10], [14], [37], [56].

6. CONCLUZII

Plecînd de la ideea că pentru calculele inginerești sînt necesare relații de calcul simple se poate afirma că, din acest punct de vedere, conceptul lățimii echivalente asigură simplitatea necesară. Relațiile (21) și (24) pot constitui, în acest sens, un punct de plecare în cazul revizuirii standardului românesc pentru calculul barelor cu pereți subțiri, care, așa cum s-a arătat este depășit de rezultatele ultimelor cercetări. Desigur că, în vederea precizării mai ferme a domeniului de valabilitate al acestor relații, mai sînt necesare studii parametrice, și, poate, experimentări și simulări numerice cu ajutorul metodei elementelor finite.

O cale pentru cuprinderea în programele de calcul destinate analizei structurilor din bare cu pereți subțiri a efectului interacțiunii dintre voalare și flambaj, o constituie analiza neliniară simplificată, în sensul că neliniaritatea vizează numai comportarea de bară nu și pe aceea de placă, a pereților subțiri componenți. Elementele matricei tangente K_T se corectează în fiecare pas de încărcare prin multiplicare cu factori de corecție care țin seama de reducerea rigidității barei datorită voalării. Pentru aceasta este

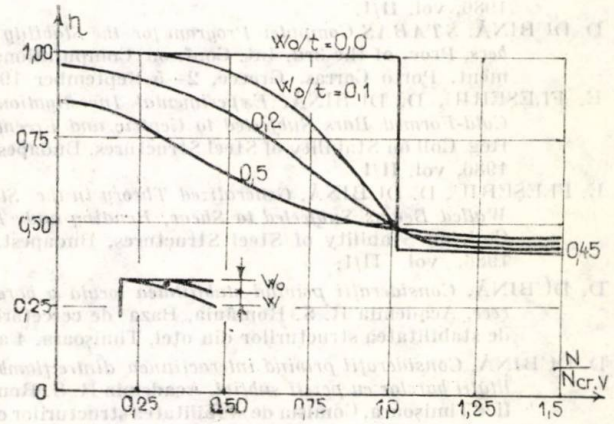


Fig. 15. — Variația factorului η, de reducere a rigidității, în funcție de încărcare și imperfecțiuni.

mai potrivit să se lucreze cu rigiditatea redusă, în maniera propusă în lucrarea [59], deoarece se poate urmări mai bine influența evoluției încărcării.

În figura 15 se prezintă variația factorului de reducere a rigidității η în funcție de încărcare și de imperfecțiunile de placă.

Acest mod de lucru permite, totodată, studierea în condiții mai simple a comportării structurilor cu pereți subțiri în domeniul elasto-plastic

Primit în redacție la 14 iunie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. E. FLEȘERIU, D. DUBINĂ, E. DOGARIU, *Problems of Local Buckling Analysis of Thin-Walled Cold-Formed Open Sections*, Proc. of 3rd, Int. Coll. on Stability, First Session, Timișoara, October 16th, 1982.
2. D. MATEESCU, D. DUBINĂ, GR. MATEESCU, Optimisation de la section en forme de T d'une barre biarticulée soumise en compression centrée, 3-ème Coll. Int. « Stabilité des structures métalliques », Paris, 16—17 nov. au Rapport préliminaire.
3. E. FLEȘERIU, D. DUBINĂ, E. DOGARIU, Etudes théoriques et exeperimentales sur la stabilité locale des bares à parois minces avec profil ouvert, 3-éme Coll. Int. « Stabilité des structures métalliques », Paris, 16—17 nov, auRapport préliminaire.
4. D. DUBINĂ, E. FLEȘERIU, *Determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale în analiza posteritică a barelor cu pereți subțiri formate la rece*. A 4-a Conferință de construcții metalice, Timișoara, 11—13 octombrie 1985, vol. 1.
5. D. DUBINĂ, E. FLEȘERIU, *Equivalent Geometric Characteristics in Stability Analysis of the Thin-Walled Cold-Formed Members*, Proc. of 2nd Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, September 25—26, 1986, vol. II/1.
6. D. DUBINĂ, *Influența imperfecțiunilor geometrice în calculul lățimii echivalente a barelor cu pereți subțiri*. A 4-a Conferință de construcții metalice, Timișoara, 11—13 octombrie, 1985, vol. 1.
7. D. DUBINĂ, E. FLEȘERIU, *Theoretical and Experimental Investigations Concerning the Determinations of the Geometric Characteristics of Thin-Walled Cold-Formed Compressed Members in Post-Buckling Range*. Al 4-lea Simp. Nat. de tensometrie, Brașov, 24—27 septembrie 1986, vol. 3.
8. D. DUBINĂ, *On the Stability of Thin-Walled Members Subjected to Centric Compression and Bending Compression-STABAS Computer Program*, Proc. of the 2nd Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, September 25—26, 1986, vol. II/1.
9. D. DUBINĂ, *STABAS Computer Program for the Stability Analysis of Thin-Walled Members*, Proc. of the 3rd. Int. Conf. on Computational Methods and Exp. Meassurement, Porto Carras, Greece, 2—5 September 1986.
10. E. FLEȘERIU, D. DUBINĂ, *Experimental Investigations Concerning the Thin-Walled Cold-Formed Bars Subjected to Centric and Eccentric Compression*. Proc. of 2nd Reg. Coll on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, September 25—26, 1986, vol. II/1.
11. E. FLEȘERIU, D. DUBINĂ, *Generalized Theory in the Stability Analysis of the Thin-Walled Beams Subjected to Shear, Bending and Torsion*, Proc. of the 2nd Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, September 25—26, 1986, vol. II/1.
12. D. DUBINĂ, *Considerații privind stabilitatea locală a barelor cu pereți subțiri formate la rece*, Academia R. S. România, Baza de cercetări științifice Timișoara, Comisia de stabilitatea structurilor din oțel, Timișoara, 4 apr. 1985.
13. D. DUBINĂ, *Considerații privind interacțiunea dintre flambaj și voalare în studiul instabilității barelor cu pereți subțiri*, Academia R. S. România, Baza de cercetări științifice Timișoara, Comisia de stabilitatea structurilor din oțel, Timișoara, 15 apr., 1988.
14. * * * *Cercetări teoretice și experimentale privind flambajul prin încovoiere-răsucire al profilelor formate în starea postvoalată a pereților subțiri*. Referat ICCPDC-Filiala Timișoara, contract nr. 160/1980.
15. C. M. COSTA FEREIRA, J. RONDAL, *Influence of Flexural Residual Stresses on the Stability of Compressed Angles*, Proc. of the Int. Conf. on Steel Structures-Recent Research Advances, Budva, September 28—October 1, 1986.
16. VAN der NEUT, *The Interaction of Local Buckling and Column Failure of Thin-Walled Compression Members*, Proc. of the 12th Int. Congres of Appl. Mech., Stanford, California, 1968.

17. Z. V. VLASOV, *Tonkostenniie uprughie sterjini*. Gosud. Iz. Fiz.—Mat. Lit., Moskva, 1959.
18. W. T. KOITER, *On the Stability of Elastic Equilibrium*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., March, 1967.
19. T. R. GRAVES SMITH, *The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length*, Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1966.
20. A. A. GHOBARAH, W. K. TSO, *A Non-linear Thin-Walled Beams Theory*, Int. Journ. of Mech. Science, **13**, 12 (1971).
21. J. RHODES, J. M. HARVEY, *Interaction Behaviour of Plain Channel Columns under Concentric or Eccentric Loading* 2nd Int. Coll. on Stability of Steel Structure, Liège, April 13—15, 1977, Preliminary Report.
22. J. LOUGHLAN, J. RHODES, *The interactive Buckling of Lipped Channel Columns Under Concentric or Eccentric Loading*. Int. Conf. on Thin Walled Structures, Glasgow, April 3—6, 1979.
23. M. EPSTEIN, D. W. MURRAY, *Large Deformation In-Plane Analysis of Elastic Beams*, Computers and Structures, **6**, 1 (1976).
24. M. EPSTEIN, D. W. MURRAY, *Three-Dimensional Large Deformation Analysis of Thin-Walled Beams*, Int. Journ. of Solids and Structures, **12**, 12 (1976).
25. N. S. TRAHAIR, S. T. WOOLCOCK, *Efect of Major Axis Curvature on I-Beam Stability*, Journ. of the Eng. Mech. Div., ASME, **99**, EM 1 (1973).
26. A. GRIMALDI, M. PIGNATARO, *Postbuckling Behaviour of Thin-Walled Open Cross-section Compression* Members, Journ. of Struct. Mech., **7**, 2, (1979).
27. M. PIGNATARO, A. LUONGO, N. RIZZI, *On the Efect of the Local Overall Interaction on the Postbuckling of Uniformity Compressed Channels*, Thin-Walled Structures, vol. **3**, 1985, p. 293—321.
28. A. J. REISS, J. ROORDA, *The Interaction between Lateral-Torsion and Local Plate Buckling in Thin-Walled Beams*, 2nd Int. Coll. on Stability of Steel Structures, Liège, April 13—15, 1977, Preliminary Report.
29. H. MOLLMANN, *Finite Displacement of Thin-Walled Beams*, Rep. Technical Univ. of Denmark, 1979.
30. C. PEDERSEN, *Stability Properties and Non-linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section*, Technical Univ. of Denmark, R. 149, 1982.
31. K. KLÖPPEL, J. SCHUBERT, *The Calculation of the Carring Capacity in the Postbuckling Range of Thin-Walled Box Column Loaded by Concentric an Excentric Compresive Force*. Publ. of the Inst. for Statics and Steel Construction, Darmstadt, 1971.
32. M. SKALOUD, J. NAPRSTEK, *Limit State of Thin-Walled Steel Columns*, Rospravy Ceskoslovenske Akademie, VED, 1977.
33. P. O. THOMASSON, *Thin-Walled C shaped Panels in Axial Compression* Swedish Council for Building Research, D. 1.1978, Stockholm.
34. * * * EUROCODE No. 3—1984, C.C.E. *Règles Unifiées Communes pour les constructions en acier*.
35. J. RONDAL, *Contribution a l'étude de la stabilité des profils creux à parois minces*. Thèse de doctorat, Univ. de Liège, 1984.
36. E. M. BATISTA, R. MAQUOI, I. RONDAL, *Column Stability of Cold Formed U and C sections*, Int. Conf. on Steel and Aluminium Structures, Cardiff, Great-Britain, Elsevier Appl. Science, July, 1987.
37. E. M. BATISTA, *Etude de la stabilité des profils à parois minces et section ouverte de types U et C*. Thèse de doctorat, Univ. de Liège, 1988.
38. P. O. THOMASSON, *Recent Cold-Formed Steel Research and Design Specification Activities, Stability of Metal Structures*, 3rd Int. Coll., S.S.R.C., Toronto, Canada, May, 1983.
39. * * * *European Recommendations for the Design of Light Gauge Steel Members*, E.C.C.S.—T.G.W. 7/1, 1986, Final Draft.
40. * * * A.I.S.I. *Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members* American Iron and Steel Institute, August, 1986.
41. * * * NKB-Report No. 43, *Nordic Guidelines for Light Gauge metal Structures*, May, 1981.
42. * * * STAS 10108/2-1983, *Calculul elementelor din oțel alcătuite din profile cu pereți subțiri formate la rece*.
43. J. S. PRZEMIENIECKY, *Finite Element Structural Analysis of Local Instability*, A.I.A.A. Journal, **11**, 1 (1973).
44. W. H. WITTRICK, F. W. WILLIAM, *Buckling and Vibration of Anisotropic or isotropic Plate Assemblies under Combined Loadings*, Int. Journ. of Mech. Sciences, **16**, (1974).
45. T. R. GRAVES SMITH, S. SRIDHARAN, *A Finite Strip Method for the Post-Locally Buckled Analysis of Plate Structures*, Int. Journ. of Mech. Sciences, **20**, (1978).

46. M. MAHENDRAN, N. W. MURRAY, *Elastic Buckling Analysis of Ideal Thin-Walled Structures under Combined Loading Using a Finite Strip Method.* Thin-Walled Structures, **4** (1986).
47. H. P. LEE, P. J. HARRIS, CHENG-TSU THOMAS HSU, *A Nonlinear Finite Element Computer Program for Thin-Walled Members*, Thin-Walled Structures, **2**, 4(1984).
48. M. A. CRISFIELD, *Large deflection elasto-plastic buckling analysis of plates using finite elements.* Transport and Road Research Lab., Rep. No. LR 593 (1973).
49. J. KRAGERUP, *Buckling of Rectangular, Unistiffened Steel Plates in Compression*, Technical Univ. of Denmark, Report 161, 1984.
50. F. FREY ş.a., FINELG, *User's manual*, 3rd up-date, Université de Liège, 1986.
51. J. B. DWIGHT, *Use de Perry formula to represent the new European Structure* Curves, Univ. of Cambridge, Rep. No. CUED/C-structure/TR. 30, 1972.
52. J. RONDAL, R. MAQUOI, *Formulations d'Ayrton-Perry pour le flambement des barres métalliques*, Construction Métallique, 4(1979).
53. J. P. GRIMAULT ş.a., *Stabilité des poutres-poteaux en profil creux à parois minces*, Construction Métallique, 4 (1984).
54. J. RHODES, A. C. WALKER, *Current Problems in the Design of Cold-Formed Steel-Sections. Aspects of the Analysis of Plate Structures*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
55. J. RONDAL, *On the Effective WIDTH of Stiffened and Unstiffened Elements*, 2nd Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Budapest, Hungary, September 25—26, 1986. Final Report.
56. E. M. BATISTA, *Essais de profils C şi U en acier pliés a froid.* Laboratoire des Construction, Université de Liège, Rap. nº 157, 1987.
57. G. P. MULLIGAN, T. PEKOZ, *Locally Buckling Thin-Walled Columns*, Journ. of struct. Div. A.S.C.E., **110**, 11 (1984).
58. * * * STBK-N5, *Swedich Code for Light-Gauge Metal Structures.* Swedish Inst. of Steel Constr. Publ. No. 76, March. 1982, Stockholm.
59. V. GIONCU, E. FLEŞERIU, I. MUNTEANU, *Theoretical Investigations on the Interaction Schween Flexural-Torsional Buckling and Local Buckling.* 3rd Int. Coll. on Stability of Metal Structures, Paris, November 16—17, Preliminary Report.

CALCULUL NUMERIC AL CURGERII PERMANENTE A APEI DIN ALBIILE RÎURILOR ȘI CANALELOR, BAZAT PE UTILIZAREA TEHNICII ELEMENTELOR FINITE

de D. BĂTUCĂ

Institutul de Cercetări Hidrotehnice București

Bazat pe tehnica elementelor finite, se propune o metodă de calcul numeric al regimului curgerii permanente gradual variate cu suprafață liberă a apei din albiile riurilor și canalelor, urmărind precizarea profilului curbelor de remu și a valorilor principalilor parametri hidraulici ai curgerii (adîncimi, niveluri, viteze, gradienți energetici), concomitent în toate secțiunile din lungul unui sector de calcul.

INTRODUCERE

Determinarea caracteristicilor și parametrilor hidraulici ai curgerii permanente gradual variate a apei cu suprafață liberă din albiile rîurilor și canalelor, constituie una din cele mai uzuale și mai importante probleme de inginerie a cursurilor de apă.

Problema apare la proiectarea, execuția și exploatarea lucrărilor de amenajare a albiilor naturale pentru gospodărirea resurselor de apă (hidroenergetică, apărarea împotriva inundațiilor, regularizare) și a celor de amenajare a căilor de apă artificială în scopuri complexe (pentru navigație, irigații, alimentare cu apă, ș.a.).

Soluționarea prin calcul a acestei probleme se reduce la integrarea ecuației dinamice de curgere permanentă gradual variată cu suprafață liberă a apei, în contextul unor condiții la limită impuse, urmărind : a) precizarea poziției în plan vertical a poziției suprafeței libere de curgere a apei, respectiv profilul curbelor de remu, și b) determinarea valorilor principalilor parametri hidraulici (adîncimi, niveluri, viteze, gradienți energetici) în toate punctele din lungul curgerii.

În prezent, dezvoltarea și perfecționarea ordinatoarelor de mare putere și capacitate, a determinat înlocuirea practic completă a vechilor metode de integrare directă, grafică și grafo-analitică cu metode de integrare numerică, mai rapide, mai versatile și de productivitate mai mare.

Majoritatea metodelor numerice utilizate actualmente în practica hidraulică constau în principal din : a) transcrierea în diferențe finite a ecuației dinamice a curgerii permanente, pe baza unor scheme explicite sau implicite de discretizare, și b) rezolvarea iterativă a ecuației în diferențe finite astfel obținute, prin predicție-corecție, pas cu pas începînd din secțiunea de control unde se impune condiția la limită specifică (aval pentru curgerile lent variabile subcritice și respectiv amonte pentru curgerile rapid variabile supercritice).

În lucrarea de față se propune o modalitate diferită de soluționare numerică globală a ecuației dinamice de curgere permanentă, bazată pe utilizarea tehnicii elementelor finite, general aplicabilă pentru orice fel de albii ale cursurilor de apă, naturale sau amenajate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 2, 1989, P. 179—200

Prezentarea bazelor teoretice ale acestei metode este însoțită de unele aplicații de calcul ilustrative, precum și de compararea cu unele, rezultate obținute prin utilizarea metodei de integrare directă-analitică cu funcțiile Bresse (pentru cazul particular al unei albii prismatice, dreptunghiulare și cu panta longitudinală uniformă) și prin utilizarea celei mai comune metode de integrare numerică (metoda standard pas cu pas, pentru albii de curgere oarecare).

FORMULAREA PROBLEMEI

Curgerea apei în albiile rîurilor și canalelor poate fi considerată în general ca : a) *nepermanentă, gradual variată*, dacă variația în timp și în lungul curgerii a parametrilor hidraulici este relativ lentă, și b) *unidimensională*, dacă traseul longitudinal al albiei este relativ rectiliniu sau ușor ondulat în plan orizontal.

Această curgere unidimensională, nepermanentă gradual variată este descrisă matematic suficient de corect de sistemul Saint-Venant (1871) [28], constituit din :

(i) *ecuația de continuitate*, care exprimă principiul conservării materiei

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

ii) *ecuația dinamică de mișcare*, care exprimă principiul conservării energiei :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x} + S_f - S_b = 0, \tag{2}$$

în care x este coordonata spațială în lungul curgerii, t = timpul; $V(x, t)$ — viteza mediată pe adîncimea curgerii; $h\,(x, t)$ — adîncimea de curgere; $S_f(x, t)$ — panta energetică a curgerii; $S_b(x)$ — panta longitudinală a patului albiei (fig. 1a); g — accelerația gravitațională.

Dacă pentru anumite intervale de timp limitate, suficient de mici, variația parametrilor hidraulici este nesemnificativă ($\partial h/\partial t \simeq 0$, $\partial V/\partial t \simeq 0$) atunci regimul curgerii devine *permanent gradual variat*, pentru care sistemul Saint Venant se particularizează sub forma :

$$V\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + h\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ cu soluția } q = V\,h = \text{constant}, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \frac{V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} + S_f - S_b = 0, \tag{4}$$

în care q este debitul lichid specific pe unitatea de lățime a albiei; parametrii hidraulicii V, h, S_f devin funcții ce depind numai de coordonata spațială x din lungul curgerii, ca și panta longitudinală a patului albiei S_f(fig. 1b).

Ecuaţia dinamică a curgerii permanente gradual variate (4), ţinînd cont de ecuaţia de continuitate (3), se transcrie sub următoarea formă :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_b - S_f}{1 - Fr^2}, \tag{5}$$

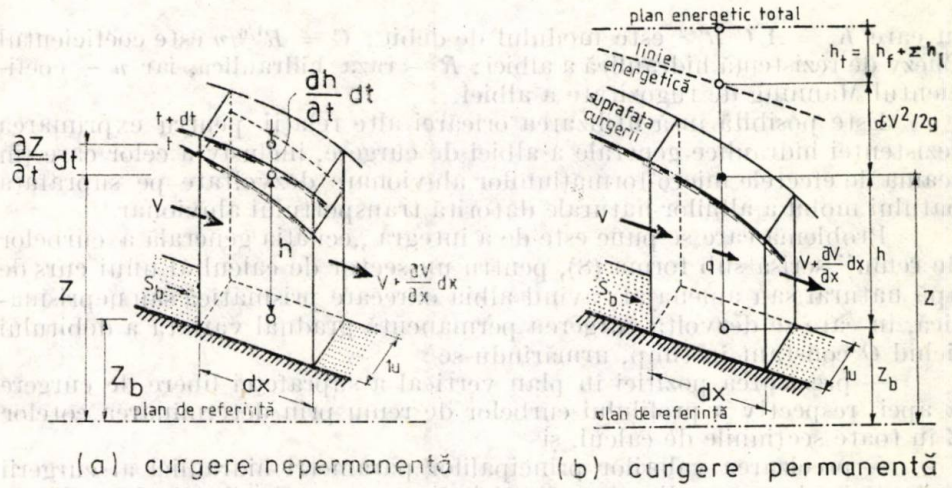


Fig. 1. — Scheme de definiţie şi notaţii pentru curgerile nepermanente şi permanente cu suprafaţă liberă.

cunoscută sub denumirea de „ecuaţia generală a curbelor de remu", în care

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{Q}{\sqrt{gA^3/B}} \tag{6}$$

este numărul Froude al curgerii ; Q — debitul lichid pe întreaga secţiune de curgere ; A — aria udată, iar B — lăţimea albiei la nivelul suprafeţei libere a apei.

Introducînd cota suprafeţei libere a apei $Z(x)$:

$$Z(x) = Z_b(x) + h(x), \tag{7}$$

în care $Z_b(x)$ este cota patului albiei de curgere, ecuaţia curbelor de remu (5) se transcrie generalizat sub forma :

$$\frac{dZ(x)}{dx} - f(x, Z) = 0, \tag{8}$$

în care funcţia $f(x, Z)$ se defineşte ca :

$$f(x, Z) = \frac{S_b Fr^2 - S_f}{1 - Fr^2}. \tag{9}$$

Pentru exprimarea pantei energetice a curgerii S_f, cel mai adesea se utilizează ecuația Chézy-Manning :

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R}, \tag{10}$$

în care $K = A\,C\,R^{1/2}$ este modulul de debit ; $C = R^{1/6}/n$ este coeficientul Chézy de rezistență hidraulică a albiei ; R — raza hidraulică, iar n — coeficientul Manning de rugozitate a albiei.

Este posibilă însă utilizarea oricărei alte relații pentru exprimarea rezistenței hidraulice generale a albiei de curgere, inclusiv a celor care țin seama de efectele micro-formațiunilor aluvionare dezvoltate pe suprafața patului mobil a albiilor naturale datorită transportului aluvionar.

Problema care se pune este de a integra „ecuația generală a curbelor de remu" scrisă sub forma (8), pentru un sector de calcul al unui curs de apă natural sau amenajat, avînd albia oarecare prismatică sau neprismatică, în care se dezvoltă curgerea permanentă gradual variată a debitului lichid Q constant în timp, urmărindu-se :

— precizarea poziției în plan vertical a suprafeței libere de curgere a apei, respectiv a profilului curbelor de remu prin determinarea cotelor Z în toate secțiunile de calcul, și

— precizarea valorilor principalilor parametri hidraulici ai curgerii (adîncimi, viteze, gradienți energetici) în toate secțiunile din lungul sectorului de calcul, corespunzător unor condiții hidraulice la limită, debite și niveluri, impuse la extremitățile amonte-aval ale sectorului de calcul.

METODE DE REZOLVARE

Avînd în vedere importanța și larga aplicabilitate practică a soluție problemei formulate anterior la proiectarea, execuția și exploatarea diver selor lucrări hidrotehnice de amenajare a cursurilor de apă este lesne de înțeles că eforturile hidraulicienilor datează de peste un secol.

Au fost elaborate un mare număr de metode de integrare a ecuației dinamice a curgerii permanente, cu diverse grade de aplicabilitate și de precizie [1] , [7], [6], [23], [16], clasificate în general ca : i) metode de integrare directă (soluții analitice), ii) metode de integrare grafică și grafo-analitică, și iii) metode de integrare numerică.

i) *Metodele de integrare directă*, aplicabile pentru curgerile din albii prismatice de formă geometrică regulată (dreptunghiulară, trapezoidală, parabolică), permit obținerea unor soluții analitice cu o aplicabilitate practică redusă dar de mare interes teoretic.

Aceste prime încercări de soluționare a problemei permit apecierea distanței la care se resimt efectele unei perturbări locale a curgerii prin barare a albiilor dreptunghiulare foarte late [3], [22], [19], [28], [8], sau mai general a albiilor prismatice oarecare [1], [21], [10], [26], [5], [24], [20], [30], [23].

ii) *Metodele de integrare grafică și grafo-analitică*, deși aproximative, au un caracter mai general de aplicabilitate pentru curgerile din albii de orice formă și pantă longitudinală.

Se menționează metodele bazate pe postulatul invarianței modulului de rezistență ($\Delta Z/Q^2$) a albiilor neprismatice și naturale [2], [27], [25], cele bazate pe utilizarea datelor hidrometrice pentru albiile naturale [15], [6], [23], precum și cele specifice curgerilor de adîncime constantă din albiile rîurilor naturale sau amenajate [5], [6], [13], [14].

iii) *Metodele de integrare numerică*, general aplicabile pentru orice tip de albii și de condiții hidraulice de curgere, au fost teoretic fundamentate încă de la începutul secolului [9], [17], dar nu s-au dezvoltat și nu au intrat în practica curentă de calcul decît în ultimele două decenii, odată cu perfecționarea și răspîndirea ordinatoarelor de putere și capacitate mereu crescînde.

Metodele de integrare numerică constau în principiu din :

— transcrierea în diferențe finite a ecuației diferențiale a curbelor de remu (8) pe baza unor scheme explicite sau implicite de discretizare [12], [18] :

$$\frac{Z_{i+1} - Z_i}{\Delta X_{i+1,i}} = f(x_i, Z_i), \tag{11 a}$$

$$\frac{Z_{i+1} - Z_i}{\Delta x_{i+1,i}} = \frac{1}{2}[f(x_i, Z_i) + f(x_{i+1} Z_{i+1})], \tag{11 b}$$

— rezolvarea iterativă prin predicție-corecție a ecuației în diferențe finite (11) astfel obținute, pas cu pas, din secțiunea i în secțiunea $i + 1$ (din aval spre amonte pentru curgerile lent variate, subcritice și respectiv din amonte spre aval pentru curgerile rapid variate, supercritice), în sensul determinării cotei Z_{i+1} pe baza cotei Z_i cunoscute de la pasul anterior de calcul sau din condiția la limită impusă în secțiunea de control aval/amonte.

Pe acest principiu de rezolvare „pas cu pas" se bazează majoritatea metodelor numerice de calcul a curbelor de remu utilizate actualmente în practica hidraulică (metoda pașilor direcți și metoda standard), care au înlocuit practic complet metodele mai vechi de integrare directă, grafică sau grafo-analitică.

În cele ce urmează se propune o modalitate diferită de rezolvare numerică a ecuației generale a curbelor de remu, bazată pe utilizarea tehnicii elementelor finite (MEF), fundamentată teoretic de Zienkiewicz (1971) [32].

Spre deosebire de metodele numerice de tip „pas cu pas" bazate pe diferențe finite, metoda numerică bazată pe elemente finite permite determinarea concomitentă a tuturor necunoscutelor h_i sau Z_i în toate secțiunile sectorului de calcul, evitîndu-se posibilele transmiteri de erori inerente calculului din secțiune în secțiune, inclusiv erorile determinate de influența condițiilor la limită.

În fapt, metoda propusă înlocuiește procedeul iterativ aplicat în lungul curgerii de metodele de tip „pas cu pas", cu un procedeu iterativ rapid convergent aplicat în planul vertical al adîncimilor de curgere, care apare mai convenabil atît în ceea ce privește transmiterea erorilor de calcul, cît și în ceea ce privește timpul de calcul.

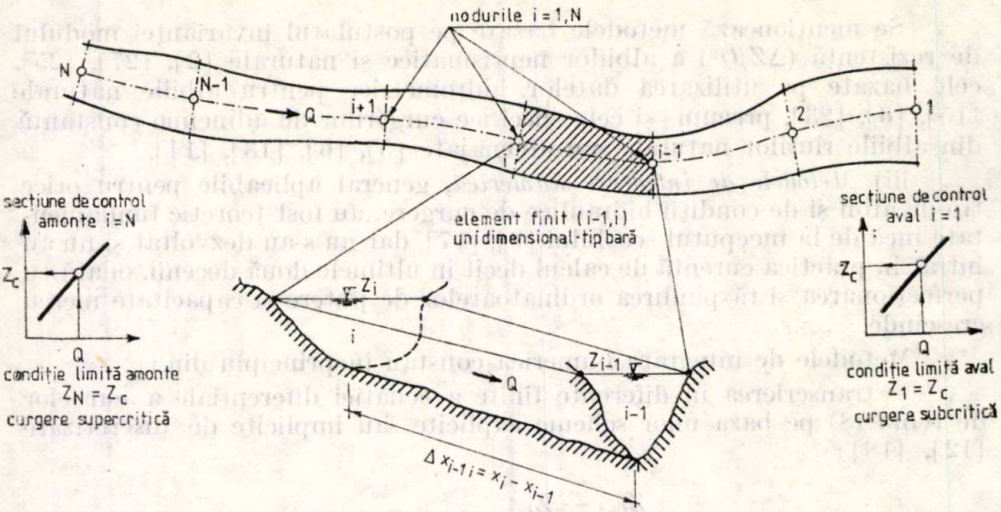


Fig. 2. — Schema curgerii uniforme — noduri și elemente finite.

METODA NUMERICĂ CU ELEMENTE FINITE

Utilizarea tehnicii elementelor finite pentru integrarea numerică a ecuației generale a curbelor de remu (5) sau (8) permite determinarea globală a poziției în plan vertical a suprafeței libere a curgerii permanente gradual variate pe un sector de albie oarecare al unui curs de apă, natural sau amenajat, prin calculul concomitent al necunoscutelor — adîncimile $h(x)$ sau cotele $Z(x)$ — în toate punctele din lungul curgerii, corespunzător unor anumite condiții hidraulice impuse.

Se consideră un sector de rîu sau canal, relativ rectiliniu, de lungime L, avînd albia de formă geometrică oarecare, pe care se dezvoltă curgerea unidimensională, permanentă gradual variată cu suprafața liberă a apei. Condițiile hidraulice specifice acestei curgeri se consideră a fi : a) debitul amonte Q constant în timp și același în toate secțiunile (curgere fără afluenți), și b) adîncimea h_c sau cota suprafeței libere Z_c în secțiunea de control aval dacă curgerea este lent variată, subcritică sau amonte dacă curgerea este rapid variată supercritică, corespnunzător debitului Q (fig. 2).

Conform principiilor generale MEF, domeniul $1D$ al curgerii se împarte cu ajutorul nodurilor N de coordonate spațiale x_i $(i = 1, N)$ într-un număr de $N-1$ elemente liniare de tip „bară" de lungime finită $\Delta x_{i+1,i} = x_{i+1} - x_i$.

Pe domeniul de calcul astfel definit, pentru ecuația diferențială generală a curbelor de remu (8) se caută următoarea soluție aproximativă :

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{N} Z_i \, \Phi_i(x) \tag{12}$$

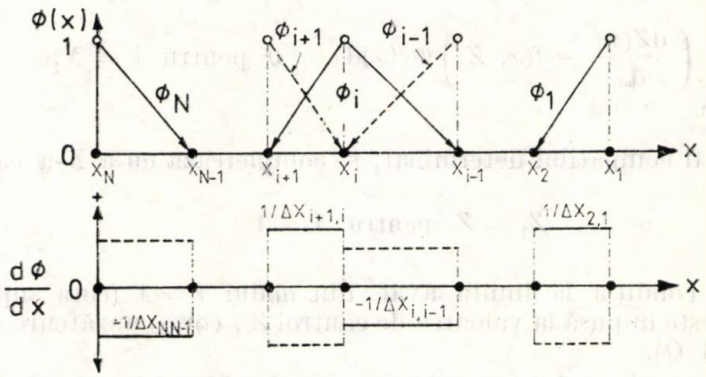
în care Z_i sînt constante necunoscute ce urmează a fi precizate în urma calculului, iar $\Phi_i(x)$ — funcții de formă de tip Kroneker, avînd valorile

0 şi 1 în noduri, cu variaţia liniară între noduri şi cu derivatele $d\Phi_i(x)/dx$ definite în figura 3.

Pentru calculul acestei soluţii aproximative (12) se utilizează principiul variaţional Galerkin [11], constînd din anularea produsului intern dintre funcţia de formă $\Phi_i(x)$ şi reziduul ε.

$$\langle \Phi_i(x),\ \varepsilon \rangle = 0, \tag{13}$$

în care ε se defineşte ca diferenţa dintre soluţia exactă şi soluţia aproximativă.



element finit (2,1)

$$\Phi_1(x) = -(x - x_2)/\Delta x_{2,1} \qquad d\Phi_1(x)/dx = -1/\Delta x_{2,1}$$

$$\Phi_2(x) = (x - x_1)/\Delta x_{2,1} \qquad d\Phi_2(x)/dx = 1/\Delta x_{2,1}$$

element finit (i,i-1)

$$\Phi_{i-1}(x) = -(x - x_i)/\Delta x_{i,i-1} \qquad d\Phi_{i-1}(x)/dx = -1/\Delta x_{i,i-1}$$

$$\Phi_i(x) = (x - x_{i-1})/\Delta x_{i,i-1} \qquad d\Phi_i(x)/dx = 1/\Delta x_{i,i-1}$$

element finit (i+1,i)

$$\Phi_i(x) = -(x - x_{i+1})/\Delta x_{i+1,i} \qquad d\Phi_i(x)/dx = -1/\Delta x_{i+1,i}$$

$$\Phi_{i+1}(x) = (x - x_i)/\Delta x_{i+1,i} \qquad d\Phi_{i+1}(x)/dx = 1/\Delta x_{i+1,i}$$

element finit (N,N-1)

$$\Phi_{N-1}(x) = -(x - x_N)/\Delta x_{N,N-1} \qquad d\Phi_{N-1}(x)/dx = -1/\Delta x_{N,N-1}$$

$$\Phi_N(x) = (x - x_{N-1})/\Delta x_{N,N-1} \qquad d\Phi_N(x)/dx = 1/\Delta x_{N,N-1}$$

Fig. 3. — Funcţiile de formă şi derivatele lor.

Aplicînd acest principiu rezidual-ponderat ecuației (8) pentru fiecare element finit $i = 2, N$ al domeniului de calcul al curgerii permanente lent variate, subcritice, se obține următorul sistem de $N-1$ ecuații integro—diferențiale :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} - f(x, Z) \right) \Phi_i(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pentru} \quad i = 2,\ N-1$$

și, respectiv,

$$\int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,\ Z) \right) \Phi_N(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pentru} \quad i = N, \tag{14}$$

care pentru a fi compatibil determinat, se completează cu a N-a ecuație :

$$Z_1 = Z_c \quad \text{pentru} \quad i = 1 \tag{15}$$

reprezentînd condiția la limita aval, din nodul $i = 1$ (cota suprafeței libere a apei este impusă la valoarea de control Z_c, corespunzătoare debitului de calcul Q).

Pentru cazul unei curgeri permanent rapid variate, supercritice, sistemul integro-diferențial care se obține pentru elementele $i = 1, N-1$ este de forma :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,\ Z) \right) \Phi_1(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pentru} \quad i = 1,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,\ Z) \right) \Phi_i(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pentru} \quad i = 2,\ N-1, \tag{16}$$

care se completează cu a N-a ecuație :

$$Z_N = Z_c \tag{17}$$

reprezentînd de această dată condiția la limita amonte, din nodul $i = N$.

Rezolvarea acestui sistem de N ecuații — (14) și (15) pentru cazul curgerilor lent variate, subcritice la care ne vom referi mai departe și respectiv (16) și (17) pentru cazul curgerilor rapid variate, supercritice — permite determinarea celor N constante necunoscute $Z_i (i = 1, N)$, pe baza cărora este posibilă asamblarea soluțiilor aproximative (12), avînd în vedere că valorile funcțiilor de formă în și între noduri sînt cunoscute.

Integralele care apar în sistemul (14) se calculează pentru fiecare element de lungime finită $\Delta x_{i,i+1}$, utilizîndu-se metoda Simpson :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x_{i,i+1}}{6}\,(F(x_i) + 4F(x_{i+1/2}) + F(x_{i+1})), \tag{18}$$

în care

$$F(x_i) = \left(Z_i \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}x} + Z_{i+1} \frac{\mathrm{d}\Phi_{i+1}}{\mathrm{d}x} - f(x_i, Z_i)\right)\Phi_i. \tag{19}$$

Efectuarea calculelor, ținînd seama de expresiile de definiție ale funcțiilor de formă Φ_i și derivatelor lor $\mathrm{d}\Phi_i/\mathrm{d}x$ date în figura 3, conduce la următorul sistem algebric neliniar de N ecuații cu N necunoscute :

$$\begin{gathered} Z_1 = Z_c \text{ pentru } i = 1, \\ Z_{i-1} - Z_{i+1} + \frac{2}{3}\Delta x_{i-1,i} f(x_{i-1/2}, Z_{i-1/2}) + \frac{1}{3}\Delta x_{i-1,i+1} f(x_i, Z_i) + \\ + \frac{2}{3}\Delta x_{i,i+1} f(x_{i+1/2}, Z_{i+1/2}) = 0 \text{ pentru } i = 2, N-1, \\ Z_{N-1} - Z_N + \frac{2}{3}\Delta x_{N-1,N} f(x_{N-1/2}, Z_{N-1/2}) + \\ + \frac{1}{3}\Delta x_{N-1,N} f(x_N, Z_N) = 0 \text{ pentru } i = N, \end{gathered} \tag{20}$$

în care $f(x_i, Z_i)$ este valoarea funcției f definită prin (9) în nodurile $i = 1, N$, iar $f(x_{i-1/2}, Z_{i-1/2})$ și $f(x_{i+1/2}, Z_{i+1/2})$ = valorile funcției f la mijlocul intervalelor $(i-1, i)$ și respectiv $(i, i+1)$.
Acceptînd următoarea ipoteză liniară :

$$\begin{aligned} f(x_{i-1/2}, Z_{i-1/2}) &= \frac{1}{2}(f(x_{i-1}, Z_{i-1}) + f(x_i, Z_i)), \\ f(x_{i+1/2}, Z_{i+1/2}) &= \frac{1}{2}(f(x_i, Z_i) + f(x_{i+1}, Z_{i+1})), \end{aligned} \tag{21}$$

sistemul (20) se transcrie sub următoarea formă compactă :

$$\begin{gathered} Z_1 = Z_c \text{ pentru } i = 1, \\ Z_{i-1} - Z_{i+1} + T_1(Z_{i-1}, Z_i, Z_{i+1}) = 0 \text{ pentru } i = 2, N-1, \\ Z_{N-1} - Z_N + T_N(Z_{N-1}, Z_N) = 0 \text{ pentru } i = N, \end{gathered} \tag{22}$$

în care termenii $T_i (i = 2,\ N-1)$ și $T_N (i = N)$ care determină neliniaritatea sistemului (fiind funcții de necunoscutele Z_i și Z_N) sînt definiți ca :

$$T_i = \frac{1}{3}\Delta x_{i-1,i} f(x_{i-1},\ Z_{i-1}) + \frac{2}{3}\Delta x_{i-1,i+1} f(x_i,\ Z_i) + \\ + \frac{1}{3}\Delta x_{i,i+1} f(x_{i+1}, Z_{i+1}), \tag{23}$$

$$T_N = \frac{1}{3}\Delta x_{N-1,N} f(x_{N-1},\ Z_{N-1}) + \frac{2}{3}\Delta x_{N-1,N} f(x_N,\ Z_N).$$

O altă variantă posibilă a ipotezei (21) este de a exprima cele două funcții de la mijlocul intervalelor $(i-1,\ i)$ și $(i,\ i+1)$ cu ajutorul ecuației (9), în care panta patului S_b, numărul Froude Fr și panta energetică S_f să fie calculate ca valori medii aritmetice între valorile corespunzătoare nodurilor $i-1$, i și respectiv i, $i+1$; pentru simplificare, în cadrul prezentei lucrări a fost adoptată ipoteza (21) care a condus la rezultate satisfăcătoare.

Pentru liniarizarea sistemului (22) s-a procedat la dezvoltarea în serie Taylor a termenilor T_i, în jurul unui punct de referință O, care din punct de vedere hidraulic apare rezonabil a fi considerat cel corespunzător regimului uniform de curgere.

Reținerea numai a termenilor de ordinul întîi ai dezvoltării permite liniarizarea sistemului (22) sub următoarea formă :

$$Z_1 = Z_c \text{ pentru } i = 1,$$

$$a_i Z_{i-1} + b_i Z_i + c_i Z_{i+1} = t_i \text{ pentru } i = 2,\ N-1 \text{ și respectiv}$$

$$a_N Z_{N-1} + b_N Z_N = t_N \text{ pentru } i = N, \tag{24}$$

în care notațiile introduse au următoarele semnificații :

$$a_i = \frac{1}{3}\Delta x_{i-1,i} \frac{\partial f^0(x_{i-1},\ Z_{i-1})}{\partial Z_{i-1}} + 1,$$

$$b_i = \frac{2}{3}\Delta x_{i-1,i+1} \frac{\partial f^0(x_i,\ Z_i)}{\partial Z_i},$$

$$c_i = \frac{1}{3}\Delta x_{i,i+1} \frac{\partial f^0(x_{i+1},\ Z_{i+1})}{\partial Z_{i+1}} - 1,$$

$$t_i = (a_i - 1) Z^0_{i-1} + b_i Z^0_i + (c_i + 1) Z^0_{i+1} - T^0_i, \tag{25}$$

$$a_N = \frac{1}{3}\Delta x_{N-1,N} \frac{\partial f^0(x_{N-1},\ Z_{N-1})}{\partial Z_{N-1}} + 1,$$

$$b_N = \frac{2}{3}\Delta x_{N-1,N} \frac{\partial f^0(x_N,\ Z_N)}{\partial Z_N} - 1,$$

$$t_N = (a_N - 1) Z^0_{N-1} + (b_N + 1) Z^0_N - T^0_N,$$

unde indicele 0 corespunde condițiilor regimului de curgere uniformă, pentru care de altfel sistemul (24) este verificat.

Termenii liberi t_i ai ecuațiilor sistemului (24) includ funcțiile $f(x, Z)$ definite prin (9) în diverse noduri i și corespunzători regimului uniform de curgere, iar coeficienții a_i, b și c_i sînt definiți pe baza derivatelor $\partial f(x, Z)/\partial Z$ ale acestor funcții în raport cu necunoscutele Z_i.

Aceste derivate se obțin din (9) sub următoarea formă generală :

$$\frac{\partial f(x, Z)}{\partial Z} = \frac{2\,Fr}{1 - Fr^2}\,(f(x, Z) - S_b)\,\frac{\partial Fr}{\partial Z} + \frac{1}{1 - Fr^2}\,\frac{\partial S_f}{\partial Z}, \tag{26}$$

în care

$$\frac{\partial Fr}{\partial z} \simeq -\frac{3B}{2A}\,Fr, \qquad \frac{\partial S_f}{\partial Z} \simeq -\frac{10B}{3A}\,S_f \tag{27}$$

dacă se acceptă că $\partial B/\partial Z \simeq 0$ în raport cu $\partial A/\partial Z \simeq B$ și dacă panta energetică S_f se definește cu ecuația Chézy-Manning.

Sistemul liniar (24) are proprietatea că determinantul coeficienților este tridiagonal, ceea ce permite obținerea directă, neiterativă a soluțiilor pe baza următoarelor relații recurente :

$$\begin{gathered} Z_1 = Z_c \text{ pentru } i = 1 \text{ (condiția la limita aval)}, \\ Z_i = \alpha_i Z_{i+1} + \beta_i \text{ pentru } i = 2,\ N-1, \\ Z_N = \beta_N \text{ pentru } i = N, \end{gathered} \tag{28}$$

în care

$$\alpha_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}, \qquad \beta_i = \frac{t_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}. \tag{29}$$

Calculul soluțiilor (28) pe baza relațiilor recurente (29) se efectuează începînd cu secțiunea extremală opusă secțiunii de control, deci cu secțiunea amonte în cazul curgerii permanente subcritice și se continuă pînă în secțiunea de control aval $i = 1$.

Valoarea necunoscutei Z_N din secțiunea amonte se obține prin eliminarea necunoscutei Z_{N-1} din relația recurentă (28) pentru $i = N-1$:

$$Z_{N-1} = \alpha_{N-1}\,Z_N + \beta_{N-1}$$

și ultima ecuație a sistemului (24) pentru $i = N$

$$a_N Z_{N-1} + b_N Z_N = t_N$$

sub forma

$$Z_N = \frac{t_N - a_N\,\beta_{N-1}}{b_N + a_N\alpha_{N-1}} = \beta_N,$$

ceea ce este similar cu a aplica relația recurentă (28) și pentru $i = N$ considerînd însă că $Z_{N+1} = 0$.

Determinarea pe această bază recurentă a tuturor constantelor necunoscute $Z_i (i = 1, N)$ și utilizarea valorilor funcțiilor de formă în nodurile i, fac posibilă asamblarea soluțiilor numerice aproximative (12), rezultînd cotele suprafeței libere a apei $Z_i(x)$ în toate cele N noduri din lungul curgerii.

Soluțiile numerice astfel obținute pentru curgerea permanentă depind de vectorul cotelor inițiale „0" corespunzător regimului uniform de curgere, pe baza căruia se liniarizează sistemul (22). Nivelul de precizie al soluțiilor numerice este afectat direct de diferența dintre regimul permanent gradual variat al curgerii reale și regimul uniform al curgerii echivalente considerate inițial.

În aceste condiții se impune necesitatea adoptării unei metode de îmbunătățire a soluțiilor numerice, de tip predicție-corecție, constînd din : (i) obținerea în prima aproximație a vectorului cotelor $Z_i(x)$ din lungul curgerii permanente pe întregul sector de calcul, utilizîndu-se vectorul cotelor inițiale Z_i^0 corespunzător curgerii uniforme, (ii) reluarea calculului în a doua aproximație utilizîndu-se ca vector inițial vectorul cotelor calculate în prima aproximație, și (iii) continuarea calculului în mod similar pînă cînd între două aproximații succesive, vectorii cotelor în toate nodurile nu diferă cu mai mult de toleranța de calcul admisă. Acest procedeu de îmbunătățire a soluțiilor numerice în planul vertical al adîncimilor pe întregul sector de calcul, este aplicabil indiferent de regimul lent sau rapid variat al curgerii permanente și rapid convergent ; sînt necesare un număr redus de reluări a calculului pentru obținerea soluțiilor numerice finale, după cum se ilustrează spre exemplificare în figura 4 pentru curgerea permanentă subcritică a debitului specific de 10,09 $m^2 s^{-1}$ din albia dreptunghiulară de 100 m lățime a unui canal de 5,0 km lungime și cu panta patului de 0,001 la care se impune drept condiție la limită cota de control 107 m la extremitatea aval.

Pentru reducerea numărului de reluări de calcul, respectiv pentru scurtarea duratei de calcul pînă la atingerea soluțiilor numerice finale ale curgerii permanente, este posibil ca, în funcție de experiența utilizatorului, vectorul inițial al cotelor curgerii uniforme să fie înlocuit cu un alt vector intermediar, presupus cît mai apropiat de vectorul cotelor curgerii permanente.

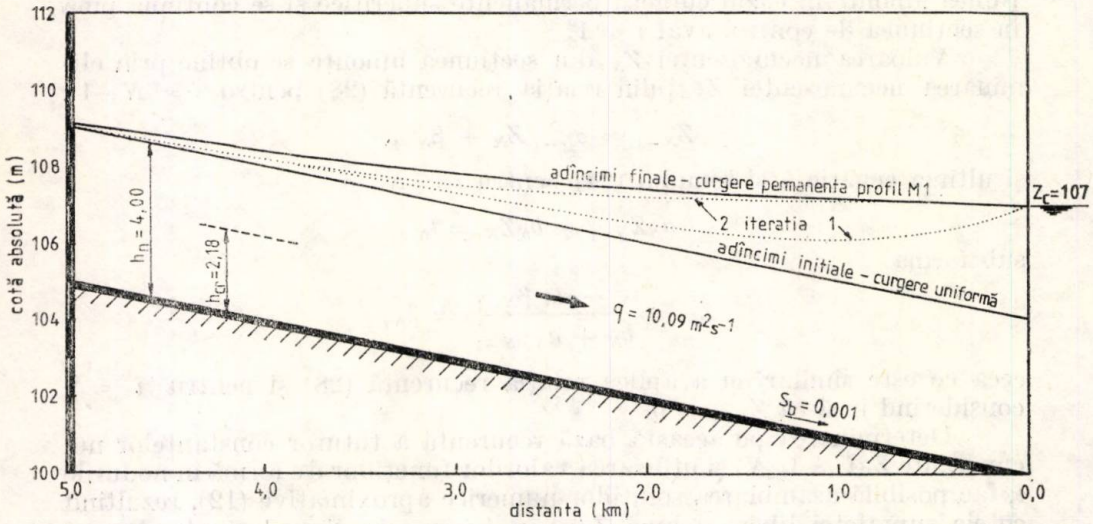


Fig. 4. — Dezvoltarea calculului iterativ în planul vertical al adîncimilor/cotelor de curgere.

Odată determinate soluțiile numerice finale reprezentînd cotele suprafeței libere a curgerii permanente gradual variate în condițiile hidraulice impuse funcție de caracterul lent, subcritic sau rapid, supercritic, al acesteia, respectiv profilul curbei de remu, funcție de caracteristicile geometrice ale albiei din fiecare nod se determină valorile tuturor parametrilor hidraulici ce definesc curgerea analizată.

APLICAȚII DE CALCUL

Metoda numerică bazată pe tehnica elementelor finite a fost aplicată pentru calculul regimului curgerii permanente lent variate, subcritice a apei cu suprafață liberă, dezvoltată într-un canal cu următoarele caracteristici geometrice :

— lungimea sectorului de calcul de 5,0 km,

— albie dreptunghiulară de lățime constantă de 100 m, sau de lățime variabilă 60—100 m,

— panta longitudinală a patului, uniformă de 0,001 sau variabilă 0,001—0,002.

— coeficientul Manning de rugozitate constant de 0,030.

Regimul curgerii uniforme pentru debitul specific pe unitatea de lățime de $q_u = 10{,}09$ m^2 s^{-1}, se realizează la adîncimea normală $h_n = 4{,}00$ m și respectiv la adîncimea critică $h_{cr} = 2{,}18$ m.

În cadrul diferitelor scenarii de calcul au fost luate în considerație următoarele condiții hidraulice de curgere :

— variația cotei de control Z_c din secțiunea aval între valorile 103 și 107 m, respectiv a adîncimii de control aval $h_c = 3{,}00$ m inferioare și $h_c = 5{,}00—7{,}00$ m superioare adîncimii normale $h_n = 4{,}00$ m, în condițiile menținerii constante a debitului specific $q = 10{,}09$ m^2 s^{-1} corespunzător regimului curgerii uniforme,

— variația debitului lichid specific $q/q_u = 0{,}5—1{,}5$ inferior și respectiv superior debitului curgerii uniforme $q_u = 10{,}09$ m^2 s^{-1} în condițiile menținerii constante a adîncimii de control aval $h_c = 4{,}00$ m corespunzătoare regimului curgerii uniforme.

Efectuarea calculelor a evidențiat următoarele :

(i) Cu ajutorul metodei numerice bazate pe tehnica elementelor finite se pot preciza caracteristicile regimului curgerii permanente lent variate, subcritice dezvoltate în albia de lățime constantă (100 m), pentru diverse condiții hidraulice impuse, și anume :

— variația adîncimii de control aval pentru același debit, determină dezvoltarea profilelor de remu (curbe de stăvilire) de tip M1 și M2 ilustrate în figura 5 ;

— precizia soluției numerice este afectată de lungimea elementelor finite Δx în cazul profilului de remu de tip M2, dar mai puțin în cel al profilului de tip M1, după cum se ilustrează în figura 6 ;

— variația debitelor pentru aceeași adîncime de control aval, determină de asemenea dezvoltarea profilelor de remu de tip M1 și M2 ilustrate în figura 7.

(ii) Efectele variației locale a pantei longitudinale a patului și ale lățimii secțiunii asupra regimului curgerii permanente subcritice sînt evidențiate separat în figurile 6 și 9 și respectiv combinat în figura 10.

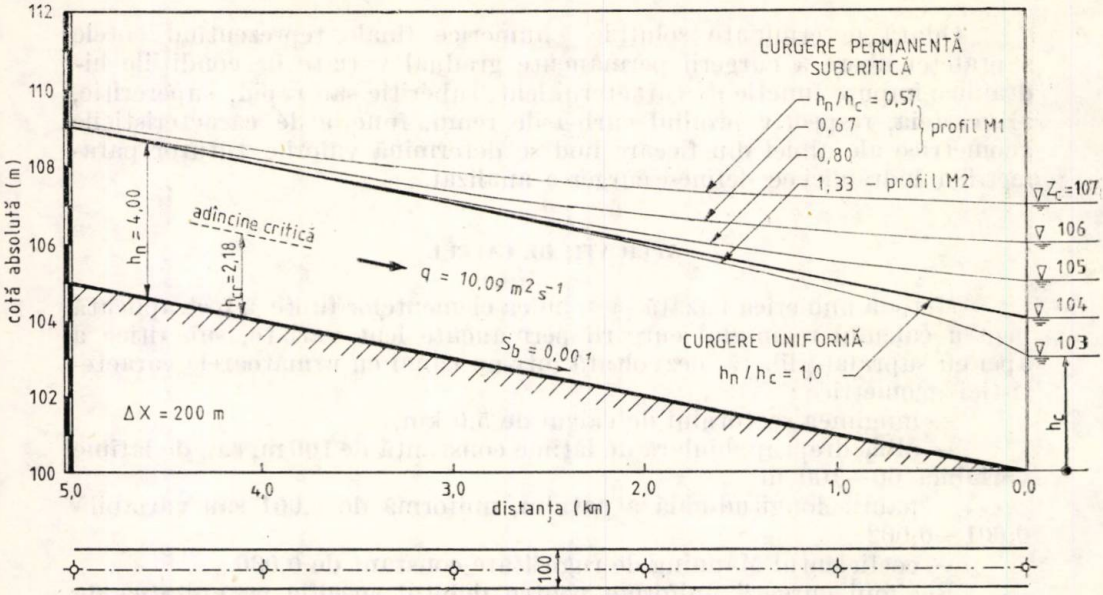


Fig. 5. — Calculul numeric MEF al profilelor M1 și M2 de curgere permanentă subcritică (același debit q și diverse adîncimi de control aval h_c), dezvoltate într-o albie de lățime constantă și pantă continuă.

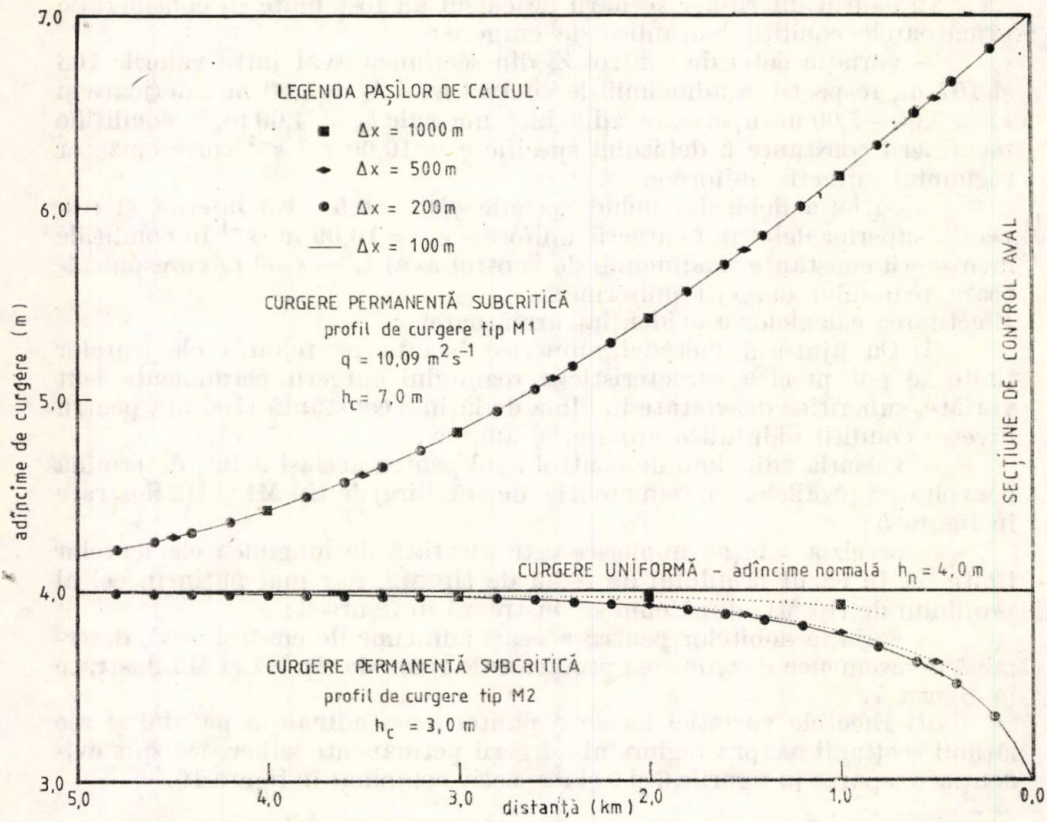


Fig. 6. — Efectul lungimii elementelor finite asupra preciziei rezultatelor numerice.

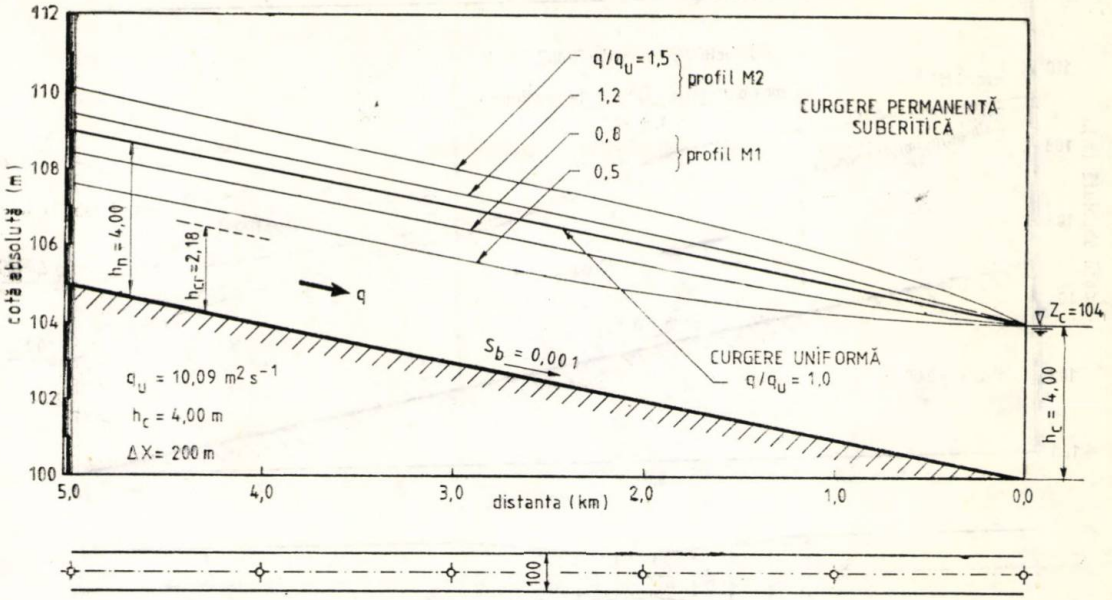


Fig. 7. — Calculul numeric MEF al profilelor M1 și M2 de curgere permanentă subcritică (diverse debite q și aceeași adîncime de control aval h_c), dezvoltate într-o albie de lățime constantă și pantă continuă.

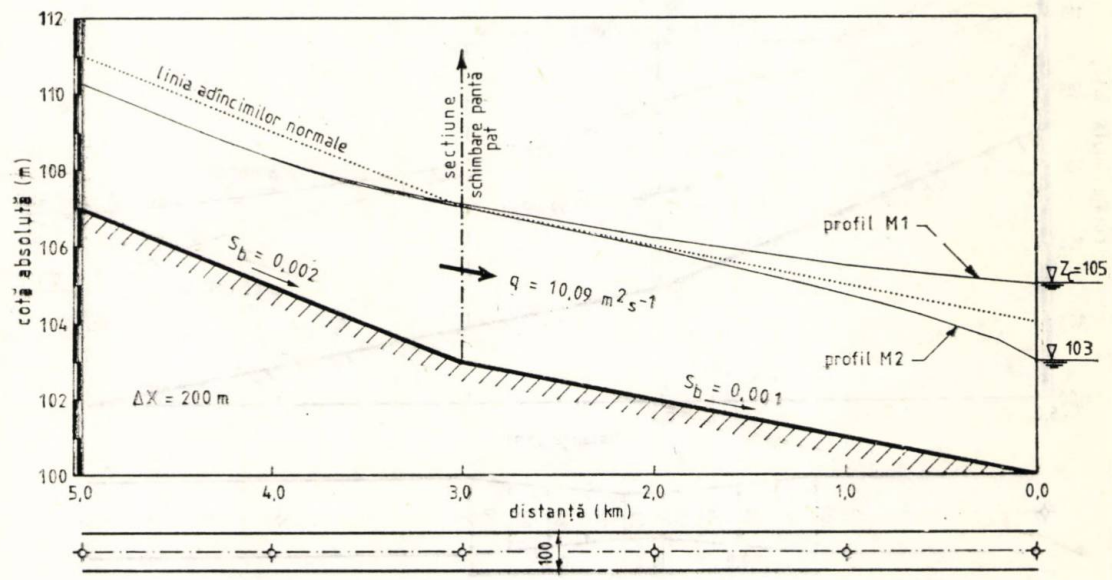


Fig. 8. — Calculul numeric MEF al curgerii permanente subcritice dezvoltate într-o albie de lățime constantă și cu panta patului discontinuă.

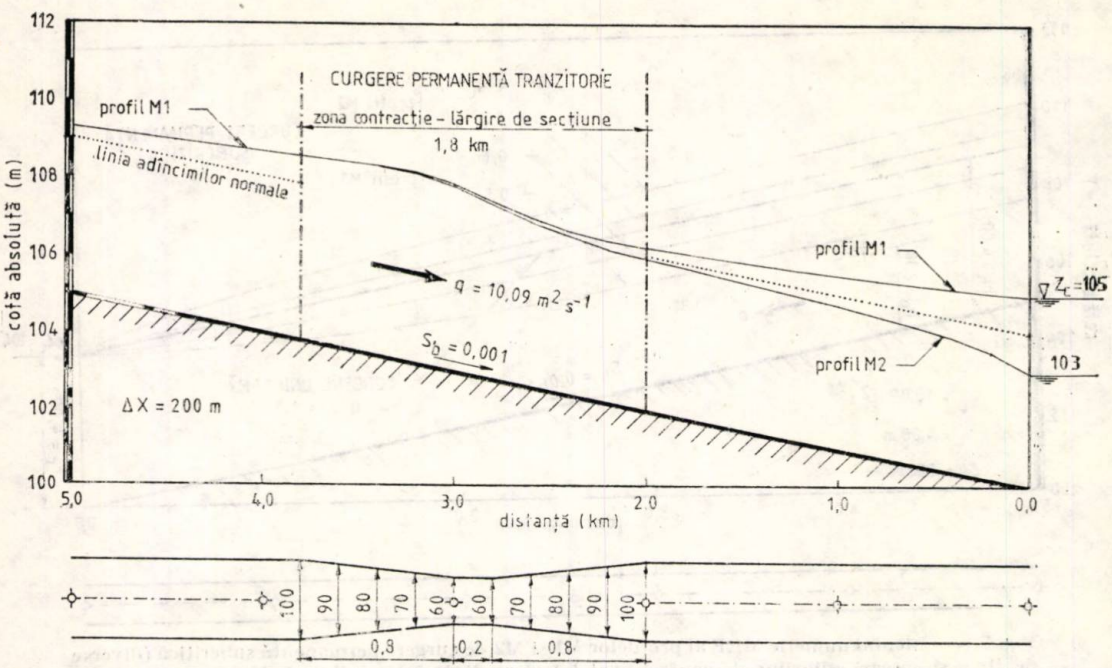


Fig. 9. — Calculul numeric MEF al curgerii permanente subcritice dezvoltate tranzitoriu printr-o contracție-lărgire a secțiunii transversale.

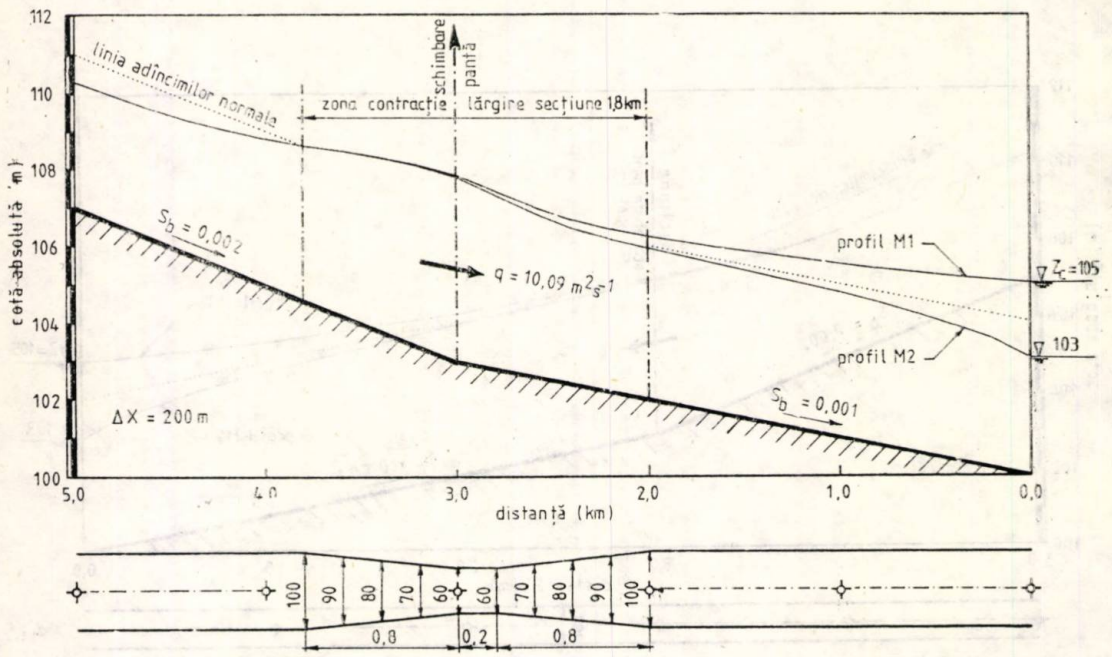


Fig. 10. — Calculul numeric MEF al curgerii permanente subcritice dezvoltate într-o albie cu panta patului discontinuă și cu contracție-lărgire a secțiunii transversale.

(iii) Rezultate similare au fost obținute și pentru condițiile curgerii permanente rapid variate, supercritice.

Deosebit de importantă este observația referitoare la efectul lungimii elementelor finite Δx asupra preciziei rezultatelor numerice (fig. 6), care conduce la următoarele concluzii :

— în calculul profilelor de remu de tip M1, se pot adopta elemente finite foarte mari (de ordinul a 1/10—1/5 din lungimea sectorului de calcul) fără a se altera semnificativ precizia rezultatelor numerice ;

— în calculul profilelor de remu de tip M2, este necesar a se adopta elemente finite mai mici (de ordinul a 1/25—1/50 din lungimea sectorului de calcul pentru cazul analizat), recomandîndu-se efectuarea unor teste prealabile de calcul care să indice lungimea optimă ; în cazul analizat s-a remarcat că pentru $\Delta x = 200$ și 100 m rezultatele numerice sînt practic identice, motiv pentru care la calculul diverselor scenarii de curgere s-a adoptat $\Delta x = 200$ m.

COMPARAREA SOLUȚIEI NUMERICE ÎN ELEMENTE FINITE CU SOLUȚIA ANALITICĂ BRESSE ȘI CU SOLUȚIA NUMERICĂ STANDARD PAS CU PAS ÎN DIFERENȚE FINITE*)

Pentru aprecierea nivelului de precizie al rezultatelor numerice obținute cu ajutorul metodei propuse utilizînd tehnica elementelor finite, s-a procedat la compararea cu rezultatele obținute pentru același caz de calcul prin integrare directă (soluția analitică) cu funcțiile Bresse (1860) [3], precum și prin clasica metodă numerică standard pas cu pas în diferențe finite [18], [23].

Comparația a fost efectuată pentru cazul particular al curgerii permanente lent variate, subcritice cu $q = 10{,}09$ m^{2}s^{-1} și $h_c = 3{,}00—7{,}00$ m dezvoltate în albia aceluiași canal de secțiune dreptunghiulară foarte lată (100 m) în raport cu adîncimea (3,00—7,00 m) și de pantă continuă a patului (0,001), pentru care este posibilă obținerea unei soluții analitice.

Prin integrarea directă a ecuației generale a curbelor de remu (5) posibilă pentru aceste condiții hidraulice particulare, [3], [8], se obține următoarea soluție analitică exprimînd lungimea de remu L_i dintre două secțiuni (c — secțiunea de control aval și i — secțiune curentă amonte) între care se realizează adîncimi de curgere (adîncimea de control aval h_c și respectiv adîncimea curentă amonte h_i) (fig. 11 *a*) :

$$L_i = \frac{h_c - h_i}{S_b} - \frac{h_n}{S_o}\left(1 - \frac{h_{cr}^3}{h_n^3}\right)[F_B(\eta_c) - F_B(\eta_i)], \tag{30}$$

în care h_n este adîncimea normală corespunzătoare regimului de curgere uniformă a debitului q, h_{cr} — adîncimea critică corespunzătoare condițiilor critice de curgere cu numărul Froude unitar ($(q^2/g)^{1/3}$ pentru albii dreptunghiulare), iar $F_B(\eta_i)$ — funcțiile Bresse (fig 11 *b*), definite ca :

$$F_B(\eta_i) = \frac{1}{6}\ln\frac{h^2 + hh_n + h_n^2}{(h - h_n)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2h + h_n}{\sqrt{3}\,h_n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{31}$$

*) Calculul soluției numerice standard pas cu pas în diferențe finite a fost efectuat de T. Ghinda, de la Institutul de Cercetări Hidrotehnice, București.

și exprimate în cele două secțiuni c și i cu $\eta_c = h_c/h_n$, $h = h_c$ și respectiv $\eta_i = h_i/h_n$, $h = h_i$.

Calculul soluției analitice și compararea cu soluția numerică cu elemente finite relevă o concordanță foarte bună a profilelor de remu de

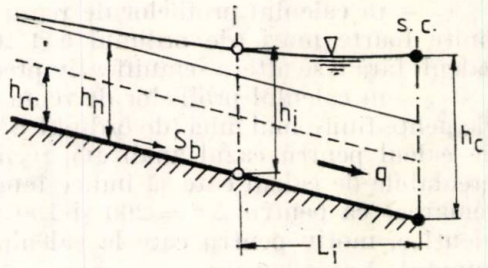
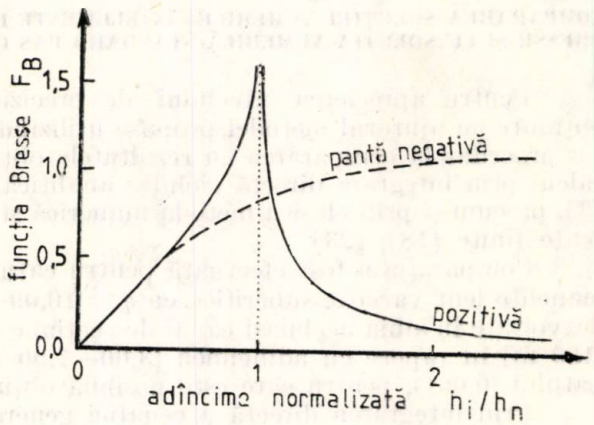


Fig. 11. — Soluția analitică bazată pe funcțiile Bresse.

(a) schemă de definiție și notații



(b) funcțiile Bresse

tip M1 și M2 ale curgerii permanente lent variate calculate prin cele două metode, după cum se ilustrează grafic în figura 12.

Pentru același scenariu de calcul, comparația a fost extinsă și asupra rezultatelor obținute prin utilizarea metodei numerice standard pas cu pas, cu diferențe finite, după cum se ilustrează în figurile 13 și 14.

Compararea rezultatelor furnizate de cele trei metode de calcul permite următoarele observații :

— pentru cazul profilelor de remu de tip M1, soluțiile numerice cu elemente și diferențe finite conduc la adîncimi de curgere mai reduse decît cele obținute analitic, abaterile maxime de sub 1,5% înregistrîndu-se pe jumătatea amonte a sectorului de calcul, iar

— pentru cazul profilelor de remu tip M2, soluțiile numerice cu elemente și diferențe finite sînt practic identice, conducînd însă la adîncimi de curgere mai mari decît cele obținute analitic, abaterile maxime de sub 1,1% înregistrîndu-se pe treimea aval a sectorului aval.

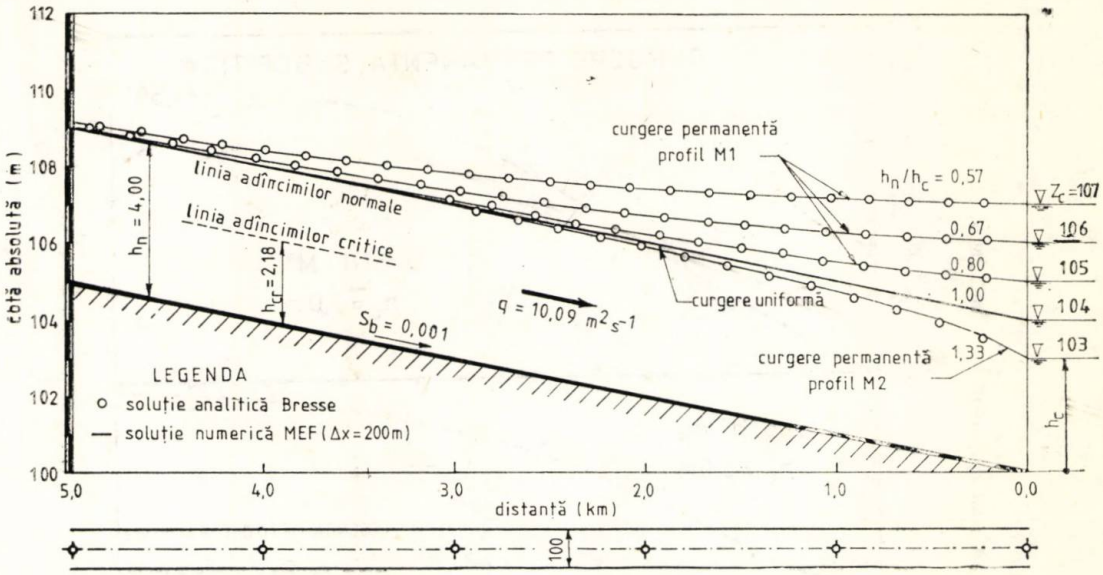


Fig. 12. — Compararea profilelor M1 și M2 de curgere permanentă subcritică calculate analitic cu funcțiile Bresse și numeric cu elemente finite.

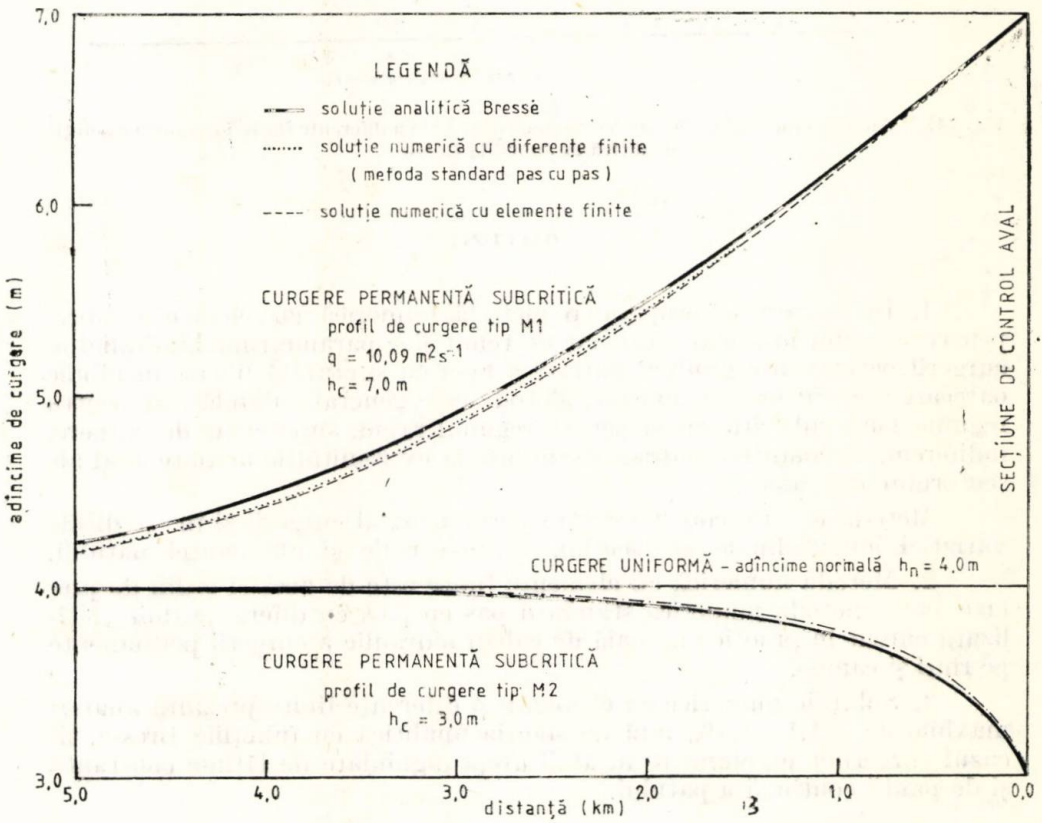


Fig. 13. — Compararea adîncimilor de curgere permanentă subcritică calculate analitic și numeric cu elemente și cu diferențe finite.

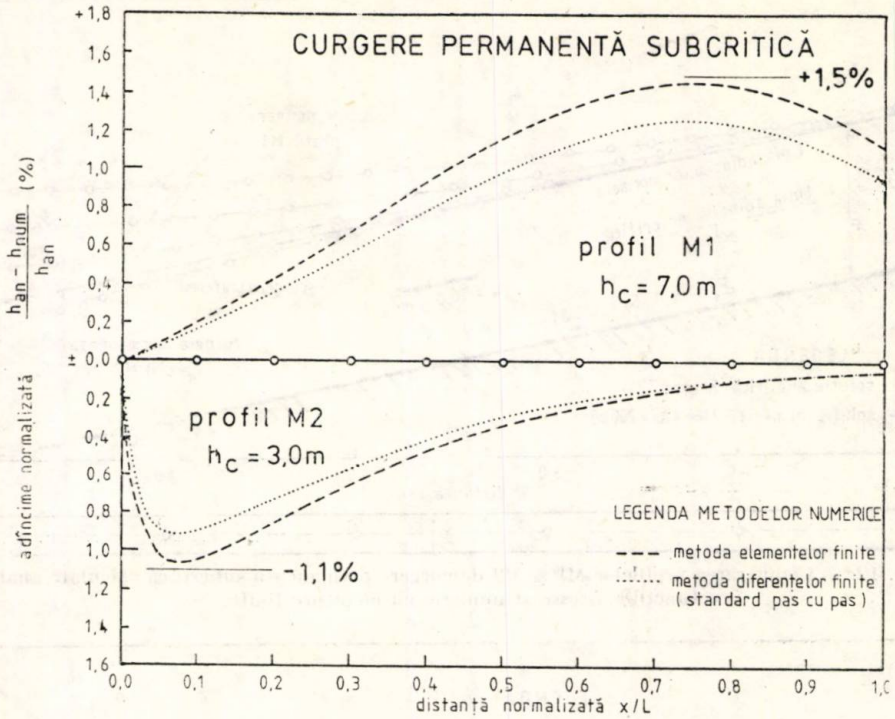


Fig. 14. — Analiza erorii soluțiilor numerice cu elemente și cu diferențe finite în raport cu soluția analitică cu funcțiile Bresse.

CONCLUZII

1. În lucrare se propune o metodă numerică cu elemente finite, pentru calculul profilelor curbelor de remu și a parametrilor hidraulici ai curgerii permanente gradual variate a apei cu suprafață liberă în albiile oarecare ale rîurilor și canalelor. Metoda este general valabilă atît pentru regimul lent, subcritic cît și pentru regimul rapid, supercritic de curgere, indiferent de condițiile hidraulice impuse la extremitățile amonte-aval ale sectorului de calcul.

Metoda descrie corect regimul permanent al curgerii și în condițiile variației longitudinale ale secțiunii transversale și ale pantei patului.

2. Metoda numerică cu elemente finite este de același ordin de precizie ca și metoda numerică standard pas cu pas, cu diferențe finite, utilizată curent în practica actuală de calcul hidraulic a curgerii permanente pe rîuri și canale.

3. Soluțiile numerice cu elemente și diferențe finite prezintă abateri maxime de $\pm 1{,}1 - 1{,}5\%$ față de soluția analitică cu funcțiile Bresse, în cazul curgerilor permanente în albii dreptunghiulare de lățime constantă și de pantă continuă a patului.

4. Precizia soluţiilor numerice cu elemente şi diferenţe finite este mult mai puţin afectată de lungimea elementelor/paşilor de calcul în cazul profilelor de remu subcritice de tip M1, decît în cazul profilelor de tip M2.

În aceste condiţii, pentru calculul profilelor M1 se pot adopta elemente/paşi de calcul mai mari pentru economisirea timpului de utilizare al ordinatorului, iar pentru calculul profilelor M2 se recomandă efectuarea unor teste prealabile pentru adoptarea valorilor optime ale lungimii elementelor/paşilor de calcul, care să nu afecteze precizia rezultatelor numerice dar care să asigure o durată minimă de calcul.

Primit în redacţie la 12 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. B. A. BAKHMETEFF, *Hydraulics of open channels*, Mc Graw Hill Book Company Inc., New York, 1932.
2. N. M. BERNADSKY, *Recinaia ghidravlika, eio teoria i metodologhia*, ONTI, **1** (1933).
3. J. A. C. BRESSE, *Cours de mécanique appliquée*, Paris, 1860.
4. M. D. CERTOUSOV, *Injenernaia ghidravlika*, Kubuci, 1934.
5. M. D. CERTOUSOV, *Ob odnom sposobe integrirovaniia uravneniia ustavivşegosia medlenno izmeniascegosia neravnomernogo dvijenia jidkosti v otkritom rusle*, Trudi LPI, 1 (1946).
6. M. D. CERTOUSOV, *Ghidravlika. Speţialnii curs*, GEI, Moskva, Leningrad, 1962.
7. V. T. CHOW, *Integrating the equation of gradually varied flow*, Proc. American Society of Civil Engineers, **81**, Paper 838 (1955).
8. V. T. CHOW, *Open channel hydraulics*, Mc Graw Hill Book Company Inc., New York, 1959.
9. V. I. CIARNOMSKY, *Zadaci na ustanovivşciesia neravnomernoe tecenie vodi v otkritih priamih ruslah s priamougolnim i trapeţeidalnim poperecinim seceniem*, Varşovia, 1914.
10. R. R. CIUGAEV, *Nekotorie voprosi neravnamernogo dvijenia vodi v otkritih prizmaticeskih ruslah*, Izvestia VNIIG, 1, (1931).
11. J. J. CONNOR, C. A. BREBBIA, *Finite element techniques for fluid flows*, Nownes-Butterworths, 1976.
12. B. S. EICHERT, *Survey of programs for water-surface profiles*. Proc. American Society of Civil Enginneers, **96**, HY2 (1970).
13. F. F. ESCOFFIER, *Graphic calculation of backwater eliminates solutions by trials*, Engineering News-Record, **136**, 26 (1946).
14. A. A. EZRA, *A direct step method for computig water-surface profiles*, Trans. American Society of Civil Engineers, **119** (1954).
15. C. I. GRIMM, *Backwater slopes above dams*, Engineering News-Record, **100**. **23** (1928).
16. F. M. HENDERSON, *Open channel flow*, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Ltd., London, 1966.
17. A. G. HUSTED, *New method of computing backwater and drop-down curves*. Engineering News-Record, **92** (1924).
18. P. P. JANSEN, L van BENDEGOM, J van den BERG, M de VRIES, A. ZANEN, *Principles of river engineering. The nin-tidal alluvial river*, Pitman, 1979.
19. J. KOZENY, *Berechnung der senkungskurve in regelmassigen breiten gerinnen*, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 23, 16 (1928).
20. M. LEE, *Steady gradually varied flow in uniform channels on mild slopes*, Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana, 1947.
21. I. I. LEVI, *Ghidravliceskie pokazateli rusla i ih prilojenie k teorii neravnomernogo dvijenia jidkosti v otkritih kanalah i ruslah*, Vestnik Irigaţii, 2 (1925).
22. U. MASONI, *Corso di idraulica teorica e practica*, Napoli, 1900.
23. C. MATEESCU, *Hidraulica*, Editura Didactica şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.
24. N. MONONOBE, *Backwater and drop-down curves for uniform channels*, Trans. American Society of Civil Engineering, **103**, (1938).
25. N. N. PAVLOVSKI, *Ghidravliceskii spravocinik*, ONTI, 1937

26. A. N. RAHMANOV, *O postroenii krivih svobodnoi povehnosti v prozmaticeskih filindri ceskih ruslah pri ustanovivşenia dvijenii*, Izvestia VNIIG, **3** (1931) şi **4** (1932).
27. A. N. RAHMANOV, *O postroenie svobodnii poverhnosti dlia estestvennih vodotokov*, Kubuci, 1934.
28. B. SAINT VENANT, *Théory du mouvement nonpermanent des eaux avec application aux crues des rivières et a l'introduction des marées dans leur lits*, Acad. Scien. Paris, Comptes rendus, **73** (1871).
29. A. SCHOKLITSCH, *Wasserbau*, **1** (1930).
30. M. E. von SEGGERN, *Integrating the equation of nonuniform flow*, Trans. American Society of Civil Engineers, **115** (1950).
31. V. L. STREETER, *Handbook of fluid dynamics*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York, 1961.
32. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, Mc Graw Hill Company, 1971.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL DUCTILITĂȚII ȘI CAPACITĂȚII DE ABSORBȚIE A ENERGIEI LA ELEMENTELE DIN BETON ARMAT FOLOSITE ÎN STRUCTURI ANTISEISMICE

de I. FILIMON, S. IANCA

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

În lucrare se prezintă unele considerații asupra capacității de deformare postelastică a elementelor structurale din beton armat, de tip console încastrate în fundație, supuse la solicitări orizontale monoton-crescătoare sau ciclic-alternante. Alături de studiile privind comportarea postelastică a structurilor din beton armat, prin prisma ductilității și capacității de absorbție a energiei induse de solicitări, sînt prezentate și relațiile de legătură între factorii de ductilitate caracteristici ai elementelor din beton armat de tipul studiat.

1. INTRODUCERE

În concepția modernă a proiectării structurilor, calculul static urmărește, printre altele, determinarea solicitărilor corespunzătoare stadiului de epuizare a capacității portante a structurii, denumit *stadiu de cedare* și determinat de *criteriul de cedare* admis: *criteriul cedării elastice* sau *criteriul cedării plastice* [12].

Potrivit criteriului *cedării elastice*, se consideră că, o structură static nedeterminată își epuizează capacitatea portantă, atunci cînd într-o singură secțiune (cea mai solicitată) este atins momentul plastic, toate celelalte secțiuni fiind solicitate de momente încovoietoare inferioare celui plastic. Criteriul stă la baza calculului elastic al structurilor.

Conform criteriului *cedării plastice*, structura își epuizează capacitatea portantă, numai atunci cînd se transformă, în totalitate sau parțial, într-un sistem cu un singur grad de libertate, ca urmare a plastificării succesive a secțiunilor cele mai solicitate, deci criteriul ia în considerare comportarea elasto-plastică a elementelor structurale și a structurii în ansamblu.

Pe de altă parte, cedarea unei structuri sau a unui element de rezistență în domeniul elastic are un caracter *casant* sau *fragil*, fără apariția unor fenomene specifice de avertizare a cedării (curba *a* din fig. 1), în timp ce la elementele care lucrează și în domeniul postelastic (cu deformații depășind limita de curgere) cedarea are un caracter *ductil* și se desfășoară progresiv, pe o perioadă de timp limitată, fiind însoțită de degradări superficiale și de deformații mari, care avertizează asupra posibilității cedării (curba *b* din fig. 1). Prin deformațiile postelastice mari, elementele structurale consumă o parte din energia totală indusă de solicitări, printr-un fenomen de absorbție sau disipare energetică ductilă, care are ca efect îmbunătățirea răspunsului sistemului la solicitări.

Studiile teoretice și experimentale desfășurate în ultimii ani, în țară și în străinătate, au pus în evidență faptul că, în anumite condiții, criteriul cedării plastice, respectiv comportarea elasto-plastică, reprezintă modul real de comportare al structurilor din construcții.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 2, 1989, 201—218

Pentru structurile din beton armat monolit, situate în zone în care este posibilă apariţia unor solicitări seismice puternice, este unanim acceptată ideea că proiectarea structurii în condiţiile obţinerii unui răspuns elastic la solicitările produse de cutremure violente, este total neeconomică şi uneori chiar imposibilă. De aceea se consideră că efectuarea unui calcul în domeniul postelastic al structurilor şi proiectarea ţinînd cont de comportarea acestora în afara domeniului elastic, pune în evidenţă o serie de

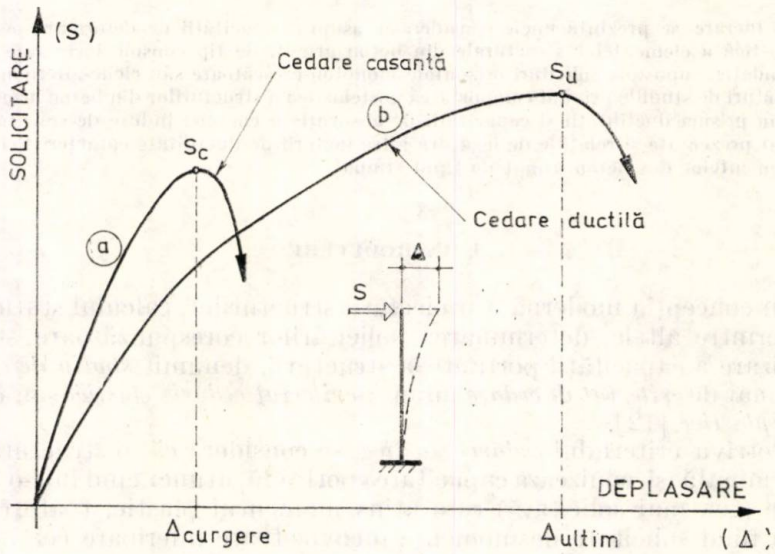


Fig. 1

avantaje economice, structurale şi constructive, legate de : valorificarea rezervelor de rezistenţă suplimentare ale structurii, obţinerea mai multor soluţii pentru solicitările de cedare şi a unor valori ale acestora mai apropiate de cele reale, în comparaţie cu cele oferite de calculul în domeniul elastic.

2. CONCEPTUL COMPORTĂRII POSTELASTICE DUCTILE A ELEMENTELOR STRUCTURALE

În general, capacitatea de deformare postelastică a elementelor din beton armat poate fi definită calitativ şi cantitativ prin *factorii de ductilitate* şi prin *capacitatea de absorbţie* (*disipare*) *a energiei induse de solicitări*, caracteristici principale de care depinde supravieţuirea construcţiilor dimensionate la forţele convenţionale din prescripţii.

Ductilitatea unei secţiuni sau unui element de rezistenţă permite evaluarea globală a posibilităţii de adaptare postelastică la solicitări severe şi se poate măsura prin *coeficienţii* (*factorii*) *de ductilitate* definiţi ca *raport între deformaţia* (*deplasare, rotire, curbură*) *limită ultimă şi deformaţia corespunzătoare trecerii elementului la stadiul de comportare postelastic.*

Capacitatea de disipare a energiei reprezintă capacitatea elementelor structurale de a asigura în condiții de rezistență și stabilitate, consumul întregii energii induse de solicitări, prin energia de disipare elastică (corespunzătoare deformațiilor elastice) și prin energia ductilă (corespunzătoare deformațiilor postelastice).

2.1. PRECIZĂRI PRIVIND NOȚIUNILE DE DUCTILITATE

Diferența între răspunsul la o excitație seismică a unei structuri cu o comportare perfect elastică și a uneia cu o comportare ideal elasto-plastică, poate fi ilustrată simplu [4, 10], pe cazul unui oscilator cu un grad de libertate, considerînd sistemul fără amortizări (fig. 2).

Se observă că, pentru oscilatorul elastic din figura 2*a*, diagrama forță de inerție-deplasare ($S-\Delta$) este caracterizată de atingerea unui răspuns elastic maxim (punctul 2), căruia îi corespunde o anumită cantitate de energie potențială înmagazinată în ciclul de solicitare maximă (reprezentată prin aria triunghiului 123), energie care la revenire în poziția inițială a oscilatorului este convertită în întregime în energie cinetică.

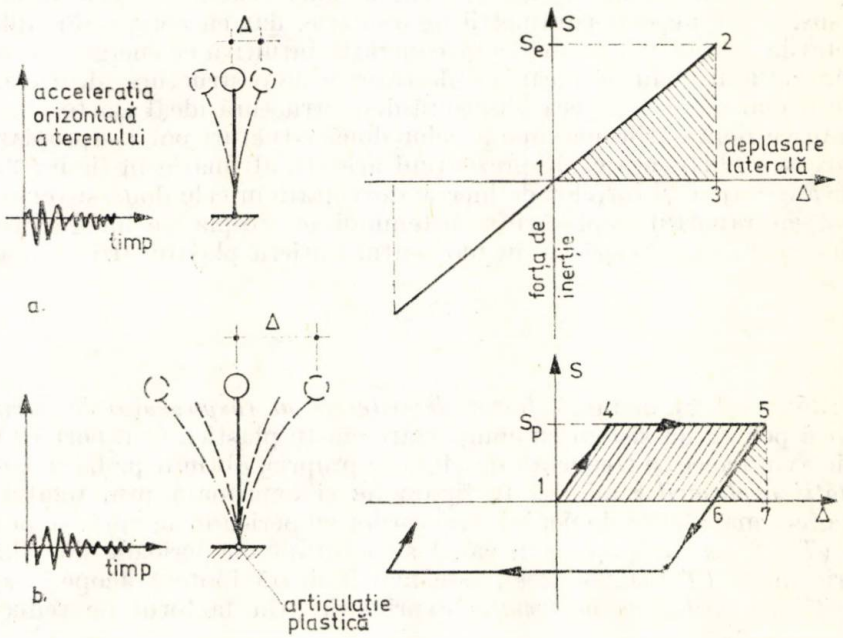


Fig. 2

În cazul cînd capacitatea portantă elastică a oscilatorului este depășită, la baza acestuia se formează o articulație plastică și diagrama $S-\Delta$ are alura din figura 2*b*, în care energia absorbită în momentul atingerii deplasării maxime este reprezentată prin aria poligonului 1457. La revenire în poziția inițială, se convertește în energie cinetică numai o parte din

energia totală (aria triunghiului 567), restul de energie (aria 1456) fiind disipată în articulația plastică prin convertire în energie calorică sau alte forme de energie nerecuperabilă.

Transpunînd concluzia la nivelul unei structuri, se poate spune că, dacă în cazul unei structuri elastice solicitate seismic întreaga energie înmagazinată se transformă la descărcare, în fiecare ciclu, în energie cinetică, în cazul unei structuri cu proprietăți de deformare elasto-plastice, numai o parte din energia absorbită rămîne factor perturbator, restul fiind disipată prin deformațiile postelastice ale elementelor structurii.

Răspunsul postelastic al unei structuri din beton armat solicitate ciclic-alternant este puternic marcat de modificarea rigidității elementelor componente, ca urmare a degradării lor structurale și poate fi ilustrat prin valoarea deformațiilor maxime (deplasări, curburi, rotiri), sau adimensional prin valoarea raportului între deformația generalizată maximă (corespunzătoare stadiului ultim) și deformația corespunzătoare inițierii plastificării (la limita de curgere a armăturii întinse din secțiunea cea mai solicitată). Aceste rapoarte, numite *factori de ductilitate*, pot exprima deci (funcție de tipul deformației considerate): *ductilitatea de deplasare*, *ductilitatea de curbură* (*secțională*) sau *ductilitatea de rotire*.

a) *Ductilitatea de deplasare*. Pentru două sisteme ca cele discutate mai sus, avînd aceeași parametrii de oscilație, dar cu comportări diferite cercetările [9], au pus în evidență concluzia intuitivă că energia absorbită într-un anumit ciclu de încărcare-descărcare de o structură ideal elastică poate fi mai mare decît cea absorbită de o structură ideal elasto-plastică, în timp ce deplasările maxime a celor două structuri pot fi apropiate ca valoare sau chiar egale. Reprezentînd această afirmație în figura 3*a*, se observă că raportul forțelor de inerție dezvoltate în cele două sisteme este același cu raportul deplasărilor sistemului elasto-plastic înregistrate în stadiul ultim (Δ_u), respectiv în momentul inițierii plastificării (Δ_c), adică

$$k_d = \frac{S_c}{S_e} = \frac{\Delta_c}{\Delta_u}. \tag{1}$$

Raportul k_d, denumit *factor de reducere al răspunsului la excitația seismică* pentru un sistem cu comportare elasto-plastică în raport cu unul elastic avînd aceeași frecvență de vibrație proprie, obținut pe baza *ipotezei egalității deplasărilor* admisă în figura 3*a* și exprimată prin relația (1), este corect mai ales în domeniul structurilor cu perioade de vibrație proprie mari ($T > 2$ s), în timp ce în cazul structurilor cu perioade de vibrație proprie medii ($T = 0{,}25-2$ s), este mai indicată ipoteza acoperitoare a *egalității energiilor de deformație* exprimată prin factorul de reducere:

$$k_e = \frac{S_c}{S_e} = \frac{1}{\sqrt{2\,\frac{\Delta_u}{\Delta_c} - 1}} \tag{2}$$

dedus din egalarea ariilor 025 și 0134 din figura 3*b*, arii care reprezintă energia disipată prin deformarea sistemului ideal elastic și respectiv a celui ideal elasto-plastic.

Capacitatea de deformare postelastică a sistemului și de adaptare a acestuia la condițiile de solicitare seismică, se poate reprezenta prin raportul dintre deplasarea ultimă a sistemului și deplasarea corespunzătoare inițierii deformațiilor plastice, raport denumit *factor (coeficient) de ductilitate la deplasare*, notat cu

$$\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_c}. \tag{3}$$

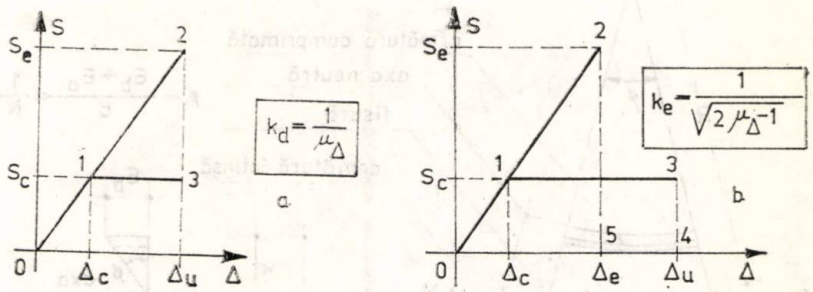


Fig. 3

Utilizînd relațiie (1) și (2) se pot obține valorile necesare ale factorului de ductilitate — μ_Δ, pentru obținerea unui factor de reducere al răspunsului seismic dorit:

$$\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_c} = \frac{1}{k_d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_e^2} + 1\right). \tag{4}$$

Factorul de reducere al răspunsului seismic este reprezentat în normativele în vigoare din țara noastră [14] prin *coeficientul de reducere a efectelor încărcărilor seismice*, ψ, care ține seama de ductilitatea structurii, de capacitatea ei de a redistribui eforturile, de ponderea cu care intervin rezervele de rezistență rezultate din conlucrarea structurii cu elementele nestructurale în calcul și de efectul amortizării vibrațiilor.

b) *Ductilitatea de curbură (secțională)*. Fiind o caracteristică a secțiunii unui element, ductilitatea de curbură nu depinde de modul de încărcare a acestuia și poate fi exprimată ca raport al curburilor secțiunii cele mai solicitate a elementelor.

Curbura unei secțiuni poate fi definită ca *rotirea secțiunii pe unitatea de lungime* și cu notațiile din figura 4 poate fi exprimată astfel:

$$\Phi = \frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{\varepsilon_a}{d - x} = \frac{|\varepsilon_b| + |\varepsilon_a|}{d} = \frac{1}{R}. \tag{5}$$

Factorul ductilității de curbură, μ_Φ, se exprimă simplu și sugestiv prin raportul curburii ultime a secțiunii față de curbura corespunzătoare inițierii deformațiilor plastice în secțiune:

$$\mu_\Phi = \frac{\Phi_u}{\Phi_c} = 1 + \frac{\Phi_u - \Phi_c}{\Phi_c}. \tag{6}$$

c) *Ductilitatea de rotire.* Rotirea articulației plastice, notată cu θ și măsurată în *radiani*, este parametrul care definește *articulația plastică* într-un element din beton armat solicitat la compresiune excentrică sau încovoiere în domeniul postelastic și reprezintă o mărime globală ce caracterizează întreaga zonă a articulației plastice, fiind compusă din suma rotirilor tuturor secțiunilor transversale (suma curburilor) existente în zona respectivă.

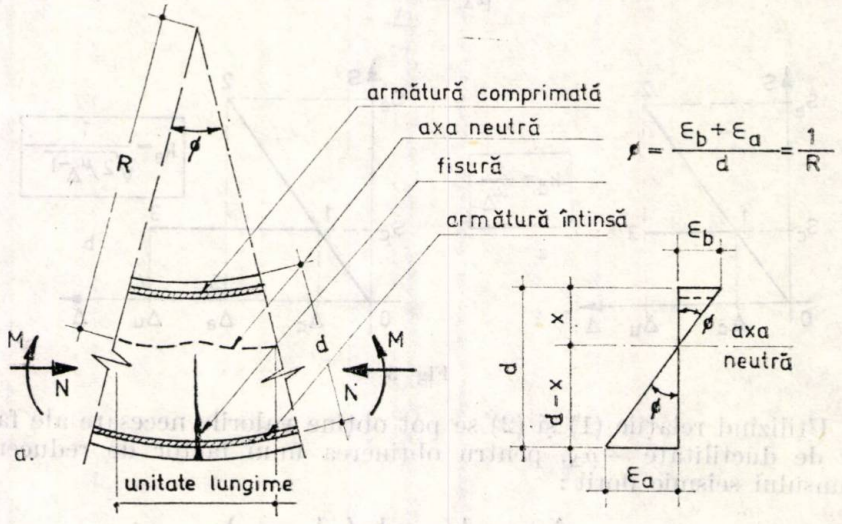


Fig. 4

Factorul de ductilitate al rotirilor, μ_θ, devine astfel o măsură a capacității de deformație plastică și de absorbție a energiei în zona de articulație plastică și se exprimă prin raportul :

$$\mu_\theta = \frac{\theta_u}{\theta_e}, \tag{7}$$

în care rotirile θ_u și θ_e au aceeași semnificație cu cea a curburilor Φ_u și Φ_e.

2.2. RELAȚII ÎNTRE FACTORII DE DUCTILITATE

Valorile factorilor de ductilitate μ_Δ, μ_Φ și μ_θ pentru elementele din beton armat solicitate de încărcări orizontale prezintă diferențe mari între ele, dar între acești factori se pot stabili anumite relații de legătură [6]. Aceste relații pot fi ilustrate pe cazul simplu al unui *sistem cu un grad de libertate* de tipul unei console încărcate la vîrf cu o forță orizontală concentrată S (fig. 5).

a) *Relația între* μ_Δ și μ_Φ. Pornind de la expresia generală a deplasării (Δ) la vîrful elementului, cunoscută din literatura de specialitate [1, 6]

$$\Delta = \int_0^H \Phi \cdot x \cdot \mathrm{d}x \tag{8}$$

și acceptînd variația simplificată a curburilor pe înălțimea elementului, respectiv ipoteza că pe înălțimea zonei de articulație plastică (l_p) curburile plastice sînt constante, se poate scrie (cu notațiile din fig. 5) :

$$\Delta_u = \int_0^H \Phi . x . \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Phi_c H^2 + (\Phi_u - \Phi_c)\, l_p (H - 0{,}5 l_p),$$

$$\Delta_c = \frac{1}{3} \Phi_c H^2.$$

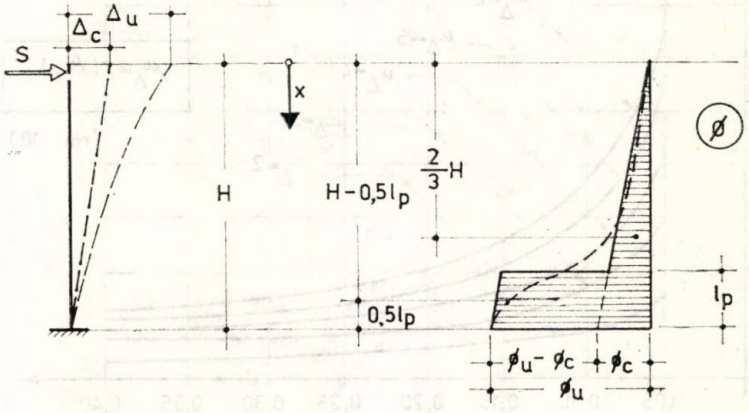


Fig. 5

Scriind factorul μ_Δ, conform relației (3) se ajunge la :

$$\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_c} = 1 + \frac{\Phi_u - \Phi_c}{\Phi_c} \cdot \frac{3 l_p (H - 0{,}5\, l_p)}{H^2},$$

de unde, cu relația (6) se obține :

$$\mu_\Delta = 1 + (\mu_\Phi - 1) \frac{3 l_p (H - 0{,}5\, l_p)}{H^2}. \qquad (9)$$

Din expresia (9) care exprimă relația $\mu_\Delta = f(\mu_\Phi,\ l_p/H)$ se poate deduce relația $\mu_\Phi = f(\mu_\Delta,\ l_p/H)$:

$$\mu_\Phi = 1 + \frac{(\mu_\Delta - 1) H^2}{3\, l_p (H - 0{,}5\, l_p)} = 1 + \frac{\mu_\Delta - 1}{3 \dfrac{l_p}{H} - 1{,}5 \left(\dfrac{l_p}{H}\right)^2}. \qquad (10)$$

Se observă că relația (10) este funcție de raportul l_p/H, deci pentru anumite valori impuse ale ductilității μ_Δ și diferite valori ale raportului amintit, relația se poate reprezenta grafic prin curbele din figura 6.

b) *Relația între* μ_θ și μ_Φ. Pentru sistemul simplu prezentat în figura 5, rotirea articulației plastice de la bază la o treaptă oarecare a încărcării orizontale are semnificația geometrică a valorii unghiului făcut de tangenta

la vîrful elementului deformat și poziția inițială a acestuia, fiind compusă din suma rotirilor tuturor secțiunilor transversale din zona plastică :

$$\theta = \int_0^H \Phi \cdot \mathrm{d}x. \tag{11}$$

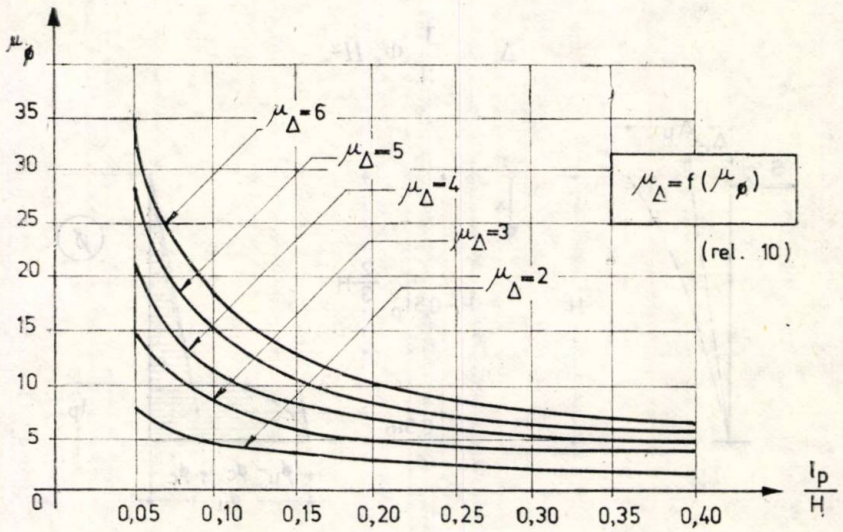


Fig. 6

Cu notațiile din figura 5, rotirea ultimă și cea corespunzătoare plasticizării vor fi :

$$\theta_u = \int_0^H \Phi \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Phi_c H + (\Phi_u - \Phi_c)\, l_p,$$

$$\theta_c = \frac{1}{2}\Phi_c \cdot H.$$

Factorul de ductilitate la rotire μ_θ devine, conform relației (7),

$$\mu_\theta = \frac{\theta_u}{\theta_c} = 1 + \frac{\Phi_u - \Phi_c}{\Phi_c} \cdot \frac{2l_p}{H} = 1 + (\mu_\Phi - 1)\frac{2l_p}{H},$$

de unde

$$\mu_\Phi = 1 + (\mu_\theta - 1)\frac{H}{2l_p} \tag{12}$$

c) *Relația între* μ_Δ și μ_θ. Înlocuind relația (12) în relația (9), rezultă :

$$\mu_\Delta = 1 + (\mu_\theta - 1)\frac{H}{2l_p} \cdot \frac{3\, l_p(H - 0{,}5\, l_p)}{H^2} = 1 + (\mu_\theta - 1)\frac{3}{2} \cdot \frac{H - 0{,}5\, l_p}{H},$$

deci

$$\mu_\Delta = 1 + 1{,}5(\mu_\theta - 1)\left(1 - 0{,}5\,\frac{l_p}{H}\right), \qquad (13)$$

Se observă că relația (13), care exprimă legătura $\mu_\Delta = f(\mu_\theta)$, depinde de raportul l_p/H, de aceea, pentru diferite valori impuse ductilității de deplasare μ_Δ și pentru valori uzuale ale raportului l_p/H, relația (13) se poate reprezenta grafic prin dreptele din figura 7.

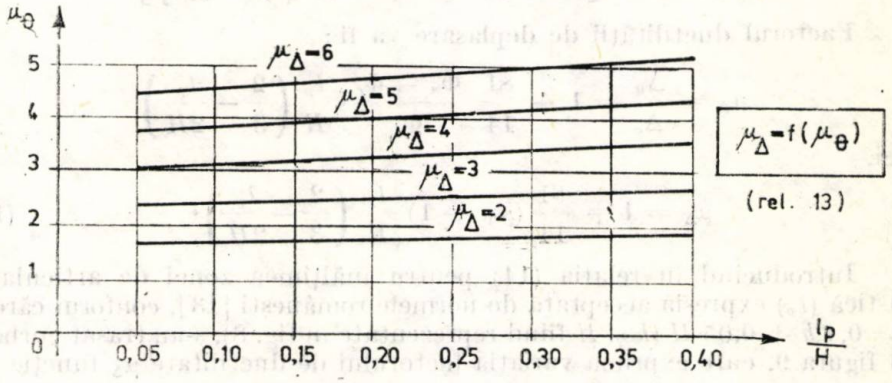


Fig. 7

Pentru *cazul unui element de suprafață*, de tipul unei diafragme pline sau unui montant al unei diafragme cu goluri, solicitat de forțe orizontale cu distribuție triunghiulară pe înălțime (de tip seismic) se pot calcula relațiile între factorii de ductilitate μ_Δ, μ_Φ și μ_θ pornind de la relațiile stabilite mai sus și acceptînd aceeași variație idealizată a diagramei curburilor.

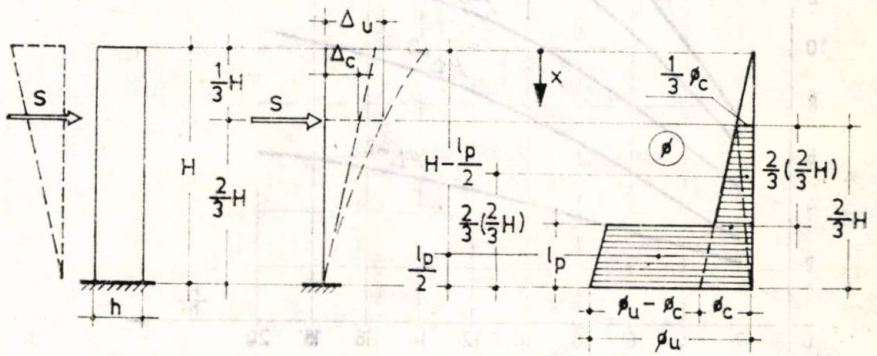


Fig. 8

Astfel, cu notațiile din figura 8, în care încărcarea seismică cu distribuție triunghiulară se înlocuiește cu rezultanta S aplicată la înălțimea $2H/3$, pornind de la expresia deplasării orizontale a elementului la același nivel cu S, se obțin relațiile între factorii de ductilitate.

a) *Relația* $\mu_\Delta = f(\mu_\Phi)$. Pe baza relației generale (8) se poate scrie [1]:

$$\Delta_e = \frac{1}{2}\Phi_e\left(\frac{2}{3}H\right)^2\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Phi_e\left(\frac{2}{3}H\right)^2\frac{1}{3}=\frac{14}{81}\Phi_e H^2,$$

$$\Delta_u = \Delta_e + (\Phi_u - \Phi_e)\, l_p\left(\frac{2}{3}H - \frac{l_p}{2}\right) =$$

$$= \frac{14}{81}\Phi_e H^2\left[1+\frac{81}{14}\frac{\Phi_u-\Phi_e}{\Phi_e}\frac{l_p}{H}\left(\frac{2}{3}-\frac{l_p}{2H}\right)\right].$$

Factorul ductilității de deplasare va fi:

$$\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_e} = 1+\frac{81}{14}\frac{\Phi_u-\Phi_e}{\Phi_e}\cdot\frac{l_p}{H}\left(\frac{2}{3}-\frac{l_p}{2H}\right)$$

deci,

$$\mu_\Delta = 1+\frac{81}{14}(\mu_\Phi - 1)\frac{l_p}{H}\left(\frac{2}{3}-\frac{l_p}{2H}\right). \qquad (14)$$

Introducînd în relația (14) pentru înălțimea zonei de articulație plastică (l_p) expresia acceptată de normele românești [13], conform căreia $l_p = 0{,}4\,h + 0{,}05\,H$ (h și H fiind reprezentate în fig. 8), s-au trasat curbele din figura 9, care exprimă variația factorului de ductilitate μ_Δ funcție de

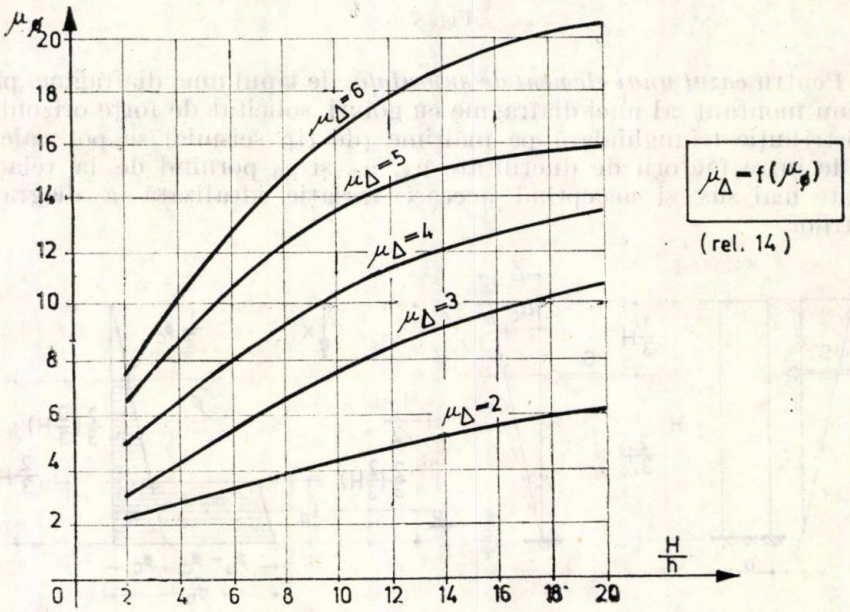


Fig. 9

μ_Φ și de raportul H/h care exprimă svelteța elementului. Se observă că, în general, valorile factorului μ_Φ sînt mai mari decît cele ale factorului μ_Δ, mai ales pentru elemente svelte, cu rapoarte H/h mari, în timp ce pentru rapoarte $H/h < 4$ (elemente „scurte") valorile celor doi factori de ductilitate sînt de mărimi apropiate.

b) *Relația* $\mu_\theta = f(\mu_\Phi)$. Pornind de la relația generală (11) expresiile rotirilor de curgere și ultime vor fi:

$$\theta_c = \frac{1}{2}\Phi_c \frac{2}{3}H + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Phi_c \frac{2}{3}H = \frac{4}{9}\Phi_c H,$$

$$\theta_u = \theta_c + (\Phi_u - \Phi_c)\, l_p = \frac{4}{9}\Phi_c H + (\Phi_u - \Phi_c)\, l_p$$

Factorul de ductilitate la rotire devine:

$$\mu_\theta = \frac{\theta_u}{\theta_c} = 1 + \frac{9}{4}\left(\frac{\Phi_u - \Phi_c}{\Phi_c}\right)\frac{l_p}{H} = 1 + 2{,}25\,(\mu_\Phi - 1)\frac{l_p}{H}, \quad (15)$$

de unde

$$\mu_\Phi = 1 + (\mu_\theta - 1)\frac{H}{2{,}25\, l_p}. \quad (16)$$

c) *Relația* $\mu_\Delta = f(\mu_\theta)$. Înlocuind relația (16) în relația (14), obținem:

$$\mu_\Delta = 1 + \frac{81}{41}(\mu_\theta - 1)\frac{H}{2{,}25\, l_p}\cdot\frac{l_p}{H}\left(\frac{2}{3} - \frac{l_p}{2H}\right) =$$

$$= 1 + \frac{81}{14}(\mu_\theta - 1)\frac{1}{2{,}25}\left(\frac{2}{3} - \frac{l_p}{2H}\right),$$

de unde

$$\mu_\Delta = 1 + \frac{9}{7}(\mu_\theta - 1)\left(\frac{4}{3} - \frac{l_p}{H}\right) \quad (17)$$

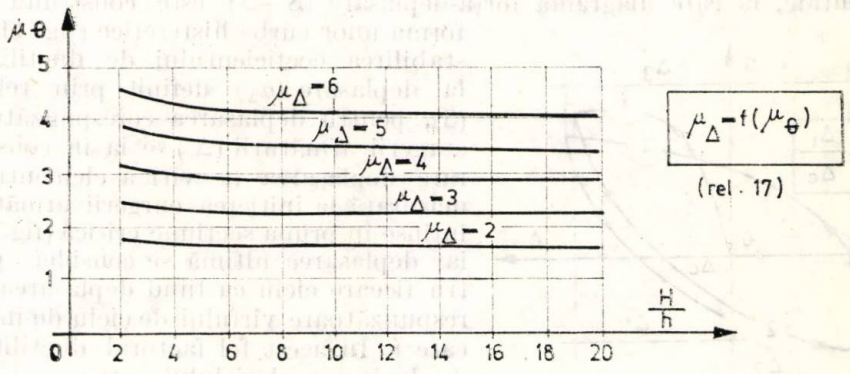


Fig. 10

Pentru diferite valori impuse ale factorului de ductilitate μ_Δ și acceptînd pentru l_p aceeași valoare ca în cazul a), relația (17) se poate reprezenta grafic în funcție de „sveltețea" elementului (raportul H/h) prin curbele din figura 10.

Se observă că spre deosebire de factorul ductilității de curbură (μ_Φ), factorul ductilității de rotire (μ_θ) are valori de același ordin de mărime cu ale factorului ductilității de deplasare (μ_Δ) și depinde în foarte mică măsură de svelteţea diafragmei (raportul H/h), pentru rapoarte $H/h > 6$, μ_θ fiind aproape constant (pentru o valoare impusă lui μ_Δ).

Analizînd relațiile stabilite mai sus între factorii de ductilitate, se observă că pentru aprecierea capacității de deformare postelastică și deci a celei de absorbție a energiei, cel mai semnificativ este factorul ductilității de deplasare (μ_Δ), deoarece lucrul mecanic al forțelor de inerție parcurgînd deplasările orizontale aferente maselor distribuite pe înălțimea elementului este o măsură a energiei de deformație acumulată în întreaga structură prin deformații elastice și neelastice, iar aceasta se poate exprima prin aria cuprinsă între curba $S-\Delta$ a sistemului și axa Δ (vezi fig. 2).

Se remarcă de asemenea, faptul că în timp ce factorul ductilității de curbură (μ_Φ) este o caracteristică a secțiunii elementului, iar cel al ductilității de rotire (μ_θ) o măsură a capacității de deformare în zona articulației plastice convenționale, factorul ductilității de deplasare (μ_Δ) este o caracteristică de ansamblu a elementului, depinzînd și de modul particular de încărcare al acestuia, nu numai de caracteristicile secțiunii elementului și ale materialelor.

Din punct de vedere al valorii factorilor de ductilitate rezultă că pentru a asigura unui element o anumită ductilitate de deplasare (μ_Δ), secțiunile critice ale acestuia trebuie să posede un coeficient de ductilitate al curburilor (μ_Φ) mult mai mare (vezi fig. 6 și 9), mai ales pentru elemente cu svelteţea mare (raportul H/h), deoarece deformațiile plastice sînt concentrate la nivelul zonelor de articulație plastică.

2.3. DUCTILITATEA ELEMENTELOR SOLICITATE CICLIC-ALTERNANT

În cazul elementelor structurale supuse la solicitări ciclic-alternante orizontale, la care diagrama forță-deplasare ($S-\Delta$) este construită sub forma unor curbe histeretice (fig. 11), la stabilirea coeficientului de ductilitate la deplasare (μ_Δ) definit prin relația (3), pentru deplasarea corespunzătoare curgerii armăturii (Δ_c) se ia în considerare deplasarea la vîrf a elementului, măsurată la inițierea curgerii armăturii întinse în prima secțiune critică (fig. 11), iar deplasarea ultimă se consideră pentru fiecare ciclu ca fiind deplasarea corespunzătoare vîrfului de ciclu de încărcare i. În acest fel factorul ductilității de deplasare al ciclului, este :

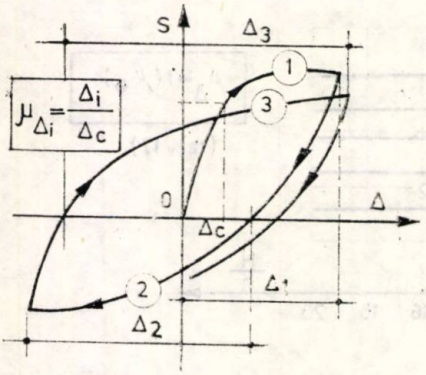


Fig. 11

$$\mu_{\Delta i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_c}. \qquad (18)$$

Caracterizarea răspunsului structurii la solicitările ciclic-alternante nu se poate face însă numai prin factorul de ductilitate μ_Δ, deoarece acesta nu pune în evidență nici reducerea capacității portante la valori mari ale

încărcărilor orizontale și nici scăderea rigidității elementelor sub efectul încărcărilor repetate. De aceea a apărut necesitatea introducerii unui parametru care să exprime cît mai fidel răspunsul structurii la solicitări și să permită evaluarea *cantitativă* a rolului deformațiilor plastice în preluarea solicitărilor. Acest parametru este *capacitatea de absorbție (disipare) a energiei induse de solicitări prin deformarea postelastică a elementelor structurale.*

3. CAPACITATEA DE DISIPARE A ENERGIEI LA ELEMENTELE DIN BETON ARMAT

Factorul de ductilitate la deplasare (μ_Δ) definit ca mai sus, nu este în toate cazurile la fel de semnificativ pentru aprecierea capacității de absorbție a energiei, aceasta depinzînd în mare măsură de ponderea cu care intervin deformațiile produse în element de forțele tăietoare, respectiv de rapiditatea cu care se degradează rigiditatea elementului.

Pentru exemplificare, în figura 12 s-a izolat o singură buclă histeretică pentru diferite tipuri de elemente. Se observă că deși toate diagramele din figură indică aceeași deplasare limită și deci factori de ductilitate la deplasare apropiați, din punct de vedere al capacității de absorbție a energiei, elementele diferă considerabil : — curba *1* este cea biliniară idealizată de tip Prandtl) luată ca bază de comparație) ; curba *2* reprezintă răspunsul optim al unui element de beton armat bine conformat, a cărui deformabilitate este dictată în principal de solicitarea la compresiune excentrică, fără apariția prematură a unor avarii produse de forța tăietoare ; curba *3* cu porțiunea terminală descendentă intervine la elementele la care forța capabilă scade prin ieșirea treptată din lucru a unor elemente de legătură, iar curbele *4* și *5* corespund unor elemente la care factorul de ductilitate este nesemnificativ, deoarece capacitatea de absorbție a energiei a fost afectată de deplasările din „tăiere repetată" [11], care au dus la scăderea considerabilă a rigidității elementului la încărcări mici. La elementele reprezentate prin curbele *4* și *5* se remarcă forma cu concavitatea în sus (fenomen cunoscut sub numele de *ciupirea curbei*) caracteristică elementelor la care sub efectul încărcărilor ciclic-alternante rigiditatea se degradează mult în primele cicluri de încărcare.

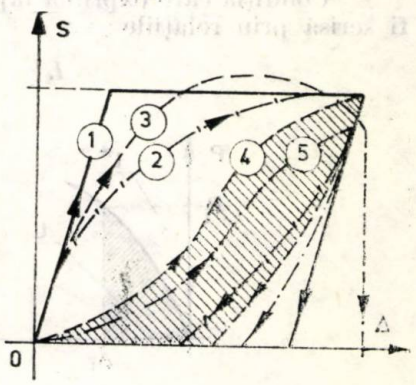


Fig. 12

Întrucît cantitatea de energie absorbită se măsoară prin *ariile inelelor histeretice*, se observă clar din figură (unde s-a hașurat aria cuprinsă între curba *4* și axa Δ), că energia disipată de elementele cu tipul de comportare *4* și *5* este mult mai mică decît cea disipată de elementul cu comportare ideal elasto-plastică (curba 1), sau de cele cu comportarea de tipul 2 sau 3, deși toate sînt caracterizate de același factor de ductilitate al deplasărilor.

Se poate desprinde din cele de mai sus concluzia că, cu cît o structură (element) prezintă o curbă de încărcare-deplasare mai depărtată ca formă de forma ideală elasto-plastică (curba *1*) avînd aceeași deplasare limită, cu atît factorul de ductilitate este mai puțin în măsură să o caracterizeze din punct de vedere energetic.

3.1. PRINCIPII ALE CALCULULUI ENERGETIC

Posibilitatea de a evalua *lucrul mecanic*, respectiv *energia de deformație* în cazul unei structuri *conservative*, la care lucrul mecanic al forțelor exterioare se transformă integral în energie de deformație în timpul încărcării structurii, iar la descărcare energia de deformație este integral consumată pentru aducerea structurii în poziție inițială, se poate ilustra, [2], pe o structură elastică încărcată cu forța P, forma deformată a structurii fiind dată de deplasările Δ, iar starea de eforturi și deformații exprimată prin relația $\sigma - \varepsilon$ (fig. 13). Pentru un caz general de comportare al materialului și structurii se pot defini următoarele semnificații fizice :

— *lucrul mecanic* (L) produs de forța P, ce acționează pe direcția coordonatei i în timp ce forța parcurge deplasarea Δ_i, este reprezentat prin suprafața cuprinsă între curba $P-\Delta$ (fig. 13 *a*) și axa Δ (suprafața haşurată), în timp ce suprafața cuprinsă între curbă și axa verticală se definește ca lucru mecanic complementar (L^*) ;

— *energia acumulată* de structură în cursul deformației, numită *energie de deformație* (W), este reprezentată prin suprafața dintre curba $\sigma - \varepsilon$ (fig. 13*b*) și axa ε (suprafața haşurată), iar suprafața între curbă și axa verticală este definită ca energie de deformație complementară (W^*).

Condiția care exprimă faptul că o structură este conservativă poate fi scrisă prin relațiile :

$$L = W \text{ și } L^* = W^*. \tag{19}$$

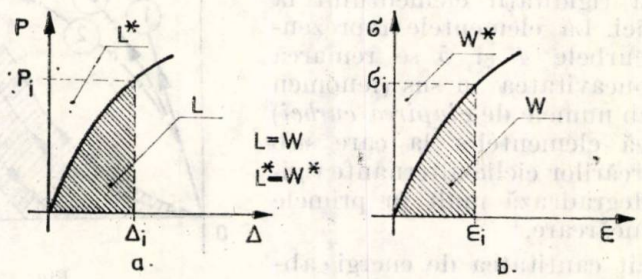


Fig. 13

Spre deosebire de structura elastică, *conservativă*, în cazul unei *structuri neconservative* cu proprietăți elasto-plastice, doar o parte din energia indusă de solicitări rămîne factor perturbator (și este cedată terenului în cazul solicitării seismice) restul fiind disipată în structură și absorbită de aceasta prin deformații postelastice (vezi fig. 2).

Evaluarea energiei induse de un cutremur într-o structură (E_i), energie care poate constitui o măsură a efectului acestuia asupra construcției, se poate face numai pornind de la caracteristicile prezumate ale cutremurului, iar condiția supraviețuirii structurii poate fi exprimată prin relația :

$$E_i \leqslant E_{cap}, \tag{20}$$

unde E_{cap} este energia absorbită de structură datorită capacității acesteia de a se deforma postelastic și depinde atît de treapta de solicitare, cît și de deformațiile corespunzătoare treptei, deci poate constitui o măsură a degradării structurale.

În situația limită, bilanțul schimburilor energetice dintre structură și teren (considerat pe baza aplicării generalizate a principiului conservării energiei) ne indică faptul că, în fiecare moment al oscilației structurii, *energia intrată* (E_i) trebuie să fie egală cu suma energiilor structurii, deci cu *energia capabilă* (E_{cap}).

După lucrarea [3], E_{cap} este alcătuită din :

— energia potențială a sistemului, E_p ;
— energia cinetică a sistemului, E_c ;
— energia disipată prin deformații plastice, E_{dp} ;
— energia disipată prin amortizări, E_{da}.

În aceste condiții, ecuația (20) va fi (la limită) :

$$E_i = E_p + E_c + E_{dp} + E_{da} \tag{21}$$

iar dacă se consideră și fenomenul de restituire a unei părți de energie (E_r) către teren, relația devine :

$$E_i - E_r = E_p + E_c + E_{dp} + E_{da}. \tag{22}$$

Atîta timp cît ecuația (22) este satisfăcută, structura dezvoltă deformațiile imprimate de mișcarea terenului (cu sau fără plastificări), dar atunci cînd membrul drept al ecuației (E_{cap}) atinge valoarea limită fără a putea egala energia indusă, structura cedează.

3.2. RELAȚIA ÎNTRE CAPACITATEA DE ABSORBȚIE A ENERGIEI ȘI DUCTILITATEA STRUCTURII

După cum s-a amintit la punctul 2.2, pentru aprecierea capacității de absorbție a energiei la un element de beton armat, este important factorul ductilității de deplasare (μ_Δ), deoarece lucrul mecanic efectuat de forțele de inerție (S) prin parcurgerea deplasărilor orizontale (Δ), exprimă de fapt chiar energia de deformație înmagazinată în structură, energie care se poate evalua cantitativ prin aria cuprinsă între curba $S-\Delta$ și axa deplasărilor Δ, sau, în cazul încărcării ciclic-alternante, prin aria inelelor histeretice construite tot în coordonatele $S-\Delta$ (fig. 11, 12).

Avînd în vedere că la elementele din beton armat cea mai mare parte din energia indusă de solicitări este absorbită în afara domeniului elastic de comportare, prin deformații postelastice, lucrarea [6] propune definirea unui *factor al capacității de absorbție a energiei*, notat cu $\bar{E}_{ab}$, re-

prezentat de *raportul între cantitatea de energie absorbită prin deformații postelastice* ($E_{ab,p}$) *și energia absorbită totală de către element* ($E_{ab,u}$) :

$$\bar{E}_{ab} = \frac{E_{ab,p}}{E_{ab,u}}. \tag{23}$$

Factorul $\bar{E}_{ab}$ definit prin relația (23) reprezintă pentru solicitările de tip ciclic-alternant, o măsură mai corectă decît ductilitatea pentru a caracteriza răspunsul postelastic al elementelor din beton armat.

Pentru un sistem simplu, cu un singur grad de libertate (ca cel din fig. 2), la care relațiile cu care se determină punctele curbei $S-\Delta$ sînt :

$$S = \int_0^H S_i(y) \cdot \mathrm{d}y, \tag{24}$$

$$\Delta = \frac{\int_0^H S_i(y) \cdot x_i(y) \cdot \mathrm{d}y}{\int_0^H S_i(y \cdot \mathrm{d}y}, \tag{25}$$

se poate deduce și reprezenta grafic [6] o relație de legătură între *factorul capacității de absorbție a energiei prin deformații postelastice* ($\bar{E}_{ab}$) și *factorul ductilității de deplasare* (μ_Δ). Astfel, acceptînd ipoteza egalității energiilor de deformație exprimată prin *factorul de reducere al răspunsului la excitația seismică* (k_e) dat de relația (2), cu notațiile din figura 3 se obține :

$$E_{ab,p} = S_c\,(\Delta_u - \Delta_c), \tag{26}$$

$$E_{ab,u} = S_c\left(\Delta_u - \frac{\Delta_c}{2}\right), \tag{27}$$

deci

$$\bar{E}_{ab} = \frac{E_{ab,p}}{E_{ab,u}} = \frac{S_c(\Delta_u - \Delta_c)}{S_c\left(\Delta_u - \frac{\Delta_c}{2}\right)} = \frac{2(\Delta_u - \Delta_c)}{2\Delta_u - \Delta_c}. \tag{28}$$

Împărțind cu Δ_c și înlocuind $\Delta_u/\Delta_c = \mu_\Delta$ (conform relației 3), rezultă :

$$\bar{E}_{ab} = \frac{2(\mu_\Delta - 1)}{2\mu_\Delta - 1}. \tag{29}$$

Reprezentînd grafic relația (29) rezultă curba din figura 14, care exprimă dependența $\bar{E}_{ab} = f(\mu_\Delta)$ pentru un sistem structural simplu ca cel discutat.

Lucrarea [6] prezintă și unele rezultate experimentale obținute în acest sens, la încercările efectuate asupra unor modele experimentale de

tip *diafragme cu goluri*, din beton armat monolit, supuse la solicitări orizontale ciclic-alternante cu distribuție de tip seismic a încărcărilor pe înălțimea elementelor.

Localizarea rezultatelor experimentale pe curba $\bar{E}_{ab} - \mu_\Delta$ (fig. 14) pune în evidență încadrarea acestora în imediata apropiere a curbei, experimentul validînd astfel relația (29).

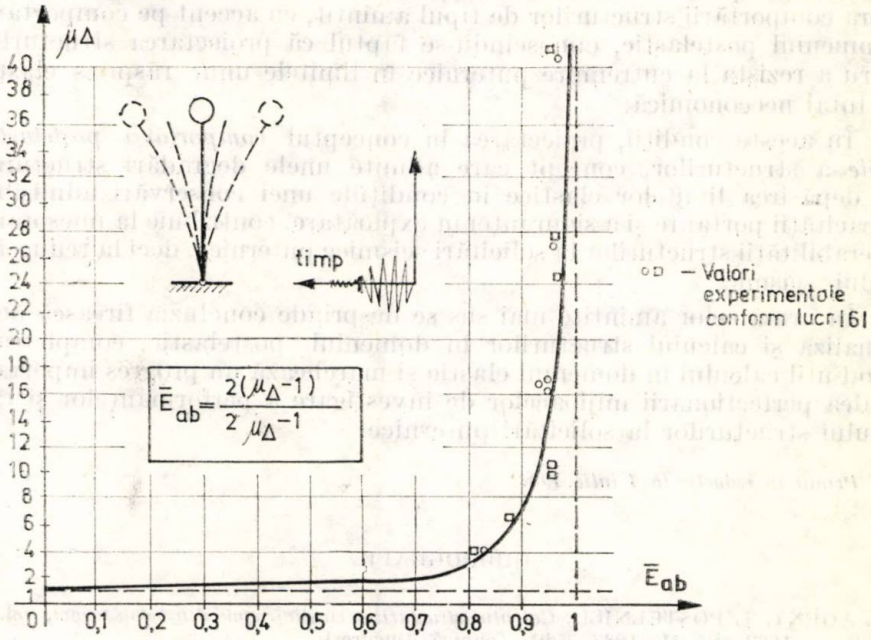


Fig. 14

4. CONCLUZII

Pentru caracterizarea capacității structurilor și elementelor de beton armat de a se adapta la solicitări puternice orizontale ciclic-alternante, este de importanță vitală, capacitatea acestora de a absorbi energie prin deformații postelastice, capacitate care poate asigura supraviețuirea structurii în cazul unui cutremur puternic.

Ductilitatea elementelor de beton armat nu caracterizează în toate cazurile corect capacitatea de absorbție a energiei, aceasta fiind puternic influențată de fenomenul de „tăiere repetată" și de numărul de incursiuni pe care elementul este obligat să le facă în domeniul elastic de comportare, incursiuni care afectează rigiditatea betonului și deci capacitatea elementului de a se deforma inelastic. Principala sursă de absorbție a energiei la elementele de beton armat, trebuie considerată *curgerea armăturii de încovoiere din zonele de articulație plastică*, betonul (datorită degradării rapide a rigidității la încărcări ciclice) nefiind o sursă importantă de absorbție a energiei.

Actul de decizie în vederea elaborării proiectelor de rezistență a structurilor din beton armat situate în zone seismice, include rezolvarea

MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

principalelor aspecte menite să asigure supraviețuirea structurii : *rigiditate-rezistență-ductilitate*, de aceea, făurirea unei concepții de proiectare și execuție „antiseismice" a structurilor din beton armat, fundamentate științific, reclamă cunoașterea temeinică a relației *solicitare-structură-răspuns* și a factorilor care influențează această relație. În acest sens, în ultimii ani, a apărut o intensificare a cercetărilor teoretice și experimentale asupra comportării structurilor de tipul amintit, cu accent pe comportarea în domeniul postelastic, cunoscîndu-se faptul că proiectarea structurilor pentru a rezista la cutremure puternice în limitele unui răspuns elastic, este total neeconomică.

În aceste condiții, proiectarea în conceptul *comportării postelastice ductile* a structurilor, concept care admite unele degradări structurale prin depășirea limitelor elastice în condițiile unei conservări admisibile a capacității portante și a siguranței în exploatare, contribuie la micșorarea vulnerabilității structurilor la solicitări seismice puternice, deci la reducerea riscului seismic.

În urma celor amintite mai sus se desprinde concluzia firească deci, că analiza și calculul structurilor în domeniul postelastic, completează în mod util calculul în domeniul elastic și marchează un progres important pe calea perfecționării mijloacelor de investigare a performanțelor și răspunsului structurilor la solicitări puternice.

Primit în redacție la 7 iulie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. R. AGENT, T. POSTELNICU, *Calculul structurilor cu diafragme din beton armat*, vol. I : 1982, vol. II : 1983, Edit. Tehnică, București.
2. BĂNUȚ V., *Calculul neliniar al structurilor*, Edit. Tehnică, București, 1981.
3. L. CRAINIC, *Metode energetice în proiectarea antiseismică a structurilor*, Rev. Construcții, 1 (1979).
4. D. DUMITRESCU, T. POSTELNICU, *Precizări privind noțiunea de ductilitate a structurilor de beton armat în regiuni seismice*, Rev. Construcții, 1(1979).
5. I. FILIMON, ș.a., *Aspecte asupra caracteristicilor de deformație postelastică la stîlpii de beton armat*, Buletinul IPTVT, Seria Construcții, **30**, 44 (1985).
6. S. IANCA, *Contribuții la studiul ductilității diafragmelor din beton armat, pentru clădiri*, teză de doctorat, I. P. Timișoara, 1987.
7. M. IFRIM, *Dinamica structurilor și inginerie seismică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1984.
8. A. MIHĂESCU, S. IANCA, D. TUDOR, GH. CIUHANDU, *Aspects du comportement d'une diaphragme expérimentale sollicitée aux charges alternantes*, Buletinul IPTVT, **29**, 43, (1984).
9. N. M. NEWMARK, *Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High-Rise Structure*, Earthquake Engineering, Prentice Hall Englewood Cliffs, 1970.
10. R. PARK, T. PAULAY, *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley and Sons, New York, 1975.
11. T. PAULAY, *The Design of Reinforced Concrete Ductile Shear Walls for Earthquake Resistance*, University of Cantebury, Christchurch, New Zeeland, 1981.
12. V. PETCU, *Calculul structurilor de beton armat în domeniul plastic*, Edit. Tehnică, București, 1972.
13. * * * *Instrucțiuni tehnice pentru proiectarea construcțiilor cu structura din diafragme de beton*, indicativ P. 85—82, ICCPDC, Bul. Construcțiilor, 6 (1982).
14. * * * *Normativ pentru proiectarea antiseismică a construcțiilor de locuințe, social-culturale, agrozootehnice și industriale*, indicativ P. 100—81, ICCPDC.

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A MULTIPLICATORULUI DE IMPACT. I*)

de M. V. SOARE

Institutul de Construcții București

1. INTRODUCERE

Este cunoscut modul de rezolvare aproximativ al efectului impactului asupra unui element de construcție : problema șocului este redusă la o problemă statică, eforturile secționale, tensiunile și deformațiile statice fiind multiplicate cu un coeficient dinamic (sau multiplicator de impact) ψ și obținînd, în acest fel, mărimile corespunzătoare dinamice.

Expresia lui ψ

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_0}{W}} \tag{1}$$

corespunde cazului cînd elementul de construcție este încărcat, prin șoc vertical, doar cu o forță P care cade de la înălțimea h.

În formula (1),

$$E_0 = Ph \tag{2}$$

reprezintă energia cinetică, iar W reprezintă energia potențială de deformație statică a elementului lovit, masa acestuia fiind neglijată.

Deducerea formulei (1) este dată în diferite tratate [1], [2], [3], [5], [7]; în [5] sînt date și o serie de observații critice.

În nota de față ne-am propus să stabilim modul cum se modifică formula (1) cînd elementul de construcție este încărcat cu o forță concentrată Q, cînd se produce impactul. Cazul prezenței mai multor forțe concentrate, momente concentrate și al unei încărcări distribuite este studiat în paragraful 3, iar luarea în considerare a masei proprii a elementului lovit va face obiectul unei note viitoare.

2. PREZENȚA UNEI FORȚE CONCENTRATE

Fie o grindă cu rezemări arbitrare, încărcată într-o secțiune 1 cu forța concentrată Q, aplicată static. În această situație, pe grindă cade

*) Comunicare prezentată la cea de-a XII-a Consfătuire de Mecanica Solidelor, Pitești, 3 iunie 1988.

o forță P de la înălțimea h, într-o secțiune notată p. Fie de determinat multiplicatorul de impact.

Vom nota coeficienții de influență w_{1p}, respectiv w_{pp} reprezentînd săgețile în 1, respectiv în p, cînd în p se aplică static o forță-unitate ($P = 1$) (fig. 1).

Pentru punerea în ecuație a problemei va trebui să plecăm de la expresia finită a teoremei energiei cinetice și a lucrului mecanic, dată de relația

$$-E_0 = L_e - W_d, \tag{3}$$

în care L_e este lucrul mecanic exterior, iar W_d reprezintă energia potențială de deformație *dinamică* a grinzii.

Energia cinetică inițială este dată de relația (2).

Lucrul mecanic al forțelor exterioare cuprinde atît acțiunea lui P, cît și a lui Q :

$$L_e = Pw_{p,d} + Qw_{1,d}, \tag{4}$$

unde indicele inferior d precizează efectul dinamic. Luînd

$$w_{p,d} = \psi w_p = \psi Pw_{pp} \text{ și } w_{1,d} = \psi w_1 = \psi Pw_{1p},$$

relația (4) devine

$$L_e = \psi P^2 w_{pp} + \psi PQw_{1p}. \tag{5}$$

În expresia (3), energia potențială de deformație dinamică, luată cu semnul minus, a fost introdusă în locul lucrului mecanic interior ($-W_d = L_i$); se poate scrie

$$W_d = \frac{1}{2} P_d w_{p,d} + Qw_{1,d},$$

unde s-a ținut seama de acțiunea dinamică a forței P ($P_d = \psi P$).

Relația precedentă se mai scrie

$$W_d = \frac{1}{2} \psi P \cdot \psi Pw_{pp} + Q\psi Pw_{1p} = \frac{1}{2} \psi^2 P^2 w_{pp} + \psi PQw_{1p}. \tag{6}$$

Ducînd acum expresiile (2), (5) și (6) în (1) se obține

$$-Ph = \psi P^2 w_{pp} + \psi PQw_{1p} - \frac{1}{2} \psi^2 P^2 w_{pp} - \psi PQw_{1p};$$

ordonînd după puterile lui ψ rezultă ecuația de gradul al doilea

$$\psi^2 - 2\left(1 + \frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}}\right)\psi - \frac{2h}{Pw_{pp}} = 0. \tag{7}$$

Doar rădăcina pozitivă are semnificație fizică în problemă :

$$\psi = 1 + \frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}} + \sqrt{\left(1 + \frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}}\right)^2 + \frac{2h}{Pw_{pp}}}. \tag{8}$$

Dacă $Q = 0$, se regăsește expresia obișnuită a multiplicatorului de impact care, ținînd seama de (2), se scrie

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{Pw_{pp}}} \tag{9}$$

(echivalentă relației (1)).

Pentru a ne putea da seama care caz este mai defavorabil, vom nota cu ψ_Q multiplicatorul de impact dat de relația (8), în cazul prezenței forței Q pe grindă. Să presupunem că $\psi_Q > \psi$, adică

$$1 + \frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}} + \sqrt{\left(1 + \frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}}\right)^2 + \frac{2h}{Pw_{pp}}} > 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{Pw_{pp}}}.$$

Păstrînd radicalul mare în membrul din stînga, ridicînd la pătrat, făcînd reducerile necesare și apoi raționalizînd expresia astfel obținută, printr-o nouă ridicare la pătrat se ajunge la condiția

$$\frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{Pw_{pp}}}\right) > 0.$$

Sensul inegalității depinde de semnul fracției $\frac{Qw_{1p}}{Pw_{pp}}$. Dacă ambele forțe P și Q acționează în sens gravitațional, inegalitatea este satisfăcută dacă $w_{1p} > 0$.

Ca o aplicație directă să considerăm grinda simplu rezemată cu consolă din figura 2a; ea este încărcată la mijlocul deschiderii cu forța Q iar în capătul consolei cade forța P.

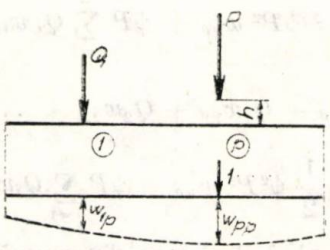


Fig. 1

Coeficienții de influență w_{1p} și w_{pp} pot fi evaluați ușor:

$$w_{1p} = -\frac{al^2}{16\,EI}, \quad w_{pp} = \frac{a^2(l+a)}{3\,EI},$$

astfel încît din relația (8) rezultă

$$\psi_Q = 1 - \frac{3Ql^2}{16Pa\,(l+a)} + \sqrt{\left[1 - \frac{3\,Ql^2}{16\,Pa(l+a)}\right]^2 + \frac{6EIh}{Pa^2(l+a)}}.$$

Pentru a putea aprecia diferența față de calculul uzual, vom considera următoarele date numerice: $P = Q = 10$ kN, $E = 21000$ kN/cm^2, $I = 9800$ cm^4 (profil laminat I 30), $l = 6$ m, $a = 1{,}50$ m, $h = 1$ cm.

Rezultă atunci

$$\psi_Q = 1 - \frac{3 \times 10 \times 600^2}{16 \times 10 \times 150(600+150)} + \sqrt{0{,}4^2 + \frac{6 \times 21\,000 \times 9\,800 \times 1}{10 \times 150^2(600+150)}} = 3{,}1345.$$

Din aplicarea relației (9) rezultă

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{6 \times 21000 \times 9800 \times 1}{10 \times 150^2(600+150)}} = 3{,}8840;$$

prezența forței Q micșorează deci multiplicatorul de impact, pentru datele alese, cu 19,3%.

3. CAZUL MAI MULTOR FORȚE ȘI CUPLURI CONCENTRATE

Rezultatele obținute precedent pot fi ușor generalizate în cazul prezenței mai multor forțe concentrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ aplicate *static* în secțiunile $1, 2, \ldots, n$.

Introducînd coeficienții de influență $w_{1p}, w_{2p}, \ldots, w_{np}$ reprezentînd săgețile în secțiunile $1, 2, \ldots, n$ produse de o forță-unitate ($P = 1$) aplicată în secțiunea p, lucrul mecanic exterior L_e, respectiv energia potențială de deformație dinamică se scriu atunci:

$$L_e = \psi P^2 w_{pp} + \psi P(Q_1 w_{1p} + Q_2 w_{2p} + \ldots + Q_n w_{np}) = \psi P^2 w_{pp} + \psi P \sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip},$$

$$W_d = \frac{1}{2} P_d w_{p,d} + Q_1 w_{1,d} + Q_2 w_{2,d} + \ldots + Q_n w_{n,d} = \frac{1}{2} \psi^2 P^2 w_{pp} + \psi P \sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip}.$$

Ecuația de gradul al doilea care determină multiplicatorul de impact este:

$$\psi^2 - 2\left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip}}{P w_{pp}}\right)\psi - \frac{2h}{P w_{pp}} = 0,$$

cu rădăcina convenabilă

$$\psi = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip}}{P w_{pp}} + \sqrt{\left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip}}{P w_{pp}}\right) + \frac{2h}{P w_{pp}}}. \qquad (10)$$

Este ușor de arătat că dacă pe grindă sînt aplicate static și cuplurile concentrate $M_{1'}, M_{2'}, \ldots, M_{n'}$, în secțiunile $1', 2', \ldots, n'$ și notînd cu $\theta_{1'p}, \theta_{2'p}, \ldots, \theta_{n'p}$ rotirile produse, expresia multiplicatorului de impact poate fi scrisă sub forma

$$\psi = 1 + \frac{1}{Pw_{pp}}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip} + \sum_{j=1'}^{n'} M_j \theta_{jp}\right) + \\ + \sqrt{\left[1 + \frac{1}{Pw_{pp}}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i w_{ip} + \sum_{j=1'}^{n'} M_j \theta_{jp}\right)\right]^2 + \frac{2h}{Pw_{pp}}}. \tag{11}$$

În cazul unei încărcări distribuite $q(x)$ pe intervalul $x \in (a, b)$, se va face substituția

$$\sum_i Q_i w_{ip} \to \int_a^b q(x)\, w_{xp}\, \mathrm{d}x,$$

în care w_{xp} reprezintă săgeata într-o secțiune curentă x, cînd în p este aplicată forța-unitate $P = 1$. Cînd există rezemări intermediare, integrala precedentă va fi fragmentată pe intervale.

Pentru cazul uzual al încărcării uniform distribuite $q = \text{const.}$, corespunde substituția

$$\sum_i Q_i w_{ip} \to q \int_a^b w_{xp} \mathrm{d}x,$$

iar multiplicatorul ψ capătă expresia

$$\psi = 1 + \frac{q\int_a^b w_{xp}\mathrm{d}x}{Pw_{pp}} + \sqrt{\left(1 + \frac{q\int_a^b w_{xp}\mathrm{d}x}{Pw_{pp}}\right)^2 + \frac{2h}{Pw_{pp}}}. \tag{12}$$

Ca o aplicație, vom relua cazul grinzii din figura 2a, încărcată cu încărcarea uniform distribuită q pe toată lungimea ei (fig. 2b).

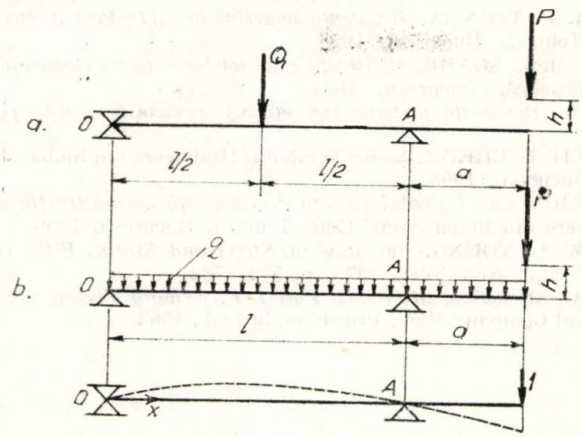


Fig. 2

Se stabilește ecuația săgeților w_{xp} :

$$w_{xp} = -\frac{al^2}{6EI}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) + \frac{l^2(l+a)}{6EI} < \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 >_{x>l}.$$

Integrala din (12) se scrie luînd în considerare intervalele $(0, l+a)$ și $(l, l+a)$:

$$-\frac{al^2}{6EI}\int_0^{l+a}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right)dx + \frac{l^2(l+a)}{6\,EI}\int_l^{l+a}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 dx =$$

$$= -\frac{a(l+a)\,(l^2 - al - 3\,a^2)}{24\,EI}$$

astfel încît relația (12) devine, după toate simplificările

$$\psi = 1 - \frac{q(l^2 - al - 3a^2)}{8Pa} + \sqrt{\left[1 - \frac{q(l^2 - al - 3a^2)}{8Pa}\right]^2 + \frac{6EI\,h}{Pa^2(l+a)}}. \tag{13}$$

Luînd $q = 2$ kN/m și restul valorilor numerice ca în aplicația precedentă, rezultă

$$\psi = 1 - \frac{2(6^2 - 1{,}5\times 6 - 3\times 1{,}5^2)}{8\times 10\times 1{,}5} + \sqrt{0{,}6625^2 + \frac{6\times 21000\times 9800\times 1}{10\times 150^2\times 750}} =$$

$$= 3{,}4475,$$

adică o reducere de 11,24% față de cazul cînd se neglijează prezența încărcării distribuite.

Primit în redacție la 15 iulie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BELEȘ, R. P. VOINEA, *Rezistența materialelor. II. Pentru ingineri constructori.* Edit. Tehnică, București, 1958.
2. C. BIA, V. ILLE, M. V. SOARE, *Rezistența materialelor și teoria elasticității.* Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
3. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, ed. XI revizuită, Edit. Tehnică, București, 1980.
4. C. M. HARRIS, CH. E. CREDE, *Șocuri și vibrații* (traducere din limba engleză). Edit. Tehnică, București, 1968.
5. S. D. PONOMARIOV ș.a., *Calculul modern de rezistență în construcția de mașini*, vol. I (traducere din limba rusă). Edit. Tehnică, București, 1956.
6. R. J. ROARK, W. C. YOUNG, *Formulas for Stress and Strain*. Fifth ed., Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1975, p. 572—582.
7. S. TIMOSHENKO, *Strength of Materials. Part I. Elementary Theory and Problems*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 3rd ed., 1962.

FUNCȚII DE FORMĂ PENTRU ELEMENTE FINITE IERARHICE

de R. FRIEDRICH

Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timișoara

Față de formularea obișnuită, clasică a metodei elementelor finite, cea ierarhică asigură o serie de avantaje. În lucrare se dau funcții de formă corespunzătoare variantei h și variantei p pentru domenii uni- și bidimensionale. Un exemplu de calcul ilustrează aplicarea practică a formulării ierarhice.

În metoda elementelor finite convergența spre soluția exactă poate fi obținută în două moduri [1]: printr-o îndesire a rețelei reducînd „diametrul" h al elementelor finite, respectiv printr-o mărire a gradului p al polinoamelor de aproximare a funcțiilor căutate. Versiunea h a metodei corespunde ideii inițiale de a utiliza funcții de aproximare diferite de zero pe domenii mici, iar versiunea p se apropie de procedeul Ritz clasic cu polinoame. S-au încercat și variante hp ale metodei elementelor finite, deci o mărire simultană a fineței rețelei și a gradului polinomului de aproximare.

Îndesirea rețelei, respectiv mărirea gradului polinomului de aproximare pot fi realizate principial în două moduri. În concepția ierarhică polinoamele de aproximare pentru rețeaua mai fină, respectiv pentru gradul mai înalt utilizează toți termenii treptei de aproximare inferioare, în cea obișnuită neținîndu-se seama de acești termeni. Astfel, funcțiile de formă ierarhice au structura :

$$\mathbf{N}_f = [\mathbf{N}_g \, \mathbf{N}_s], \tag{1}$$

iar matricele rigidităților :

$$\mathbf{k}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_g & \mathbf{k}_{gs} \\ \mathbf{k}_{sg} & \mathbf{k}_s \end{bmatrix}, \tag{2}$$

indicele f referindu-se la aproximarea fină corespunzătoare treptei superioare, g — la cea grosieră, inferioară și s — la termenii suplimentari. Această structură a matricelor reduce timpul necesar formării lor, îmbunătățește convergența procesului iterativ de rezolvare a sistemului de ecuații algebrice și permite o implementare eficientă a metodei multirețea pentru această rezolvare [3, 4, 5].

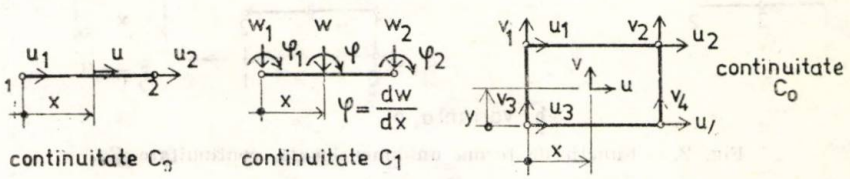


Fig. 1. — Domenii uni- și bidimensionale.

Pornind de la domeniile clasice uni- și bidimensionale din figura 1 (treapta ierarhică 1) se deduc funcțiile de formă pentru treapta a 2-a,

atît în varianta h, cît și în varianta p; pentru treptele superioare se procedează analog. Urmează deducerea unor matrice ale rigidităților pentru probleme de mecanică și un exemplu de calcul.

1. FUNCȚII DE FORMĂ

1.1. DOMENIU UNIDIMENSIONAL, CONTINUITATE C_0

Treptei ierarhice 1 îi corespunde cîmpul liniar:

$$u_g = \alpha_1 + \alpha_2 x = N_1 u_1 + N_2 u_2, \tag{3}$$

funcțiile de formă N_1 și N_2 fiind cunoscute [1].

În *varianta h* peste u_g se suprapune un cîmp suplimentar u_s, tot liniar, cu maximul în nodul 3, obținîndu-se cîmpul u_f corespunzător treptei 2:

$$u_f = u_g + u_s = u_g + \alpha_3 + \alpha_4 x = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_{s3}, \tag{4}$$

unde — pentru subdomeniul I: $N_3 = 2\xi$, (5 a)

— pentru subdomeniul II: $N_3 = 2(1 - \xi)$. (5b)

În figura 2*a* sînt reprezentate funcțiile de formă caracteristice formulării h-ierarhice comparativ cu cele ale formulării obișnuite neierarhice, cît și cîmpurile u definite prin cei trei parametri u_1, u_2, u_3, respectiv u_{s3}.

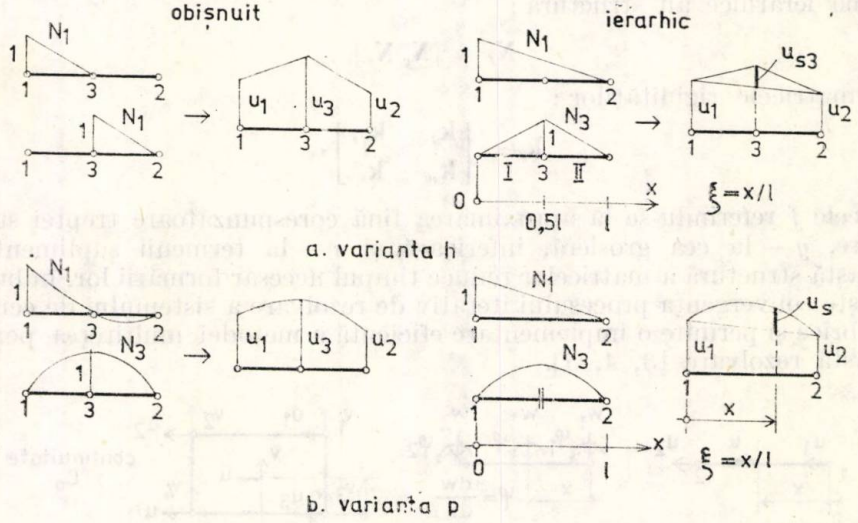


Fig. 2. — Funcții de formă unidimensionale, continuitate C_0.

În *varianta p* ordinul polinomului liniar de aproximare (3) al treptei 1 se sporește cu unu astfel încît:

$$u_f = u_g + u_s = u_g + \alpha_3 x^2 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 =$$

$$= N_1 u_1 + N_2 u_2 + u_s. \tag{6a}$$

Pentru eliminarea lui α_1 și α_2 această expresie se derivă de două ori, rezultînd :

$$u_f'' = 2\alpha_3,$$

de unde $\alpha_3 = 0{,}5u_f''$ și

$$u_f = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_f', \tag{6b}$$

cu

$$N_3 = -0{,}5\,\xi\,(1-\xi)\,l^2. \tag{7}$$

Cei trei parametri ai cîmpului u_f sînt deci mărimile u_1 și u_2 în nodurile 1 și 2 și derivata a doua u_f''. Funcțiile de formă caracteristice formulării p-ierarhice sînt prezentate în figura 2*b*, comparativ cu formularea obișnuită.

1.2. DOMENIU UNIDIMENSIONAL, CONTINUITATE C_1

Treptei ierarhice 1 îi corespunde cîmpul :

$$w_g = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3 = N_1w_1 + N_2\varphi_1 + N_3w_2 + N_4\varphi_2, \tag{8}$$

funcțiile de formă N_1, N_2, N_3 și N_4 fiind cele cunoscute [1].

Treapta a 2-a a *variantei h* se definește utilizînd cîmpul suplimentar w_s, de același grad cu (8) :

$$w_s = \alpha_5 + \alpha_6x + \alpha_7x^2 + \alpha_8x^3,$$

rezultînd

$$w_f = w_g + w_s = N_1w_1 + N_2\varphi_1 + N_3w_2 + N_4\varphi_2 + N_5w_{s3} + N_6\varphi_{s3}, \tag{9}$$

unde — pentru subdomeniul I :

$$N_5 = 4\,\xi^2(3-4\xi), \quad N_6 = 2\xi^2\,(-1+2\xi)\,l\,; \tag{10 a}$$

— pentru subdomeniul II :

$$N_5 = 4(-1+6\xi-9\xi^2+4\xi^3), \quad N_6 = 2\,(-1+4\xi-5\xi^2+2\xi^3)\,l. \tag{10b}$$

Figura 3*a* ilustrează formularea h-ierarhică comparativ cu cea obișnuită, fiind puse în evidență însă doar funcțiile de formă corespunzătoare lui w_i (lipsind cele corespunzătoare lui φ_i).

În *varianta p* ordinul polinomului de aproximare (8) al treptei 1 se mărește cu doi, astfel încît :

$$w_f = w_g + w_s = w_g + \alpha_5x^4 + \alpha_6x^5 = N_1w_1 + N_2\varphi_1 + N_3w_2 + N_4\varphi_2 + w_s. \tag{11a}$$

A patra și a cincea derivată a lui w_f sînt de forma :

$$w_f^{IV} = 24\alpha_5 + 120\alpha_6x, \; w_f^{V} = 120\alpha_6,$$

deci în centrul domeniului, pentru $x = 0{,}5\,l$ (punctul 3) :

$$w_{f3}^{IV} = 24\alpha_5 + 60\alpha_6l \text{ și } w_f^{V} = 120\alpha_6,$$

rezultînd $\alpha_6 = w_f^{V}/120$ și $\alpha_5 = (2w_{f3}^{IV} - lw_f^{V})/48$ și noua formă a lui (11a),

$$w_f = N_1w_1 + N_2\varphi_1 + N_3w_2 + N_4\varphi_2 + N_5w_{f3}^{IV} + N_6w_f^{V}, \tag{11b}$$

w_{f3}^{IV} fiind derivata a patra a funcției în centrul domeniului (punctul 3), iar w_f^V derivata a 5-a a aceleiași funcții. Funcțiile de formă corespunzătoare sînt: $N_5 = \xi^2\ (1 - 2\xi + \xi^2) l^4/24$, $N_6 = \xi^2(-1 + 4\xi - 5\xi^2 + 2\xi^3)\, l^5/240$. În figura 3*b* este prezentată formularea *p*-ierarhică comparativ cu cea obișnuită, similar figurii 3*a*.

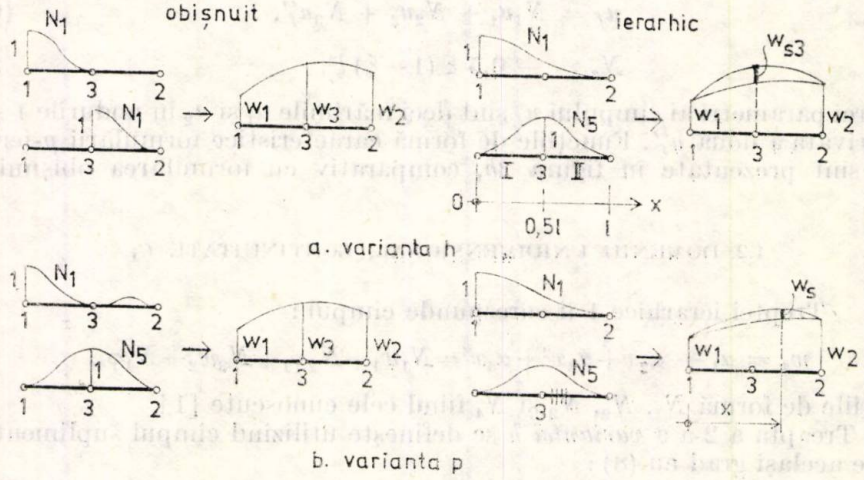


Fig. 3. — Funcții de formă unidimensionale, continuitate C_1.

1.3. DOMENIU BIDIMENSIONAL, CONTINUITATE C_0

Procedînd analog cazului unidimensional, pentru treapta a 2-a în *varianta h* se obține, figura 4*a*:

$$u_f = \sum_1^9 N_i u_i, \tag{12}$$

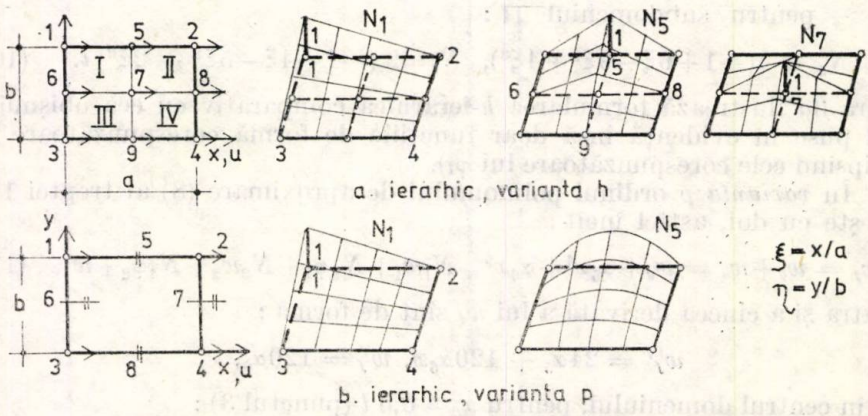


Fig. 4. — Funcții de formă bidimensionale, ierarhice, continuitate C_0.

funcțiile de formă suplimentare $N_5 \ldots N_9$ avînd expresiile:
— pentru subdomeniul I: $N_5 = 2\xi\eta$, $N_6 = 2\,(1 - \xi - \eta + \xi\eta)$,

$$N_7 = 4\xi\,(1 - \eta),\ N_8 = 2\xi\,(1 - \eta) = N_9;$$

— pentru subdomeniul II : $N_5 = 2\eta(1-\xi)$, $N_6 = 2\,(1-\xi-\eta+\xi\eta) = N_9$,
$N_7 = 4\,(1-\xi-\eta+\xi\eta)$, $N_8 = 2\xi(1-\eta)$;

— pentru subdomeniul III : $N_5 = 2\xi\eta$, $N_6 = 2\eta(1-\xi)$, $N_7 = 4\xi\eta$,
$N_8 = 2\xi\eta$, $N_9 = 2\xi\,(1-\eta)$;

— pentru subdomeniul IV : $N_5 = 2\eta\,(1-\xi) = N_6$, $N_7 = 4\eta\,(1-\xi)$,
$N_8 = 2\xi\eta$, $N_9 = 2(1-\xi-\eta+\xi\eta)$.

Treptei a doua în *varianta p* îi corespunde funcția :

$$u_f = \sum_1^4 N_i u_i + \sum_5^8 N_i u''_{fi}, \tag{13}$$

funcțiile de formă suplimentare $N_5 \ldots N_8$ fiind, figura 4*b* :

$$N_5 = -0{,}5\,\xi\eta\,(1-\xi)\,a^2,\ N_6 = -0{,}5\eta\,(1-\xi)\,(1-\eta)\,b^2$$
$$N_7 = -0{,}5\,\xi\eta\,(1-\eta)b^2,\ N_8 = -0{,}5\,\xi(1-\xi)\,(1-\eta)\,a^2,$$

u''_{fi} fiind derivatele secunde ale lui u_f în lungul celor patru laturi, la mijloacele lor.

2. MATRICE ALE RIGIDITĂȚILOR ÎN PROBLEME DE MECANICĂ

Funcțiile de formă de la punctul 1.1 pot servi la determinarea matricelor rigidităților elementelor finite de bară solicitate axial, u reprezentînd deplasarea axială. Treptei a 2-a a variantei *h*-ierarhice îi corespunde matricea rigidităților din figura 5*a*, iar celei *p*-ierarhice matricea din figura 5*b*.

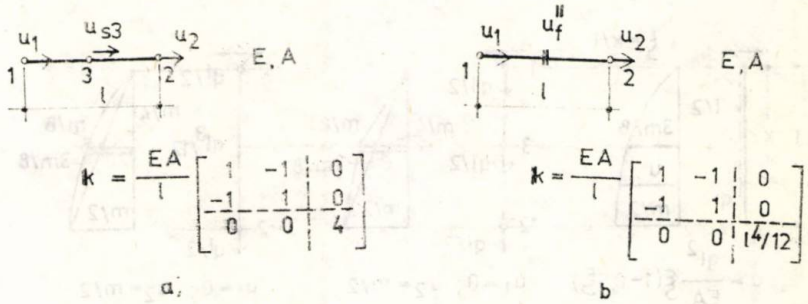


Fig. 5. — Matrice ale rigidităților barei solicitate axial.

Figura 6 redă matricea rigidităților unui element finit de grindă în treapta a 2-a a variantei *p*-ierarhice, bazată pe funcțiile de formă de la punctul 1.2. Se observă că în cazul elementelor unidimensionale submatricele $k_{gs} = k_{sg}$ din (2) sînt nule.

Funcțiile de formă de la punctele 1.1 și 1.2 pot servi și la deducerea matricelor rigidităților unor elemente finite tronconice pentru calculul plăcilor subțiri de rotație [1].

Matricea rigidităţilor treptei a doua a variantei p-ierarhice pentru un element finit dreptunghiular — bazată pe funcţiile de formă de la punctul 1.3 — este dată în lucrarea [2]. Aceeaşi lucrare cuprinde şi matricea rigidităţilor unui element finit triunghiular în starea de tensiune plană.

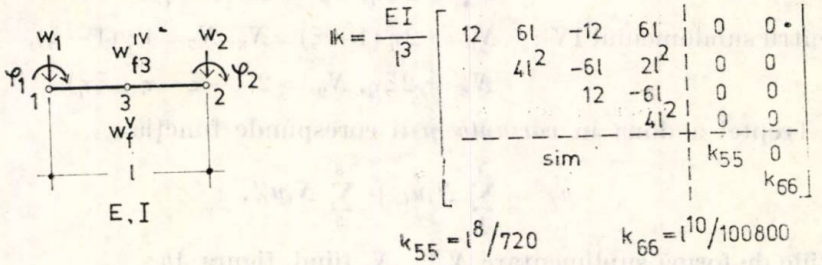


Fig. 6. — Matricea rigidităţilor unei grinzi supuse la încovoiere.

3. EXEMPLU DE CALCUL

Bara de secţiune constantă din figura 7*a* este acţionată axial, uniform distribuit. În aceeaşi figură este reprodusă soluţia analitică exactă pentru deplasarea axială u. Figurile 7*b* şi 7*c* redau încărcările consistente

$$\mathbf{q} = \int_0^l q\,\mathbf{N}^T\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

şi deplasările obţinute utilizînd matricele rigidităţilor din figura 5.

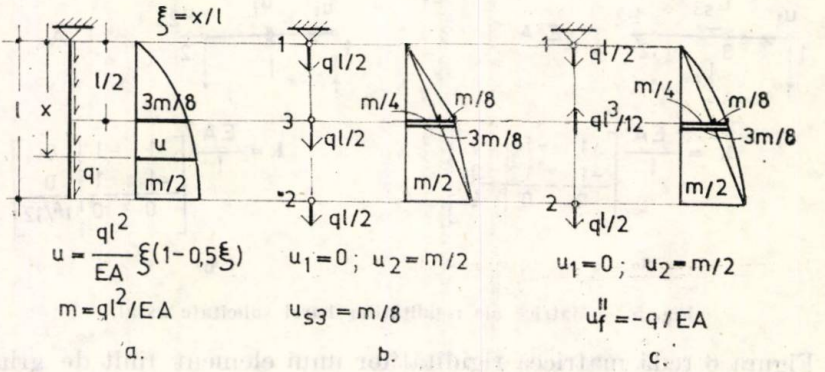


Fig. 7. — Bară solicitată axial.

Ultima variantă, cea p-ierarhică a condus la soluţia exactă pentru u. Cu (6b) şi (7), se scrie :

$$u_f = (1-\xi)\,u_1 + \xi\,u_2 - 0{,}5\,\xi\,(1-\xi)\,l^2\,u_f''$$

și cu soluțiile din figura 7c rezultă :

$$u_f = \xi q l^2/2EA - 0{,}5\xi\ (1-\xi) l^2\ (-q/EA) =$$

$$= (q l^2/2EA)\ [\xi + \xi\ (1-\xi)],$$

$$u_f = q l^2\ \xi(1 - 0{,}5\ \xi)/EA.$$

Primit în redacție la 5 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, *Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor.* Edit. Academiei, București, 1984.
2. R. FRIEDRICH, *Matrice pentru elemente finite p-ierarhice*, Bul. St. Teh. al IPT, seria Construcții (1982).
3. W. HACKBUSCH. *Introduction to Multi-Grid Methods for the Numerical Solution of Boundary Value Problems*, in : *Computational methods for turbulent, transonic and viscous flows*, Hemisphere Publ. Corp., Washington, 1983.
4. A. PEANO, *Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending*, Comp. & Maths. with Appl., 1976.
5. E. RANK, *A-posteriori-Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegralelement-Methoden*, München, 1985.

C. KYCHAKOFF (sub red.), *Electro-optic Sensing and Measurement* (Detectare și măsurare electrooptică), *Proceedings of the 6th International Congress on Applications of Lasers and Electro-optics, ICALEO'87, 8—12 November 1987, San Diego, California* (Referatele celui de al 6-lea congres internațional asupra aplicațiilor laserilor și electro-opticii, ICALEO'87, San Diego, California), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, London, Paris, Tokio, 1988, 162 p.

Volumul cuprinde, împărțite în cinci capitole, un număr de 19 lucrări prezentate în noiembrie 1987 la Congresul Internațional asupra aplicațiilor laserilor și electro-opticii desfășurat la San-Diego, California. Lucrările sînt elaborate de 49 autori de la 19 instituții și universități de prestigiu din S.U.A., Canada, Australia și R.F.G.

Primul capitol grupează patru lucrări consacrate detectării în infraroșu și detectării termice. Sînt prezente atît noțiuni teoretice privind pirometria laser sau sistemele de imagini în infraroșu cu iluminare laser în domeniul 0,7...100 μm, cît și aplicații industriale ale termometriei laser în măsurarea temperaturii motoarelor cu magneți permanenți sau turbomotoarelor.

Capitolul consacrat testării și evaluării lor prin metode spectroscopice conține teoria și aplicațiile pentru patru tipuri de spectroscopii : spectroscopia cu împrăștierea Raman coerentă anti-Stokes (aplicații în caracterizarea mediilor turbulente), spectroscopia prin străpungere indusă laser (aplicații în analiza elementară a solidelor, lichidelor și gazelor), spectroscopia în infraroșu apropiat (caracterizarea mineralelor cu conținut variabil de fier) și spectroscopia fotoacustică (aplicații în caracterizarea proprietăților gazelor și particulelor atmosferice). Două lucrări prezintă dispozitivele sistemelor spectroscopice de investigare și anume diodele laser acordabile și detectoarele optice multicanal.

Capitolul al 3-lea conține lucrări din domeniul metrologiei industriale : folosirea interferometriei holografice în aplicații industriale, aplicațiile laserilor în comanda logistică a forțelor aeriene, proiectarea 3-dimensională pe calculatoare personale a traseelor optice în diferite dispozitive (de exemplu deflectoare acusto-optice).

Capitolul al 4-lea este consacrat dispozitivelor și sistemelor optice care funcționează în medii adverse (inclusiv în spațiul cosmic). Sînt investigate funcționările sistemelor optice în medii turbulente, în condiții dinamice și termice deosebite sau în condiții de microgravitație. Una dintre lucrări prezintă noile tehnologii pentru protecția suprafețelor optice împotriva vaporilor sau particulelor contaminante.

Ultimul capitol grupează două lucrări care prezintă studii avansate în tehnologia laserilor sau a dispozitivelor electro-optice : laseri semiconductori și fotodiode în avalanșă pentru măsurarea vitezelor gazelor și fluidelor și arii de comutatoare optice bazate pe efect Faraday pentru instrumentele optice adaptive.

Metodele electro-optice prezentate în lucrare oferă posibilitatea măsurării multor proprietăți fizice și chimice cu acuratețe, rapiditate și fără deranjarea fenomenelor respective. Crește astfel calitatea și eficiența producției, elemente esențiale ale competitivității industriale.

O. Iancu

A. PUGH (sub red.), *Developments in Assembly Automation* (Realizări în asamblarea automatizată), *Japan vs Europe. Product Design for Assembly. Proceedings of the 9th International Conference, London, March 15—17, 1988*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 513 p.

Domeniul automatizării asamblării este multidisciplinar, pregătirea specialiștilor ce lucrează în acest domeniu trebuind să întrunească cunoștințe multilaterale ceea ce constituie singura soluție prin care se poate ajunge la rezultate remarcabile.

Lucrările conferinței au fost grupate în trei capitole. Primul capitol prezintă realizări în domeniul automatizării asamblării în Europa și Japonia punînd față în față realizările obținute în acest domeniu în industrie.

În cel de-al doilea capitol sînt prezentate metode de proiectare pentru produsele supuse asamblării. Sînt prezentate proceduri de asamblare, posibilități de integrare a asamblării cu planificarea producției precum și realizări concrete privind proiectarea asamblării în cazul motoarelor electrice.

Capitolul al treilea este structurat în șase subcapitole ce tratează : Automatizarea asamblării — Tendințe în asamblare : Asamblare flexibilă ; Strategii, planificare și integrare : Senzori și baze de cunoștințe pentru sisteme ; Dezvoltări hardware și Sisteme de manipulare avansată.

Lucrările din acest capitol analizează atît aspecte teoretice referitoare la procesul de automatizare a asamblării dar și aspecte practice legate de folosirea rotoarelor ghidate inductiv în secțiile de asamblare, de metodele prin care se poate aborda o dezvoltare pas cu pas a unui sistem de asamblare. Sînt prezentate de asemenea aplicații practice ale proceselor de asamblare, aplicații atît de laborator, cît și de nivel industrial, modul în care sînt integrați roboții industriali în cadrul acestor procese.

Prin problematica abordată volumul se adresează proiectanților din domeniu, specialiștilor din industrie, cadrelor didactice și studenților din facultățile cu profil tehnic.

N. Comănescu

M. MYRUP ANDREASEN, S. KÄHLER, T. LUND, with G. SWIFT, *Design for Assembly* (Proiectarea pentru asamblare), ediția doua, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 211 p.

Prezentată într-o formă grafică deosebită, lucrarea tratează problema proiectării proceselor de asamblare într-un mod sistematic, simplu și concis. Fiind o introducere în problematica produselor de asamblare, cartea prezintă principiile asamblării „clasice", dar oferă și un important material privind evaluarea gradului de asamblare, a proiectării asistate de calculator a produselor precum și a proiectării sistemelor flexibile și a celor integrate cu calculatorul (CIM).

De asemenea, se prezintă influența proceselor de asamblare asupra noilor dezvoltări în tehnica de proiectare asistată de calculator și a tehnologiilor de asamblare. Acest material oferă proiectanților o bază de cunoștințe capabilă să-i orienteze spre realizarea unei fabricații și asamblări economice.

Lucrarea este structurată pe 11 capitole care tratează următoarele probleme : nevoia de raționalizare a asamblării ; ce se asamblează ; operațiile și echipamentele de asamblare ; sistemele de asamblare ; proiectarea optimă pentru facilitatea asamblării ; evaluarea gradului de asamblare (asamblabilității) ; integrarea asamblării precum și aspecte privind tendințe de viitor în această problemă.

Urmărindu-se raționalizarea proiectării pentru procesele de asamblare se oferă prin intermediul schițelor, desenelor și ilustrate ale unor instalații și echipamente deja utilizate în industrie, un suport teoretic bine fundamentat al principiilor, normelor și regulilor prin care de la procesul asamblării de tip „clasic" se poate trece la automatizarea și flexibilizarea acestuia.

Cartea va găsi un larg cerc de cititori atît în rîndul specialiștilor cu experiență, dar constituie și un text de introducere pentru specialiștii din domeniul automatizărilor, pentru studenții facultăților cu profil tehnic, pentru toți cei ce doresc să-și îmbogățească cunoștințele din acest domeniu.

A. Totu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 48, nr. 3 mai — iunie 1989

SUMAR

STUDII

I. ANTON, D. IONESCU şi G. CĂLIN, Optimizarea reţelelor plane de turbine hidraulice. I. Prezentarea metodei 237

AL. MARINESCU şi ŞT. STAICU, Asupra manevrei optime de sosire în punctele de libraţie prin metoda tracţiunilor mici 249

IULIANA OPREA şi ADELINA GEORGESCU, Suprafeţe neutrale bifurcate într-o problemă de inhibiţie a convecţiei termice datorită unui cimp magnetic 263

S. T. CHIRIACESCU, Asupra ecuaţiilor curbelor limită de rezistenţă la oboseală . . . 279

AL. D. STAN, Cuplul optim al sistemului piston-cilindrul pompei de adîncime 305

V. ULMANU şi GH. ZECHERU, Determinarea durabilităţii prăjinilor de foraj pe baza conceptelor mecanicii ruperii materialelor 315

NOTE

M. V. SOARE, Asupra unei generalizări a multiplicatorului de impact (II) 333

RECENZII 341

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă, precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

OPTIMIZAREA REȚELELOR PLANE DE TURBINE HIDRAULICE

I. Prezentarea metodei

de I. ANTON, D. IONESCU și G. CĂLIN

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Este prezentată o metodă rațională pentru proiectarea rețelelor de profile cu pierderi minime, folosind planul imagine al lui Le Foll pentru stabilirea distribuției optime a vitezei pe extradosul profilului. Pentru rețelele plane care aparțin turbinelor hidraulice s-a realizat o diagramă universală care permite trasarea distribuției de viteze pe extradosul profilului, cînd se cunosc numărul Reynolds al curgerii și viteza medie. Odată cunoscută distribuția de viteze se poate construi profilul.

NOTAȚII

l — lungimea corzii profilului;
q — logaritmul natural al vitezei adimensionale, definit de ecuația (6);
s — lungimea arcului;
s_F — lungimea totală a arcului măsurată pe extradosul profilului;
w' — viteza medie pătratică a pulsațiilor de viteză;
$C_d = (2/\rho W_e^3)\int_0^{\delta} \tau(y)(\partial W/\partial y)\mathrm{d}y$ — coeficientul de disipație;
$C_f = 2\tau_0/\rho W_e^2$ — coeficientul local de frecare la perete;
E — energia cinetică disipată, definitiă de ecuația (10);
$H_{12} = \delta_1/\delta_2$ — factorul de formă al impulsului;
$H_{32} = \delta_3/\delta_2$ — factorul de formă al energiei;
L — ordonata în planul imagine, definită de ecuația (3);
L_n — curba de stabilitate laminară;
L_t — curba de stabilitate a stratului limită turbulent;
M — funcție de L și X, definit de ecuația (5);
$Re_\infty = W_\infty l/\nu$ — număr Reynolds format cu coarda profilului;
$Re_{s_F} = W_\infty s_F/\nu$ — număr Reynolds format cu lungimea totală a arcului de pe extradosul profilului;
Re_F — număr Reynolds, definit de ecuația (18a);
$Re_{\delta_2} = W_e\delta_2/\nu$ — număr Reynolds format cu grosimea pierderii de impuls;
$Re_{\delta_3} = W_e\delta_3/\nu$ — număr Reynolds format cu grosimea pierderii de energie;
W — viteza medie în timp în stratul limită;
W_e — viteza la marginea stratului limită;
W_F — viteza la bordul de fugă;
V_m — viteza meridională;

W_∞ — viteza potențială rezultată din media vectorială a vitezelor W_1 și W_2;
W_{med} — viteza medie pe extradosul profilului, în planul imagine, definită de ecuația (18b);
W_1 — viteza relativă asimptotică la intrarea în rețea;
W_2 — viteza relativă asimptotică la ieșirea din rețea;

$$\delta_2 = \int_0^\delta (W/W_e)(1 - W/W_e)\mathrm{d}y$$ — grosimea pierderii de impuls;

$$\delta_3 = \int_0^\delta (W/W_e)(1 - W^2/W_e^2)\mathrm{d}y$$ — grosimea pierderii de energie;

Φ — potențialul vitezei, definit de ecuația (7);
ρ — densitatea;
ν — viscozitatea cinematică;
X — abscisa în planul imagine, definită de ecuația (4);
$\Delta p_t = p_{1t} - p_{2t}$ — pierderea de presiune totală în rețea;
$\zeta = 2\Delta p_t/\rho v_m^2$ — coeficientul de pierdere în rețea.

Indici

1 — în fața rețelei;
2 — în spatele rețelei;
r — rotor;
ref — referință;
t — turbulent;
F — bord de fugă;
T — tranziție;
$+$ — extrados;
$-$ — intrados.

1. INTRODUCERE

Optimizarea unei rețele de profile în curent staționar este una din problemele importante ale teoriei rețelelor de profile care funcționează în fluide reale. În prezenta lucrare, optimizarea unei rețele plane de profile se formulează astfel: fiind date triunghiurile vitezelor la intrarea și ieșirea în/din rețea, să se găsească profilul care conduce curentul cu pierderi minime.

Din literatura publicată în acest domeniu rezultă două direcții principale pentru determinarea rețelelor optime: o direcție experimentală și o direcție teoretică.

a) Metodele experimentale presupun efectuarea de măsurători sistematice asupra unei familii de rețele. Parametrii geometrici ai rețelei se modifică în experimentări și se stabilește în consecință rețeaua optimă. Astfel, de exemplu, A. D. S. Carter [1] a găsit curbura optimă a profi-

lului C 4 cunoscînd unghiurile de ieșire și pasul relativ; L. Speidel și N. Scholz [2] au găsit pasul relativ optim și unghiul de așezare pentru profilele NACA 0010 și NACA 8410; Viorica Anton [3] a elaborat diagrame universale pentru rețele cu profile MHT—1—12% și NACA 8410 din care se poate citi domeniul optim de funcționare. Metoda experimentală de optimizare este destul de complicată din cauza numărului mare de parametri.

b) Metodele teoretice se bazează pe cercetări aerodinamice și de strat limită. O rețea este definită numai de distribuția vitezei pe conturul profilului și de vectorii viteză de la intrare și ieșire. Determinarea rețelei optime se realizează în două etape: prima constă în găsirea distribuției optime a vitezei și a doua, în rezolvarea problemei inverse. Verificarea optimizării se face apoi prin folosirea metodei directe. Formulări mai potrivite pentru distribuții de viteză optimizate, bazate pe conceptul de strat limită, au fost date de F. X. Wortmann [4], J. Le Foll [5], K. D. Papailiou [6, 7], J. Citavy [8], G. J. Walker [9] cu aplicații la rețelele de compresoare și turbine de gaze.

Într-o lucrare anterioară [10] a fost prezentată o metodă pentru optimizarea distribuției de viteze în rețelele de turbină hidraulică care lucrează la numere Reynolds relativ mici ($Re < 5{,}5 \cdot 10^5$) folosind teoria lui Le Foll pentru calculul stratului limită. Aceasta a permis ca stratul limită să se mențină laminar pe o lungime importantă pe extradosul profilului (peste 40%), partea turbulentă ocupînd numai zona de decelerare. În lucrarea de față ne-am propus să optimizăm distribuția de viteze în rețelele de turbină hidraulică cu numere Reynolds mari ($Re > 10^6$). În această situație, stratul limită laminar se manifestă numai pe o zonă îngustă în apropierea bordului de atac. Metoda permite determinarea formei profilului care realizează distribuția de viteze impusă de condițiile de optimizare.

2. METODA LE FOLL DE REPREZENTARE A STRATURILOR LIMITĂ [5, 6]

Metoda Le Foll se bazează pe cele două ecuații integrale ale stratului limită

— ecuația impulsului

$$\mathrm{d}(\delta_2 W_e^2) + \delta_2 H_{12} W_e \mathrm{d}W_e = C_f (H_{12}\delta_2) \frac{W_e^2}{2} \mathrm{d}s \tag{1}$$

și

— ecuația energiei

$$\mathrm{d}\left(\delta_2 H_{32}(H_{12}) \frac{W_e^3}{2} \right) = C_d(H_{12}, \delta_2) W_e^3 \mathrm{d}s. \tag{2}$$

În general, ecuațiile (1) și (2) permit calculul proprietăților stratului limită (δ_2, H_{12}) cunoscînd distribuția vitezei $W_e(s)$. Se observă că este

posibil să se calculeze distribuţia vitezei W_e pornind de la proprietăţile stratului limită, adică de la cunoaşterea distribuţiei $H_{12} = H_{12}(\delta_2)$.

Ideea lui Le Foll a fost de a introduce un plan care să aibă ca coordonate un factor de formă şi un număr Reynolds bazat pe o lungime caracteristică a stratului limită. Pe acest plan, numit plan imagine, pot fi reprezentate proprietăţile generale ale straturilor limită laminare şi turbulente nedesprinse.

Pentru coordonatele planului imagine, Le Foll a ales parametrii L şi X definiţi astfel

$$L = \int_{H_{32\min}}^{H_{32}} \frac{\mathrm{d}H_{32}}{H_{32}(H_{12} - 1)} \tag{3}$$

($H_{32\min}$ corespunde desprinderii)

$$x = \ln Re_{\delta_3} + 2L \tag{4}$$

în care $Re_{\delta_3} = W_e\delta_3/\nu$. În figura 1 este trasat planul imagine în care sînt redate curba lui Schlichting (curba de stabilitate laminară), $L_n(X)$, şi curba lui Clauser (curba de stabilitate a stratului limită turbulent, $L_t(X)$).

Dacă se notează

$$M = \frac{1}{H_{12} - 1}\left[1 - \frac{H_{32}C_f}{2C_d}\right] \tag{5}$$

şi se introduc următoarele definiţii:

$$q = \ln \frac{W_e}{W_{ref}}, \tag{6}$$

$$\Phi = \int_0^s \frac{W_e \mathrm{d}s}{\nu}, \tag{7}$$

ecuaţiile (1) şi (2) se scriu sub forma următoare:

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}L - \frac{M}{1 + 2M}\mathrm{d}X, \tag{8}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mathrm{e}^X \mathrm{d}X}{(1 + 2M)C_d \mathrm{e}^{2L}}. \tag{9}$$

Aceste ecuaţii reprezintă un sistem de două ecuaţii diferenţiale cu două variabile independente. Ele se folosesc pentru calculul dezvoltării stratului limită.

Pentru a rezolva ecuațiile (8) și (9) este nevoie să se cunoască funcțiile C_d și M. Modul în care se pot determina aceste funcții a fost arătat în [10] și forma lor în planul imagine este dată în figura 1.

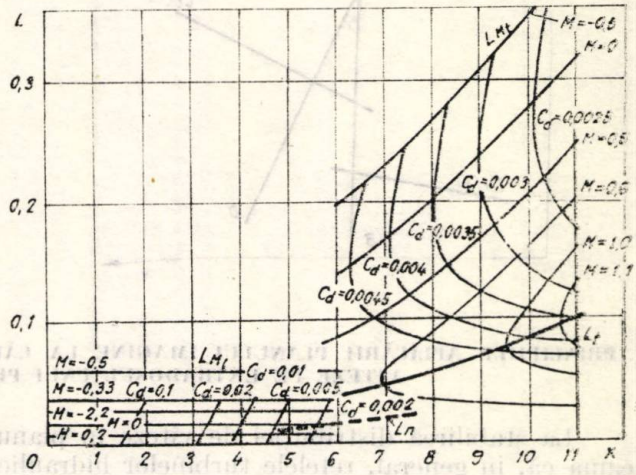


Fig. 1. — Reprezentarea parametrilor stratului limită în planul imagine.

Avînd în vedere că energia cinetică disipată în stratul limită este

$$E = \rho\delta_3 \frac{W_e^3}{2} \left(= \rho\nu Re_{\delta_3} \frac{W_e^2}{2} \right) \tag{10}$$

și eliminînd pe s între ecuațiile (1) și (2), se obține o relație între proprietățile intrinseci ale stratului limită și distribuția de viteze W_e,

$$\frac{dW_e}{W_e} = dL - M(X, L)\frac{dE}{E}. \tag{11}$$

Din ecuațiile (8) și (10) rezultă

$$\frac{dE}{E} = \frac{dX}{1+2M}. \tag{12}$$

Deoarece disipația este o funcție crescătoare cu distanța, trebuie ca $M \geqslant -1/2$. Din ecuația (11) se vede că o micșorare a lui W_e poate fi obținută atît printr-o descreștere a valorii lui L, cît și printr-o creștere a valorii lui E, M fiind pozitiv. Deoarece realizarea unei decelerări numai prin descreșterea parametrului L (fig. 2, dreapta AB) nu este fizic posibilă [5], ea trebuie făcută după dreapta AD cu o pantă de cel puțin $dL/dX = -0{,}5$ [7].

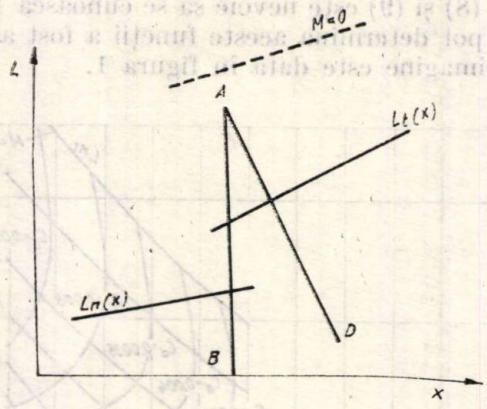


Fig. 2. — Decelerarea optimă.

3. PRINCIPIILE APLICĂRII PLANULUI IMAGINE LA CALCULUL DISTRIBUȚIEI DE VITEZE PE EXTRADOSUL UNUI PROFIL

La stabilirea distribuției de viteze în planul imagine trebuie ținut seama că, în general, rețelele turbinelor hidraulice se caracterizează prin numere Reynolds relativ mari, la care corespund coeficienți de portanță relativ mici.

Întrucît pierderile în mișcarea laminară sînt cu un ordin de mărime mai mici decît în cea turbulentă [11], ar trebui ca stratul limită laminar să se extindă pe profil cît mai mult posibil. Deoarece în rețelele de turbine hidraulice stratul limită laminar ocupă o zonă restrînsă din cauza numărului Reynolds relativ mare, rezultă că într-o astfel de rețea, pierderile hidraulice se datoresc stratului limită turbulent.

Este cunoscut faptul că grosimea pierderii de impuls δ_2 este direct proporțională cu pierderile [12]; în parametrii planului imagine se poate scrie

$$\delta_2 \sim \frac{e^X}{H_{32}(L)e^{2L}}$$

($H_{32}(L)$ este o funcție crescătoare cu L). Din această relație rezultă că pierderile se micșorează cînd L crește, ceea ce înseamnă că curba imagine corespunzătoare stratului limită turbulent trebuie ridicată cît mai sus către linia $M = 0$.

De asemenea, s-a considerat că este foarte important ca distribuția de viteze realizată să prezinte aproximativ un palier; acesta este cerut de metoda inversă [13]. O linie de egală viteză, în planul imagine, este dată de ecuația

$$L = L_0 + \int \frac{M}{1 + 2M} \, dX$$

dedusă din (8). L_0 reprezintă ordonata la care se dorește să pornească această curbă. La prima aproximație, pentru M se consideră valoarea

din punctul anterior; curba se obține printr-un procedeu iterativ admițînd pentru M valoarea din iterația precedentă.

În cele mai multe cazuri, după palierul vitezei urmează aproape inevitabil o decelerare (mai pronunțată la viteze mari).

Odată făcute aceste precizări se va prezenta acum modul în care poate fi stabilită o distribuție de viteze în planul imagine corespunzătoare extradosului unui profil (fig. 3).

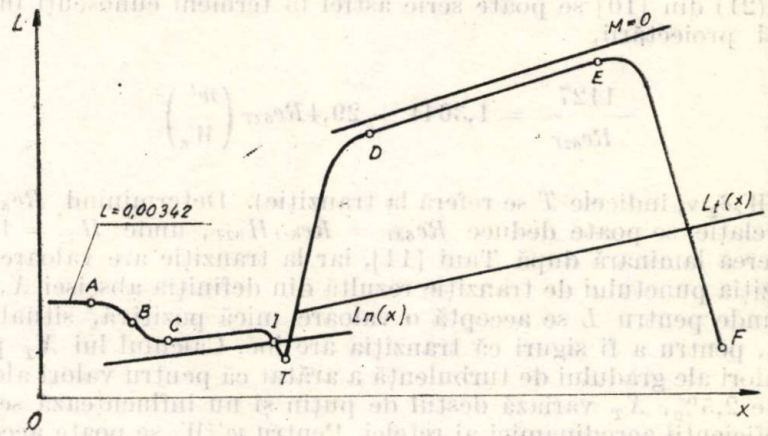


Fig. 3. — Stabilirea curbei imagine.

Partea laminară a curbei imagine pornește la $X = -\infty$, dar cu $L = 0{,}00342$, valoare care corespunde punctului de impact. Deoarece în zona bordului de atac viteza este proporțională cu lungimea arcului, această parte este reprezentată printr-o paralelă la axa X, $(-\infty, A)$ [7]. În continuare curba imagine trebuie să urmeze, cît mai aproape posibil, curba L_n, (CI), [5], care este o curbă imagine optimă pentru stratul limită laminar.

Segmentul de curba imagine care pornește la $L = 0{,}00342$ pînă la curba L_n, (ABC), prezintă mică importanță din punct de vedere al stratului limită, însă el poate deveni foarte important pentru forma bordului de atac, atunci cînd se aplică metoda inversă la calculul potențial al profilului, cît și din punct de vedere cavitațional.

De aici urmează mișcarea în regim turbulent. Curba imagine pornește din T cu o pantă care asigură continuitatea vitezei în punctul de tranziție. După cum s-a arătat mai sus, pentru a realiza pierderi minime, curba imagine trebuie să urce pînă în apropiere de curba $M = 0$, $(T\,D)$, după care urmează o linie de viteză aproximativ constantă, (DE). Această linie se continuă pînă aproape de X_F, corespunzătoare numărului Reynolds cerut, după care se face decelerarea, (EF). Cunoscînd curba $L = L(X)$ se poate obține prin integrarea ecuațiilor (8) și (9) distribuția de viteze $q(\Phi)$. Pentru a ajunge la forma obișnuită $W_e/W_\infty = f(s/s_F)$ se folosesc expresiile de definiție (6) și (7) ale coordonatelor q și Φ [10].

4. DIAGRAMĂ UNIVERSALĂ

La trasarea curbei imagine este important să se cunoască nivelul turbulenței curentului exterior, w'/W_e, numărul Reynolds $Re_{s_F} = s_F W_\infty/\nu$, viteza medie pe extrados, W_{med}, și viteza la bordul de fugă, W_F/W_∞.

Intensitatea turbulenței curentului exterior este necesară pentru determina abscisa X_T a punctului de tranziție în planul imagine. Nivelul turbulenței este dificil de evaluat în cea mai mare parte a aplicațiilor practice, ceea ce introduce un grad de incertitudine în calculul tranziției. Ecuația (21) din [10] se poate scrie astfel în termeni cunoscuți în acest stadiu al proiectării,

$$\frac{1127}{Re_{\delta 2T}} = 1{,}3041 + 29{,}4 Re_{\delta 2T} \left(\frac{w'}{W_e}\right)^2 \tag{13}$$

($Re_{\delta 2} = W_e\delta_2/\nu$, indicele T se referă la tranziție). Determinînd $Re_{\delta 2T}$ din această relație, se poate deduce $Re_{\delta 3T} = Re_{\delta 2T} H_{32T}$, unde $H_{32} = 1{,}53$ la desprinderea laminară după Tani [14], iar la tranziție are valoarea 1,55 [15]. Poziția punctului de tranziție rezultă din definiția abscisei X, ecuația (4), unde pentru L se acceptă o valoare mică pozitivă, situată sub curba L_n, pentru a fi siguri că tranziția are loc. Calculul lui X_T pentru cîteva valori ale gradului de turbulență a arătat că pentru valori ale acestuia peste 2,5%, X_T variază destul de puțin și nu influențează semnificativ coeficienții aerodinamici ai rețelei. Pentru w'/W_e se poate accepta o valoare de 3% [7] la care corespunde $X_T = 5{,}7$.

Numărul Reynolds nu poate fi determinat, deoarece nu se cunoaște valoarea arcului s_F^+. Totuși este posibil ca acesta să fie aproximat astfel

$$Re_{sF} = k_s^+ Re_\infty, \tag{14}$$

unde $Re_\infty = lW_\infty/\nu$ și $k_s^+ = s_F^+/l$. Re_∞ este cunoscut din datele problemei, k_s^+ depinde însă de curbură și grosimea profilului, încă nedeterminat. Pentru rotoare de turbină axială, s-a dedus $k_s^+ = 1{,}005 - 1{,}08$, valorile maxime corespund butucului rotorului, iar cele minime, periferiei.

Viteza medie pe extradosul profilului adimensionalizată prin W_∞

$$W_{med}^+ = \int_0^1 \frac{W_e}{W_\infty} \mathrm{d}\left(\frac{s}{s_F}\right) \tag{15}$$

reprezintă contribuția acestuia la circulația vitezei în jurul profilului ($\Gamma/W_\infty = W_{med}^+ s_F^+ - W_{med}^- s_F^-$).

Viteza la bordul de fugă, W_F, este un alt parametru important la dimensionarea rețelei, a cărei mărime adimensională este

$$k_F = \frac{W_F}{W_\infty}. \tag{16}$$

În cazul în care rețeaua rezultată nu realizează parametrii ceruți ea se redimensionalizează ținînd seama de valorile obținute anterior.

Pentru a ușura stabilirea curbei imagine a distribuției de viteză corespunzătoare unei rețele de profile care urmează a fi proiectată, au fost construite curbe cu caracter universal în planul imagine (fig. 4). Deoarece pentru realizarea acestor curbe nu este cunoscut raportul W_F/W_∞, s-a considerat $W_F/W_\infty = 1$; în acest caz, în planul imagine, vom studia mărimile $Re_F\ (= W_F s_F^+/\nu)$ și $W_{med}\left[= \int_0^1 (W_e/W_F)\mathrm{d}(s/s_F^+) \right]$, care pot fi calculate. Aceste mărimi sînt legate de datele de proiectare prin relațiile

$$Re_F = k_F Re_{sF},\quad W_{med} = \frac{1}{k_F} W_{med}^+. \tag{18 a, b}$$

Pentru partea turbulentă a curbei imagine s-a trasat o singură linie, în apropierea curbei $M = 0$, din care se desprind curbe de decelerare calculate pentru numere Reynolds Re_F constante. De asemenea, au fost calculate și trasate curbele de viteză medie, W_{med}, constantă.

Abscisa X_A (fig. 4 detaliu) s-a modificat în calcule pentru a evita o micșorare prea mare a pantei vitezei din apropierea bordului de atac. În consecință, curba 1 s-a asociat cu curbele de decelerare I și II, curba 2 cu III și IV, curba 3 cu V și VI și curba 4 cu VII, VIII și IX.

Din examinarea diagramei prezentate se observă că numărul Reynolds Re_F crește cu abscisa X_F din planul imagine, iar viteza medie, W_{med}, scade cu creșterea ordonatei punctului final, L_F. Mai trebuie menționat că această diagramă corespunde la straturi limită fără desprindere și este independentă de condițiile de la intrare și ieșire, precum și de geometria profilului.

5. METODA INVERSĂ

După cum este cunoscut, metodele inverse sau de proiectare sînt în general de două tipuri principale, metode care folosesc teoria transformărilor conforme și metode bazate pe teoria singularităților. Primele sînt metode exacte și cer ca viteza să fie specificată în toate punctele de pe conturul profilului. Fără o anumită experiență este dificil să se realizeze o formă aerodinamică pentru profil, grosime pozitivă peste tot, raze rezonabile la bordurile de atac și fugă și grosimea maximă cerută.

Din experiența autorilor, metoda singularităților este mai convenabilă în cazul de față. Distribuția vitezei este cerută numai pentru extradosul profilului ; distribuția de grosime, grosimea maximă și lungimea corzii se admit. Dezavantajul constă în folosirea unui procedeu iterativ de calcul de la o formă inițială a profilului la forma definitivă.

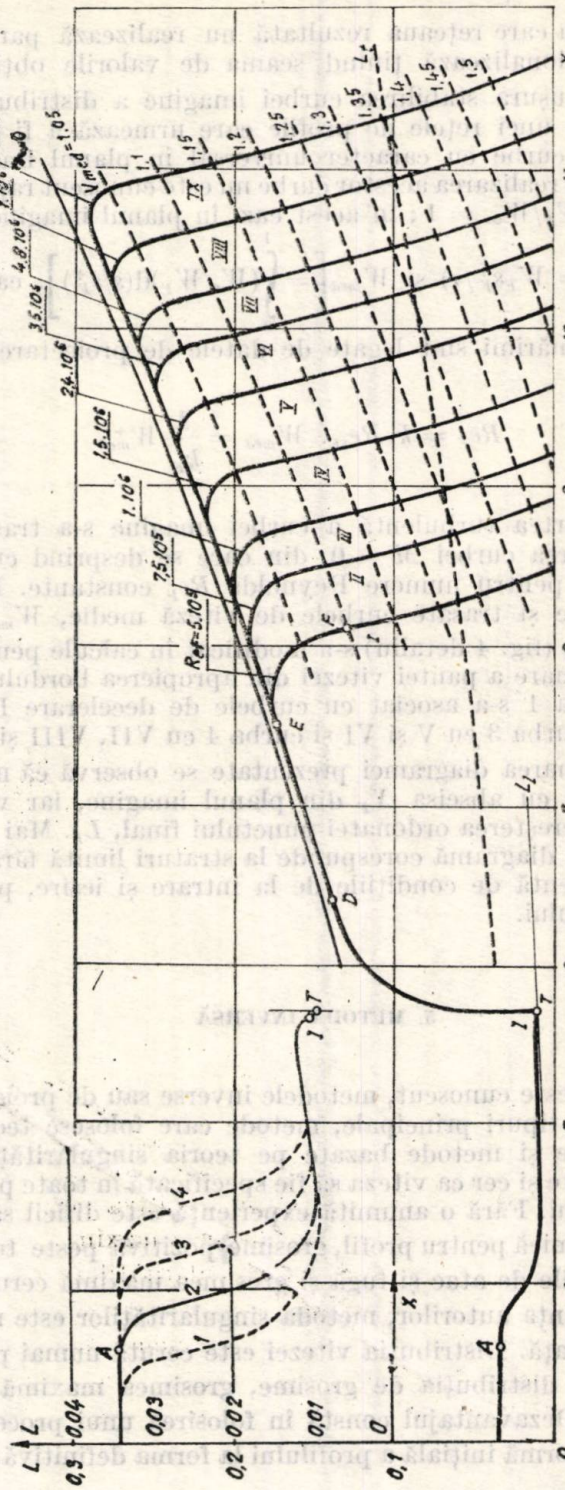


Fig. 4. — Diagramă universală.

În lucrarea de față a fost folosită metoda propusă de Wilkinson [13], bazată pe teoria singularităților. Cu această metodă au fost proiectate mai multe rețele, pentru care s-au obținut distribuții de viteză foarte apropiate de cele rezultate din planul imagine.

Primit în redacție la 8 octombrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. A. D. S. CARTER, *The Low Speed Performance of Related Aerofoils in Cascade*, ARC, 29 (1951).
2. L. SPEIDEL, N. SCHOLZ, *Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern*, VDI-Forschungsheft, 464 (1957).
3. VIORICA ANTON, *Cercetări experimentale privind influența geometriei unor rețele de profile asupra caracteristicilor lor energetice și cavitaționale*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic Timișoara, 1972.
4. F. X. WORTMANN, *Ein Beitrag zum Entwurf von Laminarprofilen für Segelflugzeuge und Hubschrauber*, Zeitschrift für Flugwissenschaften, **3**, 10 (1955).
5. J. LE FOLL, *A Theory of Representation of Properties of Boundary Layer on a Plane*, *Proc. Seminar Adv. Problems in Turbomachinery*, VKI, March 29—30, 1965.
6. K. D. PAPAILIOU, *Boundary Layer Optimisation for the Design of High Turning Axial Flow Compressor Blades*, ASME Paper No. 70GT88, 1970.
7. K. D. PAPAILIOU, *Optimisation des dispositifs décélerateurs à forte charge, fondée sur une théorie integrale de la couche limite*, Teză de doctorat, Université de Lyon, 1974.
8. J. CITAVÝ, *Two-dimensional Compressor Cascades with Optimum Velocity Distribution over the Blade*, J. Eng. for Power, **97**, (1976).
9. G. J. WALKER, *A Family of Surface Velocity Distributions for Axial Compressor Blading and Their Theoretical Performance*, J. Eng. for Power, **98**, 2 (1976).
10. I. ANTON, D. IONESCU, G. CĂLIN, *Über das Le Foll-Verfahren zur Optimisierung der Grenzschicht*, Rev. Roum. Sci. Tech.—Mée. Appl., **30**, 2—3 (1985).
11. H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory*, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1968.
12. S. LIEBLEIN, W. ROUDEBUSH, *Theoretical Loss Relations for Low Speed, Two-Dimensional Cascade Flow*, NACA TN 3662 (1956).
13. D. H. WILKINSON, *A Numerical Solution of the Analysis and Design Problems for the Flow Past One or More Aerofoils or Cascades*, R & M, 3545 (1968).
14. I. TANI, *On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations*, *50 Jahre Grenzschichtforschung*, Akademie-Verlag, Berlin, 1956, p. 193—200.
15. E. R. VAN DRIEST, C. B. BLUMER, *Boundary Layer Transition: Free Stream Turbulence and Pressure*, AIAA—Journal, V1 (1963) p. 1303—1305.

În lucrarea de față a fost folosită metoda propusă de Wilkinson [13], bazată pe teoria singularităților. O asemenă metodă au fost proiectate mai multe rețele, pentru care s-au obținut distribuții de viteză foarte apropiate de cele reale din planul imaginar.

ASUPRA MANEVREI OPTIME DE SOSIRE ÎN PUNCTELE DE LIBRAȚIE PRIN METODA TRACȚIUNILOR MICI

de AL. MARINESCU
INCREST București
ȘT. STAICU
Institutul Politehnic București

Lucrarea studiază manevra optimă cu minimum de combustibil a unui vehicul spațial, prevăzut cu instalație de propulsie de tracțiune mică, în apropierea punctelor de librație ale sistemului Pământ-Lună.
Utilizînd metoda variațională, se stabilesc relații analitice pentru calculul poziției, vitezei și tracțiunii specifice a vehiculului spațial.

1. NOTAȚII

GXY — sistem inerțial cu originea în centrul de greutate G al sistemului Pământ-Lună;
Gxy — referențialul rotitor, atașat sistemului Pământ-Lună, cu originea în centrul de greutate G;
$L\xi\eta$ — sistem de axe mobile cu originea în punctul de librație L;
$\xi\eta$ — coordonatele punctului de librație în sistemul Gxy;
$\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ — coordonatele vehiculului spațial în sistemul $L\xi\eta$;
r — distanța între Pământ și punctul de librație;
ρ — distanța între Lună și punctul de librație;
S_1 — distanța între Pământ și centrul de greutate G;
S_2 — distanța între Lună și centrul de greutate G;
D — distanța între Pământ și Lună;
t — timpul;
τ — durata manevrei;
ω — viteza unghiulară a sistemului Pământ-Lună în jurul lui G;
μ — parametrul gravitațional al Pământului;
m — masa vehiculului;
m_1 — masa Pământului;
m_2 — masa Lunii;
V_ξ, V_η — componentele vitezei vehiculului de-a lungul axelor $L\xi$ și $L\eta$;
a_ξ, a_η — componentele accelerației create de tracțiune, de-a lungul axelor $L\xi$ și $L\eta$;
g — accelerația gravitațională a Pământului.

2. INTRODUCERE

În operațiunile spațiale o deosebită importanță capătă problemele legate de manevrele vehiculelor spațiale în vecinătatea punctelor de librație ale sistemului Pământ-Lună.

Determinarea mișcării unui corp de mici dimensiuni în cîmpul de atracție al Pământului și Lunii constituie problema restrînsă a celor trei corpuri.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 3, 1989, P. 249—262

Studiul manevrelor de transfer din punctele de librație ale sistemului Pământ-Lună spre orbite ale Pământului sau Lunii au făcut obiectul unor lucrări remarcabile [2], [3], în care s-a aplicat metoda impulsurilor. Însă, la transferul de pe orbite ale Pământului către puncte de librație, vom observa că pentru mici variații ale vitezelor inițiale sau datorită influenței unor perturbații apar mari deviații ale vehiculului de la traiectoria prevăzută. O problemă importantă este aceea de a găsi mijloacele prin care vehiculul poate ajunge cu precizie de pe orbite în punctele de librație.

În lucrarea de față se studiază manevra optimă a vehiculului spațial în apropierea punctelor de librație sau pe orbite în jurul acestor puncte, aplicînd metoda tracțiunilor mici introdusă de Al. Marinescu [1].

Vom considera vehiculul spațial ca un punct material, prevăzut cu instalație de propulsie de mică tracțiune, care se deplasează în vecinătatea unui punct de librație L.

În acest sens vom admite sistemul fix (inerțial) GXY și apoi referențialul rotitor Gxy a cărui axă Gx coincide cu linia m_1m_2 și ale căror origini se află în centrul de greutate G al sistemului m_1, m_2 (fig. 1).

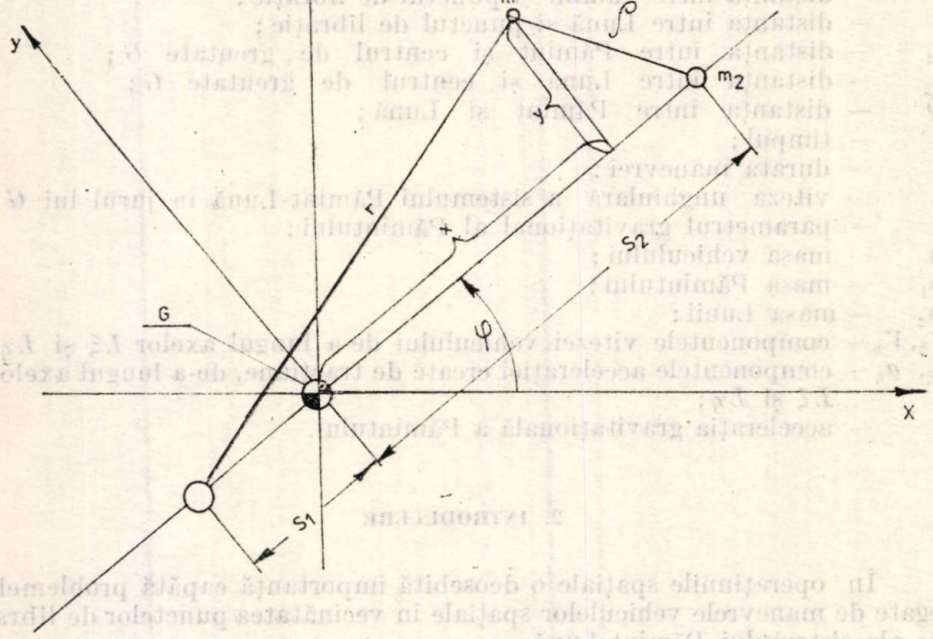


Fig. 1

Se notează cu $m^* = m_2/m_1$ raportul dintre masa Lunii și cea a Pământului. Vom lua ca unitate de lungime distanța $D = S_1 + S_2 = 1$ dintre corpurile m_1 și m_2, ca unitate de masă se va admite chiar masa Pământului, iar unitatea de timp se alege astfel încît parametrul gravi-

tațional μ al masei m_1 să fie egal cu 1. În sistemul Pământ-Lună unitatea de timp este raportul dintre perioada orbitei Lunii și $2\pi\sqrt{1+m^*}$.

Fie $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, coordonatele punctului de librație L(fig. 2), care coincide cu centrul de oscilație. În acest punct se fixează originea unui alt sistem

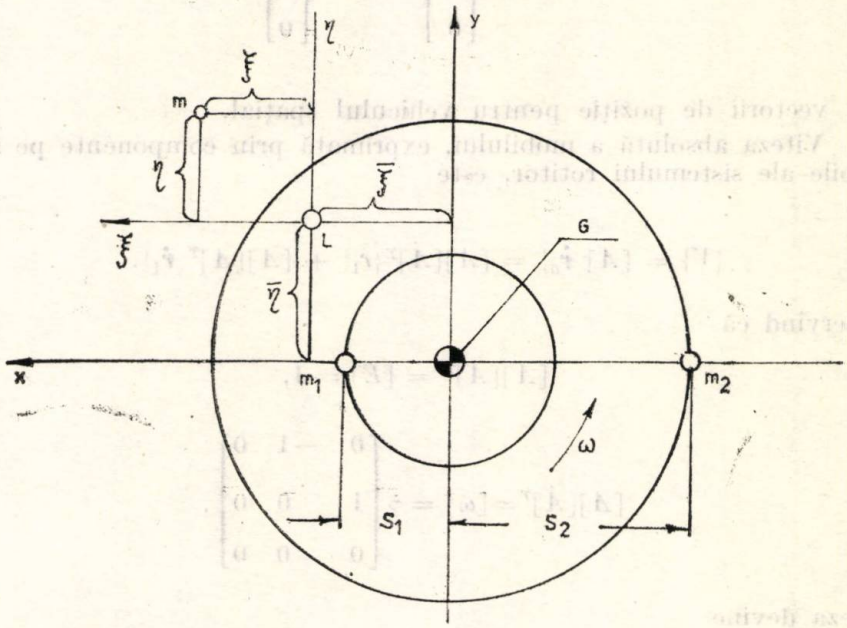


Fig 2

$L\xi\eta$, ale cărui axe vor rămîne în permanență paralele cu axele mobile Gx și Gy. Față de acest sistem mobilul are coordonatele ξ, η și viteza relativă $\vec{V}(V_\xi, V_\eta)$.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Pentru deducerea ecuațiilor de mișcare relativă în raport cu sistemul mobil $L\xi\eta$, se stabilesc expresiile pentru energia potențială și energia cinetică absolută a vehiculului, care se introduc apoi în ecuațiile lui Lagrange.

Notînd cu φ unghiul de rotație a axei Gx în raport cu referențialul inițial, putem scrie

$$\{r_0\} = [A]^T\{r_1\}. \tag{1}$$

unde

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

este matricea de rotație, iar

$$\{r_0\} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{r_1\} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

sînt vectorii de poziție pentru vehiculul spațial.

Viteza absolută a mobilului, exprimată prin componente pe axele mobile ale sistemului rotitor, este

$$\{V\} = [A]\dot{\{r_0\}} = [A][\dot{A}]^T\{r_1\} + [A][A]^T\dot{\{r_1\}}. \tag{4}$$

Observînd că

$$[A][A]^T = [E] = 1,$$

$$[A][\dot{A}]^T = [\omega] = \dot{\varphi}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

viteza devine

$$\{V\} = \dot{\{r_1\}} + [\omega]\{r_1\}. \tag{6}$$

Să scriem energia cinetică a corpului infinitesimal pe unitatea de masă

$$E_c = \frac{1}{2}\{V\}^T\{V\} = \frac{1}{2}\{\dot{r}_1\}^T\{\dot{r}_1\} + \{\dot{r}_1\}^T[\omega]\{r_1\} + \frac{1}{2}\{r_1\}^T[\omega]^2\{r_1\} =$$

$$= \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\varphi}(x\dot{y} - y\dot{x}) + (x^2 + y^2)\dot{\varphi}^2], \tag{7}$$

și energia potențială

$$E_p = -U(x, y), \tag{8}$$

unde potențialul pe unitatea de masă, în sistemul de unități adoptat, se scrie

$$U = \frac{1}{r} + \frac{m^*}{\rho}. \tag{9}$$

Ținînd seama că $\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}$, $\ddot{\varphi} = 0$, ecuațiile lui Lagrange [7], devin

$$\ddot{x} + 2\dot{\varphi}\dot{y} - x\dot{\varphi}^2 = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\ddot{y} + 2\dot{\varphi}\dot{x} - y\dot{\varphi}^2 = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{10}$$

Ținînd seama de sistemul de unități adoptat, perioada siderală de rotație a corpurilor de mase m_1 și m_2 în jurul baricentrului G este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + m^*}}. \tag{11}$$

Introducînd funcția

$$\Phi = U + \frac{1}{2}(r^2 + m^*\rho^2) = U + \frac{1}{2}\left[\frac{m^*}{1 + m^*} + \omega^2(x^2 + y^2)\right], \tag{12}$$

sistemul (10) devine

$$\ddot{x} - 2\dot{\varphi}\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$\ddot{y} + 2\dot{\varphi}\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{13}$$

Dacă se dezvoltă în serie Taylor derivatele $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ în jurul punctului de coordonate $x = \overline{\xi}$, $y = \overline{\eta}$, ecuațiile diferențiale ale mișcării vehiculului spațial în raport cu sistemul $L\xi\eta$ iau forma normală

$$\dot{\xi} = V_\xi,$$

$$\dot{V}_\xi = 2\dot{\varphi}V_\eta + K_1\xi + K_2\eta + a_\xi, \tag{14}$$

$$\dot{\eta} = V_\eta$$

$$\dot{V}_\eta = -2\dot{\varphi}V_\xi + K_2\eta + K_3\xi + a_\eta,$$

unde a_ξ, a_η sînt componentele accelerației datorită tracțiunii.

În aceste relații constantele K_1, K_2 și K_3 au următoarele valori [4]:

$$K_1 = \frac{3}{4}(1 + m^*);\ K_2 = \frac{9}{4}(1 + m^*);\ K_3 = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - m^*) \tag{15}$$

pentru punctele echidistante de libraţie şi

$$K_1 = 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3},$$

$$K_2 = 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3}, \quad K_3 = 0 \tag{16}$$

pentru punctele coliniare de libraţie.

4. PROBLEMA VARIAŢIONALĂ

În cadrul studiului manevrei optime se remarcă analogia cu problema întîlnirii orbitale. Considerăm, în acest sens, mişcarea de la un punct situat în apropierea punctului de libraţie, unde parametrii mişcării sînt cunoscuţi, spre acelaşi punct de libraţie unde

$$\xi = 0, \ \eta = 0, \ V_\xi = 0, \ V_\eta = 0.$$

În cadrul teoriei liniare, utilizînd ecuaţiile liniare de mişcare [14], problema variaţională a manevrei optime cu minimum de combustibil a vehiculului spaţial, în apropierea punctelor de libraţie, se reduce la a determina minimul funcţionalei

$$J = \int_0^\tau (a_\xi^2 + a_\eta^2)\mathrm{d}t \tag{17}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \dot{\xi} - V_\xi = 0, \\
\Phi_2 &= \dot{V}_\xi - 2\dot{\varphi}V_\eta - K_1\xi - K_3\eta - a_\xi = 0, \\
\Phi_3 &= \dot{\eta} - V_\eta = 0, \\
\Phi_4 &= \dot{V}_\eta + 2\dot{\varphi}V_\xi - K_2\eta - K_3\xi - a_\eta = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Introducînd multiplicatorii lui Lagrange λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 cu care se formează funcţia

$$F = a_\xi^2 + a_\eta^2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3 + \lambda_4\Phi_4, \tag{19}$$

problema de extremum condiționat se reduce la o problemă de extremum necondiționat, astfel încît ecuațiile lui Euler conduc la următoarele ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -K_1\lambda_2 - K_3\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 + 2\dot{\varphi}\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_3 &= -K_3\lambda_2 - K_2\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_4 &= -\lambda_3 - 2\dot{\varphi}\lambda_2, \end{aligned} \tag{20}$$

și la ecuațiile algebrice

$$a_\xi = \frac{\lambda_2}{2}, \quad a_\eta = \frac{\lambda_4}{2}. \tag{21}$$

Ecuațiile diferențiale (14) și (20) reprezintă sistemul de ecuații diferențiale ale extremelor, prin integrarea căruia se obțin funcțiile căutate $\xi(t)$, $\eta(t)$, $V_\xi(t)$, $V_\eta(t)$, $a_\xi(t)$, $a_\eta(t)$, care caracterizează manevrele optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor de librație.

În ce privește natura extremumului, deoarece expresia (19) a funcției F este liniară în $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{dV_\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{dV_\eta}{dt}$ și independentă de $\frac{da_\xi}{dt}$, $\frac{da_\eta}{dt}$, condițiile de minimum slab ale lui Lagrange sînt îndeplinite.

5. SOLUȚII APROXIMATIVE ALE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE EXTREMALELOR

Prin neglijarea componentelor accelerației Coriolis, $2\dot{\varphi}V_\xi$ și $2\dot{\varphi}V_\eta$, sistemul de ecuații diferențiale al extremalelor se poate ușor integra, soluțiile avînd expresii foarte simple.

În acord cu lucrările [2], [3], care prevăd posibilitatea unor operațiuni spațiale legate de punctele coliniare de librație, în cele ce urmează vom stabili o soluție analitică aproximativă pentru studiul manevrelor optime în jurul acestor puncte.

Punînd în sistemele (14) și (20) $K_3 = 0$, obținem pentru punctele *coliniare* de librație următorul sistem de ecuații diferențiale exacte al extremalelor:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} = V_\xi; \quad \dot{V}_\xi = 2\dot{\varphi}V_\eta + K_1\xi + a_\xi, \\ &\dot{\eta} = V_\eta; \quad \dot{V}_\eta = -2\dot{\varphi}V_\xi + K_2\eta + a_\eta, \\ &\dot{\lambda}_1 = -K_1\lambda_2; \quad \dot{\lambda}_3 = 2\dot{\varphi}\lambda_4 - \lambda_1, \\ &\dot{\lambda}_2 = -K_2\lambda_4, \quad \dot{\lambda}_4 = -\lambda_3 - 2\dot{\varphi}\lambda_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Sistemul (22) poate fi integrat exact prin metode obișnuite. Soluțiile analitice care se obțin au expresii complicate [7]. Vom neglija, într-o primă aproximație, forțele Coriolis, care tind către zero în punctele de librație, iar în cadrul unităților adoptate în ecuațiile de mișcare vom ține seama că $K_1 > 0$ și $K_2 < 0$.

Notînd

$$k = \sqrt{K_1}, \quad \varkappa = \sqrt{-K_2}, \tag{23}$$

sistemul de ecuații diferențiale al extremalelor poate fi pus sub forma simplificată

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\xi}} - k^2\bar{\xi} &= \bar{a}_\xi, \\ \ddot{\bar{\eta}} + \varkappa^2\bar{\eta} &= \bar{a}_\eta, \\ \ddot{\bar{\lambda}}_2 - k^2\bar{\lambda}_2 &= 0, \\ \ddot{\bar{\lambda}}_4 + \varkappa^2\bar{\lambda}_4 &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

din care rezultă soluții analitice simple.

Într-adevăr, integrînd ultimele două ecuații (24) și ținînd seama de ecuațiile algebrice (21) obținem

$$\begin{aligned} \bar{a}_\xi &= \frac{1}{2}(\bar{C}_1 \operatorname{ch} kt + \bar{C}_2 \operatorname{sh} kt), \\ \bar{a}_\eta &= \frac{1}{2}(\bar{C}_3 \cos \varkappa t + \bar{C}_4 \sin \varkappa t). \end{aligned} \tag{25}$$

Introducînd soluțiile (25) în primele două ecuații (24) și integrînd obținem

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \left(\bar{C}_5 + \frac{1}{4k}\bar{C}_2 t\right)\operatorname{ch} kt + \left(\bar{C}_6 + \frac{1}{4k}\bar{C}_1 t\right)\operatorname{sh} kt, \\ \bar{\eta} &= \left(\bar{C}_7 - \frac{1}{4\varkappa}\bar{C}_4 t\right)\cos \varkappa t + \left(\bar{C}_8 + \frac{1}{4\varkappa}\bar{C}_3 t\right)\sin \varkappa t, \end{aligned} \tag{26}$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} V_\xi &= \left(\bar{C}_6 k + \frac{1}{4k}\bar{C}_2 + \frac{1}{4}\bar{C}_1 t\right)\operatorname{ch} kt + \left(\bar{C}_5 k + \frac{1}{4k}\bar{C}_1 + \frac{1}{4}\bar{C}_2 t\right)\operatorname{sh} kt, \\ \bar{V}_\eta &= \left(\bar{C}_8 \varkappa - \frac{1}{4\varkappa}\bar{C}_4 + \frac{1}{4}\bar{C}_3 t\right)\cos \varkappa t + \left(-\bar{C}_7 \varkappa + \frac{1}{4}\bar{C}_3 + \frac{1}{4}C_4 t\right)\sin \varkappa t. \end{aligned} \tag{27}$$

Funcțiile căutate $\bar{\xi}(t)$, $\bar{\eta}(t)$, ..., $\bar{a}_{\eta}(t)$, care caracterizează manevrele optime în jurul punctelor coliniare de libraţie, conţin 8 constante de integrare $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, ..., $\bar{C}_8$.

Pentru coborîrea de pe orbite în punctele de libraţie sau atingerea acestora venind din regiuni învecinate, problema devine similară cu cea a întîlnirii orbitale [5], [8], [9].

Din condiţiile iniţiale ($t = 0$)

$$\xi(0) = \xi_0\,;\; V_\xi(0) = V_{\xi_0},$$
$$\eta(0) = \eta_0\,;\; V_\eta(0) = V_{\eta_0} \tag{28}$$

şi din condiţiile finale ($t = \tau$)

$$\xi(\tau) = 0\,;\; V_\xi(\tau) = 0,$$
$$\eta(\tau) = 0\,;\; V_\eta(\tau) = 0, \tag{29}$$

rezultă pentru constantele $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, ..., $\bar{C}_8$ următoarele expresii:

$$\bar{C}_1 = \frac{4k}{k^2\tau^2 - \operatorname{sh}^2 k\tau}\,[k\xi_0 \operatorname{sh}^2 k\tau - V_{\xi_0}(k\tau - \operatorname{sh} k\tau \operatorname{ch} k\tau)],$$

$$\bar{C}_2 = -\frac{4k}{k^2\tau^2 - \operatorname{sh}^2 k\tau}\,[k\xi_0(k\tau + \operatorname{sh} k\tau \operatorname{ch} k\tau) + V_{\xi_0} \operatorname{sh}^2 k\tau],$$

$$\bar{C}_3 = -\frac{4\varkappa}{\varkappa^2\tau^2 - \sin^2 \varkappa\tau}\,[\varkappa\eta_0 \sin^2 \varkappa\tau - V_{\eta_0}(\varkappa\tau - \sin \varkappa\tau \cos \varkappa\tau)],$$

$$\bar{C}_4 = \frac{4\varkappa}{\varkappa^2\tau^2 - \sin^2 \varkappa\tau}\,[\varkappa\eta_0(\varkappa\tau + \sin \varkappa\tau \cos \varkappa\tau) + V_{\eta_0} \sin^2 \varkappa\tau], \tag{30}$$

$$\bar{C}_5 = \xi_0,$$

$$\bar{C}_6 = \frac{1}{k^2\tau^2 - \operatorname{sh}^2 k\tau}\,[\xi_0(k\tau + \operatorname{sh} k\tau \operatorname{ch} k\tau) + V_{\xi_0} k\tau^2],$$

$$\bar{C}_7 = \eta_0,$$

$$\bar{C}_8 = \frac{1}{\varkappa^2\tau^2 - \sin^2 \varkappa\tau}\,[\eta(\varkappa\tau + \sin \varkappa\tau \cos \varkappa\tau) + V_{\eta_0} \varkappa\tau^2].$$

6. INFLUENȚA FORȚELOR CORIOLIS ÎN SOLUȚIILE ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE EXTREMALELOR

Să reluăm sistemul de ecuații diferențiale (24)

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\lambda}}_2 - k^2\bar{\lambda}^2 &= 0, \\ \ddot{\bar{\lambda}}_4 + \varkappa^2\bar{\lambda}_4 &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

cu soluțiile

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 &= C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt, \\ \bar{\lambda}_4 &= C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t. \end{aligned} \tag{32}$$

Pentru a lua în considerație și influența forțelor Coriolis vom reveni la sistemul exact de ecuații diferențiale (22) și vom calcula parametrii

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\dot{\varphi}\bar{\lambda}_4 - \dot{\bar{\lambda}}_2 = 2\dot{\varphi}(C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t) - k(C_1 \operatorname{sh} kt - C_2 \operatorname{ch} kt), \\ \lambda_3 &= -2\dot{\varphi}\bar{\lambda}_2 - \dot{\bar{\lambda}}_4 = -2\dot{\varphi}(C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt) + \varkappa(C_3 \sin \varkappa t - C_4 \cos \varkappa t). \end{aligned} \tag{33}$$

Acum se pot recalcula și parametrii λ_2, λ_4 în funcție de viteza unghiulară $\dot{\varphi} = \omega$:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\frac{\dot{\lambda}_1}{K_1} = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt + \frac{2\omega\varkappa}{k^2}(C_3 \sin \varkappa t - C_4 \cos \varkappa t), \\ \lambda_4 &= -\frac{\dot{\lambda}_3}{K_2} = C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t - \frac{2\omega k}{\varkappa^2}(C_1 \operatorname{sh} kt + C_2 \operatorname{ch} kt). \end{aligned} \tag{34}$$

Ținînd seama de ecuațiile algebrice (21), componentele tracțiunii pe unitatea de masă a vehiculului vor fi

$$\begin{aligned} a_\xi &= \frac{1}{2}(C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt) + \frac{\omega\varkappa}{k^2}(C_3 \sin \varkappa t - C_4 \cos \varkappa t), \\ a_\eta &= \frac{1}{2}(C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t) - \frac{\omega k}{\varkappa^2}(C_1 \operatorname{sh} kt + C_2 \operatorname{ch} kt). \end{aligned} \tag{35}$$

Introducînd aceste rezultate în ecuațiile diferențiale neomogene,

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - k^2\xi &= a_\xi, \\ \ddot{\eta} + \varkappa^2\eta &= a_\eta, \end{aligned} \tag{36}$$

obținute din (22) și integrînd, obținem ecuațiile de mișcare

$$\xi = \left(C_5 + \frac{1}{4k} C_2 t\right) \operatorname{ch} kt + \left(C_6 + \frac{1}{4k} C_1 t\right) \operatorname{sh} kt + \\ + \frac{\omega \varkappa}{k^2(k^2 + \varkappa^2)} (C_1 \cos \varkappa t - C_3 \sin \varkappa t),$$

$$\eta = \left(C_7 - \frac{1}{4\varkappa} C_4 t\right) \cos \varkappa t + \left(C_8 + \frac{1}{4\varkappa} C_3 t\right) \sin \varkappa t - \\ - \frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2 + k^2)} (C_2 \operatorname{ch} kt + C_1 \operatorname{sh} kt). \tag{37}$$

Pornind de aici, se determină componentele vitezei vehiculului spațial

$$V_\xi = \left(C_6 k + \frac{1}{4k} C_2 + \frac{1}{4} C_1 t\right) \operatorname{ch} kt + \left(C_5 k + \frac{1}{4k} C_1 + \frac{1}{4} C_2 t\right) \operatorname{sh} kt - \\ - \frac{\omega^2 \varkappa}{k^2(k^2 + \varkappa^2)} (C_3 \cos \varkappa t + C_4 \sin \varkappa t),$$

$$V_\eta = \left(C_8 \varkappa - \frac{1}{4\varkappa} C_4 + \frac{1}{4} C_3 t\right) \cos \varkappa t + \left(-C_7 + \frac{1}{4\varkappa} C_3 + \frac{1}{4} C_4 t\right) \sin \varkappa t - \\ - \frac{\omega^2 k}{\varkappa^2(\varkappa^2 + k^2)} (C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt). \tag{38}$$

Din condițiile inițiale (28) și finale (29) ale mișcării vehiculului spațial se obține sistemul algebric matriceal al constantelor de integrare

$$[R]\{C\} = \{L\}, \tag{39}$$

în care elementele matricelor

$$[R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix}, \quad \{L\} = \{l_1 l_2 l_3 l_4\}^T \tag{40}$$

au expresiile

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}\,\tau\,\mathrm{sh}\,k\tau,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4k}(\mathrm{sh}\,k\tau - k\tau\,\mathrm{ch}\,k\tau),$$

$$\alpha_3 = \frac{\omega\varkappa}{k^2(k^2+\varkappa^2)}(k\sin\varkappa\tau - \varkappa\,\mathrm{sh}\,k\tau),$$

$$\alpha_4 = \frac{\omega\varkappa}{k(k^2+\varkappa^2)}(\mathrm{ch}\,k\tau - \cos\varkappa\tau),$$

$$\beta_1 = \frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)}(\varkappa\,\mathrm{sh}\,k\tau - k\sin\varkappa\tau),$$

$$\beta_2 = \frac{\omega k}{\varkappa(\varkappa^2+k^2)}(\mathrm{ch}\,k\tau - \cos\varkappa\tau),$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{4}\,\tau\sin\varkappa\tau,$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4\varkappa}(\varkappa\tau\cos\varkappa\tau - \sin\varkappa\tau),$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4k}(\mathrm{sh}\,k\tau + k\tau\,\mathrm{ch}\,k\tau),$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}\,\tau\,\mathrm{sh}\,k\tau,$$

$$\gamma_3 = \frac{\omega\varkappa^2}{k^2(k^2+\varkappa^2)}(\cos\varkappa\tau - \mathrm{ch}\,k\tau),$$

$$\gamma_4 = \frac{\omega\varkappa^2}{k^2(k^2+\varkappa^2)}(\varkappa\sin\varkappa\tau + k\,\mathrm{sh}\,k\tau),$$

$$\delta_1 = \frac{\omega k^2}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)}(\cos\varkappa\tau - \mathrm{ch}\,k\tau),$$

$$\delta_2 = -\frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)}(\varkappa\sin\varkappa\tau + k\,\mathrm{sh}\,k\tau),$$

$$\delta_3 = \frac{1}{4\varkappa}(\sin \varkappa\tau + \varkappa\tau \cos \varkappa\tau),$$

$$\delta_4 = \frac{1}{4}\tau \sin \varkappa\tau,$$

$$l_1 = \xi_0 k \operatorname{ch} k\tau + V_{\xi_0} \operatorname{sh} k\tau,$$

$$l_2 = \eta_0 \varkappa \cos \varkappa\tau + V_{\eta_0} \sin \varkappa\tau,$$

$$l_3 = \xi_0 k \operatorname{sh} k\tau + V_{\xi_0} \operatorname{ch} k\tau,$$

$$l_4 = \eta_0 \varkappa \sin \varkappa\tau - V_{\eta_0} \cos \varkappa\tau. \tag{41}$$

Soluțiile sistemului (39) sînt date de relația matriceală

$$\{C\} = [R]^{-1}\{L\} \quad \det [R] \neq 0, \tag{42}$$

de unde rezultă componentele C_1, C_2, C_3, C_4 ale matricei

$$\{C\} = \{C_1 \; C_2 \; C_3 \; C_4\}^T. \tag{43}$$

Celelalte constante C_5, C_6, C_7 și C_8 se obțin din aceleași condiții la limită (28), (29); rezultă

$$C_5 = \xi_0 - \frac{\omega\varkappa}{k^2(k^2+\varkappa^2)} C_4,$$

$$C_6 = \frac{V_{\xi_0}}{k} - \frac{1}{4k^2} C_2 + \frac{\omega\varkappa^2}{k^3(k^2+\varkappa^2)} C_3, \tag{44}$$

$$C_7 = \eta_0 + \frac{\omega k}{\varkappa^2(\varkappa^2+k^2)} C_2,$$

$$C_8 = \frac{V_{\eta_0}}{\varkappa} + \frac{1}{4\varkappa^2} C_4 + \frac{\omega k^2}{\varkappa^3(\varkappa^2+k^2)} C_1.$$

7. CONCLUZII

Cu ajutorul soluțiilor (35), (37), (38) de mai sus se pot efectua aplicații numerice privind manevrele optime de apropiere și atingere a punctului de librație L_2 din sistemul Pămînt-Lună.

Calculele preliminare numerice [1], [7] arată că în jurul punctelor de librație sînt posibile manevre orbitale ale vehiculelor spațiale prevăzute cu instalații de propulsie de mică tracțiune.

Studiile efecuate [14], arată că influența componentelor accelerației Coriolis este importantă.

În ceea ce privește punctele echidistante de librație, aplicațiile numerice făcute pentru punctul L_2 arată, pentru date inițiale comparabile, că accelerația datorată tracțiunii, durata manevrelor și distanța parcursă capătă valori mari. Pentru coborîri de pe orbite sau zboruri dinspre regiuni învecinate, de la distanțe comparabile cu semiaxa mare a orbitelor, pentru durate ale manevrelor $\tau \geqslant 10^5$ s, accelerația adimensională datorată tracțiunii se înscrie în domeniul $10^{-4}\,g - 10^{-6}\,g$, care este comparabilă cu performanțele actuale ale instalațiilor de propulsie de mică tracțiune.

Autorii exprimă gratitudinea lor col. dr. ing. Marinescu Dionisie pentru ajutorul acordat în fundamentarea cercetării întreprinse în această lucrare și aduc un omagiu personalității și activității sale privind aplicațiile Astronomiei și ale determinărilor prin satelit în Geodezie.

Primit în redacție la 26 septembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Low-thrust manoeuvres near the libration points*, Journal of Guidance and Control, **2**, 1—2 (1970).
2. T. N. EDELBAUM, *Libration point rendez-vous*, Rept. 70—12, Analytical Mechanics Associates, Cambridge, 1970.
3. L. A. D'AMARIO, T. N. EDELBAUM, *Minimum impulse three-body trajectories*, AIAA, Journal, **12**, 4 (1974).
4. K. A. EHRICKE, *Space Flight, II. Dynamics*, D. Van Nostrand Company Inc. Princeton, New—York—London, 1962, p. 230—250.
5. AL. MARINESCU, *Optimal low—thrust orbital rendez-vous*, Journal Spacecraft and Rockets, **13**, 4 (1976).
6. ȘT. STAICU, *Introducere în mecanica teoretică*, Edit. Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
7. AL. MARINESCU, D. DUMITRESCU, *Theory of optimal low-thrust menoeuvres near the libration points*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **26**, 3 (1981).
8. AL. MARINESCU, ȘT. STAICU, *Manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite eliptice*, Bulet. Instit. Politehnic București, **35**, 6 (1973).
9. B. H. BILLIK, *Some optimal low acceleration rendez-vous manoeuvres*, AIAA Journal, **2**, 3 (1964).
10. A. F. KONONENKO, *Libration points approach, 18-th International Astronautical Congress*, september 1967.
11. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
12. AL. MARINESCU, *Probleme optimale în dinamica zborului spațial*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1982.
13. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1986.
14. AL. MARINESCU, ȘT. STAICU, *Manevre optime ale vehiculelor spațiale în apropierea punctelor de librație*, Bulet. Instit. Politehnic București, seria Transporturi-Aeronave, **48** (1986).

SUPRAFEȚE NEUTRALE BIFURCATE ÎNTR-O PROBLEMĂ DE INHIBIȚIE A CONVECȚIEI TERMICE DATORITĂ UNUI CÎMP MAGNETIC*)

d. IULIANA OPREA
Institutul Politehnic București

ADELINA GEORGESCU
INCREST, București

În această lucrare se studiază amănunțit teoretic și numeric suprafața neutrală a unei probleme de convecție termică folosindu-se o metodă care ține seama de varietățile de bifurcație implicate. Aceasta permite separarea în spațiul parametrilor, a punctelor neutrale care se află pe suprafața căreia îi corespund soluții multiple ale ecuației caracteristice. Metoda este directă, simplă, și se aplică la ecuații diferențiale ordinare, liniare, de ordin mare, cu coeficienți constanți ce depind de mai mulți parametri fizici.

Problema fizică pe care o studiem este inhibiția convecției termice datorită unui cîmp magnetic exterior de intensitate $Q > 0$, într-un strat orizontal de fluid situat între doi pereți rigizi paraleli $x = \pm 0{,}5$, încălzit de jos, diferența de temperatură dintre pereți corespunzînd unui număr Rayleigh $R > 0$. Notînd cu $a > 0$ numărul de undă al acestei mișcări convective, problema matematică atașată se scrie ca [1]

$$(D^2 - a^2)\{(D^2 - a^2)^2 - QD^2\}W = -a^2RW, \quad x \in (-0{,}5\,;\ 0{,}5) \tag{1}$$

$$W = DW = \{(D^2 - a^2)^2 - QD^2\}W = 0, \text{ la } x = \pm 0{,}5, \tag{2}$$

unde $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$, $W : [-0{,}5\,;\ 0{,}5] \to \mathbb{R}$, $W = W(x)$ este funcția proprie, iar, pentru a și Q dați, R constituie valoarea proprie a problemei (1), (2). Ecuația (1) se deduce ușor din ecuațiile adimensionalizate de mișcare ale MHD în care : mărimile care descriu perturbația sînt alese sub formă de moduri formale $(f(x)\exp\{\mathrm{i}(a_1y + a_2z) - \sigma t\}$, $a^2 = a_1^2 + a_2^2)$; este considerat cazul neutral ($\mathrm{Im}\,\sigma = 0$) și se face ipoteza valabilității principiului schimbului de stabilități ($\mathrm{Re}\,\sigma = 0$). Ecuația (1) rezultă în urma eliminării între ecuații a tuturor amplitudinilor acelor mărimi în afară de amplitudinea W a componentei verticale a vitezei de perturbație. Cerința de anulare la pereți a vitezei și temperaturii de perturbație conduce la (2). x este coordonata în direcție normală la pereți, adimensionalizată cu distanța dintre aceștia. Cea mai mică valoare proprie $R = R_n(a, Q)$ este suprafața neutrală care delimitează zona de stabilitate a stării de conducție de cea de instabilitate a acestei stări, deci de zona în care fluidul are mișcare de convecție. Domeniul de stabilitate este cel de sub suprafața neutrală dacă R este ales drept cotă în sistemul dextrosum de coordonate carteziene (a, Q, R) din spațiul parametrilor. Dacă pe măsură ce Q

*) Cîteva rezultate din acest articol au fost prezentate în ședința din 8 martie 1988 a Seminarului de Mecanica Fluidelor, condus de Acad. Caius Iacob.

crește, deci cîmpul magnetic se intensifică, secțiunea din Q = constant a suprafeței neutrale este o curbă situată mai sus decît cele corespunzătoare unor Q mai mici, înseamnă că acest cîmp magnetic inhibă convecția. Lucrări anterioare au stabilit că, într-adevăr, forma suprafeței neutrale corespunde inhibiției. Pentru determinarea acestui rezultat se pot folosi metode bazate pe dezvoltări în serii Fourier :

a. metoda Galerkin în care funcțiile de dezvoltare satisfac toate condițiile la limită (2) și în care ecuația seculară, care descrie suprafața neutrală, este sub forma unui determinant de ordin infinit egalat cu zero ;

b. metode de tip Budiansky-DiPrima în care funcțiile de dezvoltare satisfac numai unele dintre condițiile (2), restul condițiilor constituind constrîngeri care conduc la o ecuație a suprafeței neutrale sub formă de sumă cu o infinitate de termeni egală cu zero. Calculele cu oricare dintre aceste metode se reduc la jumătate dacă, în condițiile de valabilitate ale unui principiu variațional, în loc de (1), (2) se pornește de la o problemă izoperimetrică corespunzătoare unui operator autoadjunct asociat lui (1), (2). Totuși, cea mai simplă metodă de rezolvare a problemei de valori proprii (1), (2) este cea directă [2] în care soluțiile se caută sub forma $e^{\lambda_i z}$, se găsește ecuația caracteristică

$$(\lambda^2 - a^2)^3 - Q\lambda^2(\lambda^2 - a^2) + a^2R = 0 ; \tag{3}$$

în funcție de multiplicitatea m_i a soluțiilor sale, $\lambda_i = \lambda_i(a, Q, R)$, se scrie forma generală a soluției lui [1] ca $W = \sum_{i=1}^{k} P_{m_i-1}(x)e^{\lambda_i z}$ unde k este numărul rădăcinilor λ_i distincte iar P_{m_i-1} un polinom de grad $m_i - 1$, apoi se introduce această expresie în condițiile (2), rezultînd un sistem de ecuații liniare, algebrice în care necunoscutele sînt coeficienții A_i ai acestor polinoame. Condiția ca să existe soluții nebanale (funcțiile proprii) ale lui (1), (2), revine la condiția de existență a soluției banale $(A_1, \ldots, A_6)$ a acestui sistem de ecuații algebrice, deci de anulare a determinantului lui Cramer atașat, ceea ce constituie ecuația căutată a suprafeței neutrale. Această ecuație se numește, de aceea, ecuație neutrală ; ea este deseori cunoscută sub numele de ecuație seculară. Deoarece multiplicitatea lui λ_i depinde de zona din spațiul parametrilor în care se găsește punctul (a, Q, R) rezultă că și ecuația neutrală are diferite forme în aceste zone. În această privință *există o sursă de eroare în determinarea suprafeței neutrale, eroare rezultată din extensia domeniului în care trebuie determinată ecuația neutrală. Prin aceasta, anumite porțiuni din suprafețele din spațiul parametrilor, corespunzător cărora* λ_i *sînt multiple vor fi considerate ca aparținînd suprafeței neutrale.* Pentru eliminarea falselor porțiuni de suprafață neutrală este necesară descrierea amănunțită a suprafețelor în punctele cărora λ_i sînt multiple. Astfel, mai întîi scriind (3) sub forma

$$\lambda^6 - \lambda^4(3a^2 + Q) + \lambda^2(3a^4 + Qa^2) + a^2(R^2 - a^4) = 0 \tag{3'}$$

avem $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, λ_3, λ_4, λ_5, $\lambda_6 \neq 0$ pentru $R = a^4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ pentru $a = 0$ și $\lambda_1 = \ldots = \lambda_6 = 0$ pentru $a = 0$, $Q = 0$. Deci se impune

studiul suprafeței $C_1 = \{(a, Q, R) \in \mathbb{R}^3 | R = a^4$ pentru $a, Q \geqslant 0\}$. Pe de altă parte, pentru analiza soluțiilor multiple nenule ale lui (3) este utilă înlocuirea $\mu = \lambda^2 - a^2$, astfel că (3) devine

$$\mu^3 - Q\mu^2 - Qa^2\mu + a^2R = 0. \qquad (3)''$$

Această ecuație are rădăcini multiple (și acestea sînt $\mu_1 = \mu_2 = (Q + \sqrt{Q^2 + 3a^2Q})/3$, iar $\mu_3 = (Q - 2\sqrt{Q^2 + 3a^2Q})/3)$)numai pe suprafața $C_2 = \{(a, Q, R) \in \mathbb{R}^3 / R = R^*(a, Q) = (Q + \sqrt{Q^2 + 3a^2Q})^2 (Q - 2\sqrt{Q^2 + 3a^2Q})/(-27a^2)$ pentru $a > 0$, $Q \geqslant 0$ sau oricare $R \geqslant 0$, $Q = 0$ pentru $a = 0\} = \{(a, Q, R) \in \mathbb{R}^3 / -27a^2R = (Q + \sqrt{Q^2 + 3a^2Q})^2(Q - 2\sqrt{Q^2 + 3a^2Q})$ pentru $a, Q, R \geqslant 0\} = C_{21} \cup C_{22} \cup C_{23} \cup O$ unde $C_{21} = \{a, Q, R) \in \mathbb{R}^3 / R = R^*$ pentru $a > 0$, $Q > 0\}$, $O = (0, 0, 0)$ este originea, C_{22} este semiaxa Oa (cu $a > 0$), iar C_{23} — semiaxa OR (cu $R > 0$). N-am putut defini pe C_2 drept mulțimea punctelor (a, Q, R) cu $R = R^*$, $a \geqslant 0$, $Q \geqslant 0$ deoarece funcția R^* este discontinuă în originea $(0, 0)$ a planului (a, Q) iar C_{23} nu poate fi definită ca funcție R de a și Q. C_{23} este o varietate verticală bifurcată în origine din C_{21}. Vom nota cu P punctul curent $(a, a^2, a^4) = (\sqrt{Q}, Q, Q^2)$ al curbei $C_1 \cap C_2$. Ținînd seama că R^* se mai scrie ca $R^* = [9a^2Q^2 + 2Q^3 + 2\sqrt{(Q^2 + 3a^2Q)^3}]/(27a^2)$ se pot descrie secțiunile lui C_2 cu diferite plane. Astfel, în plane $a = \text{const.}$ avem, pentru a, $Q > 0$, $\frac{\partial R^*}{\partial Q} = [18a^2Q + 6Q^2 + 3(2Q + 3a^2)\sqrt{Q^2 + 3a^2Q}]/(27a^2) > 0$, $\frac{\partial R^*}{\partial Q} = 0$ pentru $Q = 0$, $\frac{\partial^2 R^*}{\partial Q^2} = \{18a + 12Q + 6\sqrt{Q^2 + 3a^2Q} + 3(2Q^2 + 3a^2)(Q^2 + 3a^2Q)^{-1/2}\}/(27a^2) > 0$; $R^*(a_1) - R^*(a_2) = 2Q^3(a_2^2 - a_3^2) / (27a_1^2a_2^2) + 2\{Q^6(a_2^4 + a_1^4) + 9Q^3a_1^2a_2^2(a_2^2 - a_1^2) \cdot (Q^2 - 3a_1^2a_2^2)\} \cdot \{a_2^2\sqrt{(Q^2 + 3a_1^2Q)^3} + a_1^2\sqrt{(Q^2 + 3a_2^2Q)^3}\}^{-1} \cdot (27a_1^2a_2^2)^{-1} > 0$ pentru $Q^2 > 3a_1^2a_2^2$ și $a_3 > a_1$ care conduc la graficele din figura 1. În plane $Q = \text{const.}$ găsim $\frac{\partial R^*}{\partial a} = \frac{a^2 - Q}{27a^3}\{6Q\sqrt{Q^2 + 3a^2Q} + 6Q^3/(2Q + \sqrt{Q^2 + 3a^2Q})\}$, deci $\frac{\partial R^*}{\partial a} > 0$ pentru $a^2 > Q$, $\frac{\partial R^*}{\partial a} < 0$ pentru $a^2 < Q$ și $\frac{\partial R^*}{\partial a} = 0$ pentru $Q = a^2$. În plus, pentru Q fixat și $a \to \infty$ R^* are următorul comportament asimptotic:

$$R^* \sim \frac{2Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{3}}\, a + \frac{Q^2}{3} + \frac{1}{a}(\ldots) + \ldots$$

pentru $a \to \infty$. Aceste rezultate sînt în acord cu calculele numerice reprezentate în figura 2. Punctul curent P de pe curba $R = a^4$ are coordotele $(\sqrt{Q}, Q, Q^2)$. În sfîrșit, secțiuni ale suprafeței C_2 cu plane $R^* = \text{const.}$ se obțin scriind ecuația acestei suprafețe sub forma $27a^2R^* = 9a^2Q^2 + 2Q^3 + 2\sqrt{(Q^2 + 3a^2Q)^3}$ și rezolvînd această ecuație în $a^2(a^2 = \{-(Q^4 + 18R^*Q^2 - 27R^{*2}) \pm (9R^* - Q^2)\sqrt{(Q^2 - R^*)(Q^2 - 9R^*)}\}/(8Q^3)$ pentru

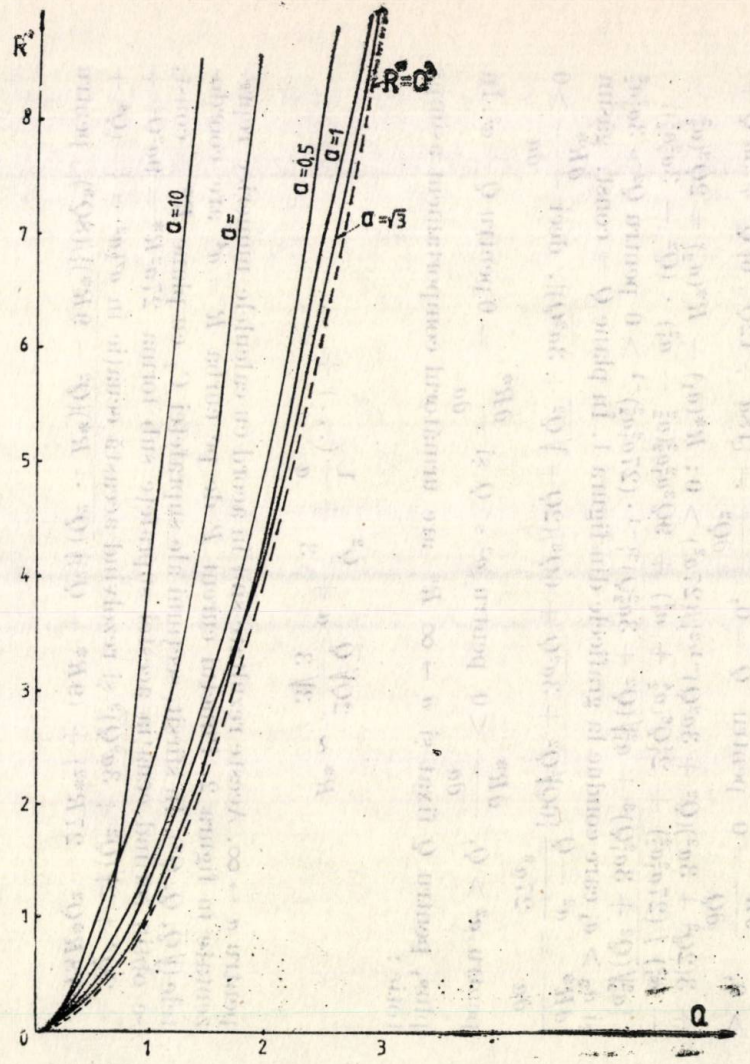

R²
R=Q²
a=10
a=
a=0,5
a=1
a=√3
Q
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 1

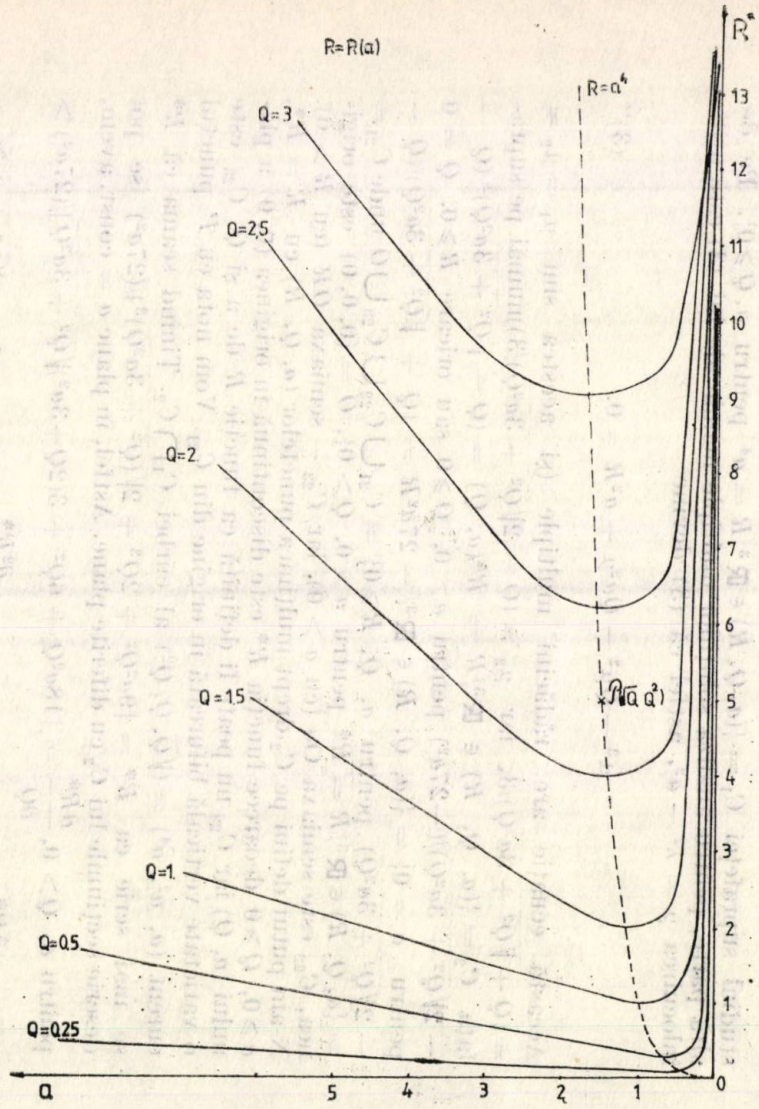

R=R(a)
R=a⁴
R²
Q=3
Q=2,5
Q=2
Q=1,5
Q=1
Q=0,5
Q=0,25
R(a, a²)
a
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Fig. 2

$Q \neq 0$ și $Q^2 \leqslant R^*$ și $a^2 = 0$ pentru $Q = 0$). Fiecare secțiune din aceste plane, una corespunzătoare semnului + și alta – semnului –, este o curbă $a_1 = a_1(Q)$ și, respectiv, $a_2 = a_2(Q)$, unde $\frac{\partial a_1^2}{\partial Q} = \{-(Q^4+18Q^2R^*+81R^{*2}) -$

$$- (27R^* - Q^2)\sqrt{(Q^2-R^*)(Q^2-9R^*)} + 2Q^2(Q^2-5R^*)\sqrt{\frac{9R^*-Q^2}{R^*-Q^2}}\}(8Q^4)^{-1} < 0,$$

$$\frac{\partial a_2^2}{\partial Q} = \frac{1}{8Q^4}\{-(Q^4+18Q^2R^*+81R^{*2}) + (27R^*-Q^2)\sqrt{(Q^2-R^*)}\cdot\sqrt{(Q^2-9R^*)} -$$

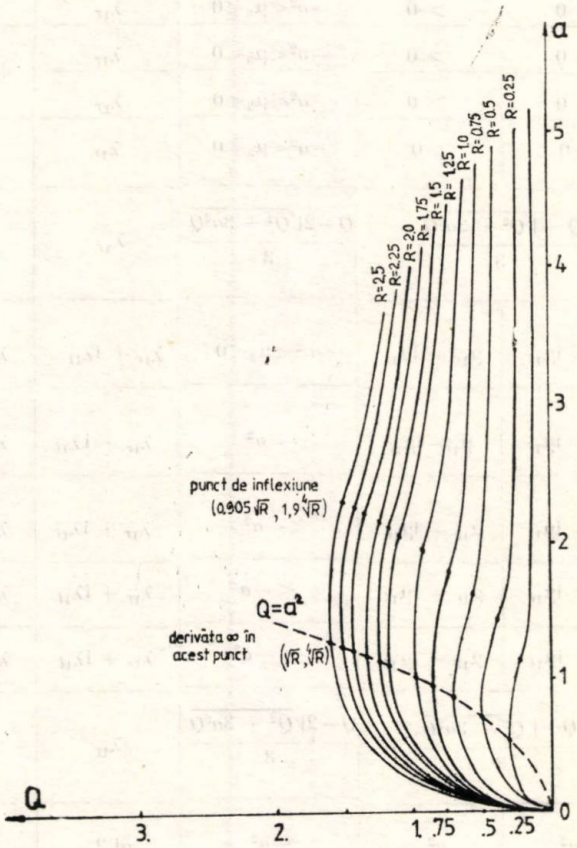


Fig. 3

$$- 2Q^2(Q^2 - 5R^*)\sqrt{\frac{9R^*-Q^2}{R^*-Q^2}}\} > 0,$$ de unde rezultă că pe curba a_2, Q crește de la zero la $\sqrt[4]{R^*}$, valoarea atinsă pentru $a = \sqrt[4]{R^*}$, de la care Q scade la zero pe curba a_1 pentru $a \to \infty$ (fig. 3). O vedere generală a suprafețelor C_1 și C_2 este dată în figura 4.

Zona	μ_1	μ_2	μ_3	λ_1	λ_2	λ_3
I_a	>0	>0	$<-a^2$	λ_{1r}	λ_{2r}	$i\lambda_{3i}$
I_b	>0	>0	$<-a^2$	λ_{1r}	λ_{2r}	$i\lambda_{3i}$
II	$\frac{Q+a^2\pm\sqrt{(Q+3a^2)(Q-a^2)}}{2}$		$-a^2$	λ_{1r}	λ_{2r}	0
III	>0	>0	$-a^2<\mu_3<0$	λ_{1r}	λ_{2r}	λ_{3r}
IV	>0	>0	$-a^2<\mu_3<0$	λ_{1r}	λ_{2r}	λ_{3r}
V_a	>0	>0	$-a^2<\mu_3<0$	λ_{1r}	λ_{2r}	λ_{3r}
V_b	>0	>0	$-a^2<\mu_3<0$	λ_{1r}	λ_{2r}	λ_{3r}
VI	$\frac{Q+\sqrt{Q^2+3a^2Q}}{3}$		$\frac{Q-2\sqrt{Q^2+3a^2Q}}{3}$	λ_{1r}	λ_{1r}	λ_{3r}
VII	$\mu_{1r}+i\mu_{1i}$	$\mu_{1r}-i\mu_{1i}$	$-a^2<\mu_3<0$	$\lambda_{1r}+i\lambda_{1i}$	$\lambda_{1r}-i\lambda_{1i}$	λ_{3r}
VIII	$\mu_{1r}+i\mu_{1i}$	$\mu_{1r}-i\mu_{1i}$	$-a^2$	$\lambda_{1r}+i\lambda_{1i}$	$\lambda_{1r}-i\lambda_{1i}$	0
IX	$\mu_{1r}+i\mu_{1i}$	$\mu_{1r}-i\mu_{1i}$	$<-a^2$	$\lambda_{1r}+i\lambda_{1i}$	$\lambda_{1r}-i\lambda_{1i}$	$i\lambda_{3r}$
X	$\mu_{1r}+i\mu_{1i}$	$\mu_{1r}-i\mu_{1i}$	$<-a^2$	$\lambda_{1r}+i\lambda_{1i}$	$\lambda_{1r}-i\lambda_{1i}$	$i\lambda_{3i}$
XI	$\mu_{1r}+i\mu_{1i}$	$\mu_{1r}-i\mu_{1i}$	$<-a^2$	$\lambda_{1r}+i\lambda_{1i}$	$\lambda_{1r}-i\lambda_{1i}$	$i\lambda_{3i}$
XII	$\frac{Q+\sqrt{Q^2+3a^2Q}}{3}$		$\frac{Q-2\sqrt{Q^2+3a^2Q}}{3}$	λ_{1r}	λ_{1r}	λi_{3i}
Puncte $P(a, a^2, a^4)$	a^2	a^2	$-a^2$	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	0
axa $a>0$	0	0	0	a	a	a
axa $R>0$	0	0	0	0	0	0
originea axelor	0	0	0	0	0	0

λ_4	λ_5	λ_6	R	Semnul sau valoarea lui D	a
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	$-i\lambda_{3i}$	$<R_2^*$	$-$	$<a(R_2^*)$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	$-i\lambda_{3i}$	$<Q^2$	$-$	$<\sqrt[4]{R}$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	0	$a^4(=Q^2)$	$-$	$0<a<\sqrt{Q}$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	$-\lambda_{3r}$	$<a^4$	$-$	$0<a<\sqrt{Q}$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	λ_{3r}	$<R^*$	$-$	$\sqrt{Q}$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	$-\lambda_{3r}$	$<Q^2$	$-$	$>\sqrt{Q}$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	$-\lambda_{3r}$	$<R_1^*$	$-$	$>a(R_1^*)$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{2r}$	$R_1^*(\neq a^4)$	0	$a(R_1^*)$
$-(\lambda_{1r}+i\lambda_{1i})$	$-(\lambda_{1r}-i\lambda_{1i})$	$-\lambda_{2r}$	$R_1^*(a)<R<a^4$	$+$	$\sqrt[4]{R}<a<a(R_1^*)$
$-(\lambda_{1r}+i\lambda_{1i})$	$-(\lambda_{1r}-i\lambda_{1i})$	0	$a^4(=Q^2)$	$+$	$\sqrt{Q}<a=\sqrt[4]{R}$
$-(\lambda_{1r}+i\lambda_{1i})$	$-(\lambda_{1r}-i\lambda_{1i})$	$-i\lambda_{3i}$	$>a^4$	$+$	$\sqrt{Q}<a<\sqrt[4]{Q}$
$-(\lambda_{1r}+i\lambda_{1i})$	$-(\lambda_{1r}-i\lambda_{1i})$	$-i\lambda_{3i}$	$>Q^2$	$+$	$\sqrt{Q}$
$-(\lambda_{1r}+i\lambda_{1i})$	$-(\lambda_{1r}-i\lambda_{1i})$	$-i\lambda_{3i}$	$>R_2^*>a^4$	$+$	$a(R_2^*)<a<\sqrt{Q}$
$-\lambda_{1r}$	$-\lambda_{1r}$	$-i\lambda_{3i}$	$R_2^*(\neq a^4)$	0	$a(R_2^*)$
$-a\sqrt{2}$	$-a\sqrt{2}$	0	$Q^2(=a^4)$	0	$\sqrt{Q}$
$-a$	$-a$	$-a$	0	0	>0
0	0	0	>0	0	0
0	0	0	0		

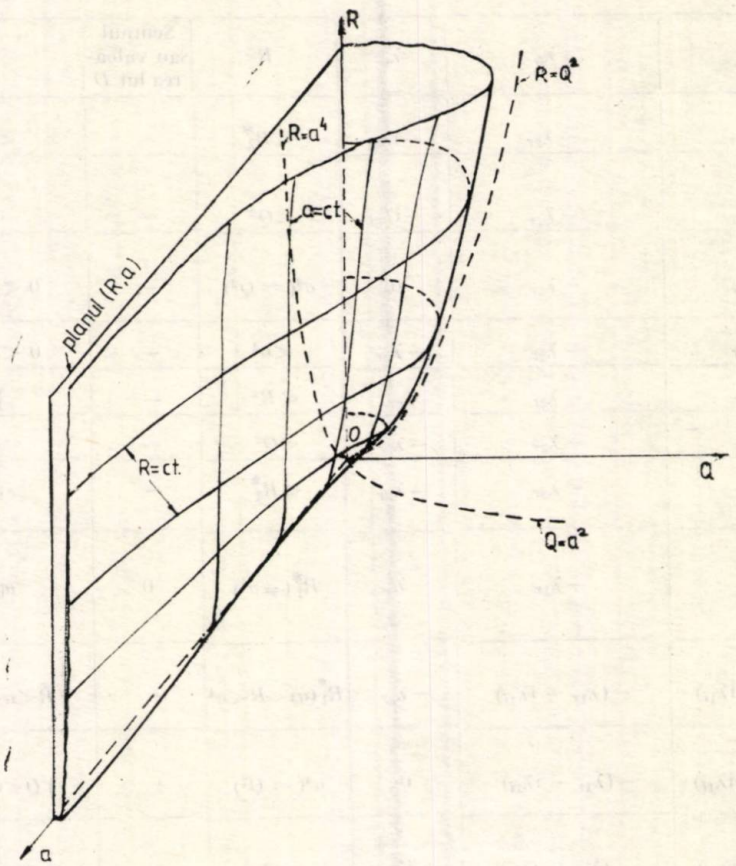


Fig. 4

Aplicînd formulele lui Cardan, în cazul general soluţiile lui (3)'' sînt

$$\mu_1 = \frac{Q}{3} + \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad \mu_2 = \frac{Q}{3} - \frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{i\sqrt{3}(P_1 - P_2)}{2},$$

$$\mu_3 = \frac{Q}{3} - \frac{P_1 + P_2}{2} + \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(P_1 - P_2), \text{ unde } P_{1,2} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{a^2}{2}\left[R - R^* + \frac{2(\sqrt{Q^2+3a^2Q})^3}{27a^2}\right] \pm \frac{a^2}{2}\sqrt{(R-R^*)\left(R + R^* - \frac{2(9a^2Q^2+2Q^3)}{27a^2}\right)}}$$

putîndu-se uşor obţine formule explicite pentru soluţiile ecuaţiei caracteristice (3) ţinînd seama că $\lambda_{1,4} = \pm\sqrt{\mu_1^2 + a^2}$, $\lambda_{2,5} = \pm\sqrt{\mu_2^2 + a^2}$,

$\lambda_{3,6} = \pm\sqrt{\mu_3^2 + a^2}$. Chiar dacă nu s-ar fi dispus de aceste expresii explicite, utilizarea relațiilor lui Viète ar fi permis analiza naturii soluțiilor λ_i în diferite zone ale primului octant al lui $\mathbb{R}^3$, separate de diferitele componente ale suprafețelor C_1 și C_2. Rezultatele acestei analize sînt prezentate în tabelul anterior, în care indicele r desemnează partea reală, iar i — pe cea imaginară. Cu D am notat discriminantul ecuației (3)″.

Interpretarea geometrică a acestor rezultate privește în primul rînd poziția relativă unele față de altele a foilor $\lambda_i = \lambda_i(a, Q, R)$ ale hipersuprafeței Λ din spațiul 5 — dimensional ($\mathcal{R}_e\,\lambda$, $\mathcal{J}_m\,\lambda$, a, Q, R), descrisă de ecuația caracteristică (3), și, în particular, lipirea lor în funcție de poziția punctului (a, Q, R) față de suprafețele C_1 și C_2, deci de zona I, II ... sau XVI din figura 5. Λ poate avea 6, 5, 4, 3, 2, sau o singură foaie. În funcție de această situație soluția generală a lui (1) capătă diferite expresii, modificîndu-se corespunzător și ecuația neutrală. De aceea, mai departe, deducem această ecuație în fiecare din zonele în care Λ are un anumit număr de foi. Deoarece punctele de pe C_1 și C_2 sînt puncte de bifurcație pentru Λ suprafețele C_1 și C_2 din spațiul parametrilor se vor numi suprafețe de bifurcație, această caracterizare fiind atribuită de asemenea oricăror varietăți ale acestor suprafețe. Mai adăugăm că, deși în discuția concretizată în tabel ne-am bazat în principal pe multiplicitatea soluțiilor lui (3)″ și deci pe geometria hipersuprafeței corespunzătoare M din spațiul 5 — dimensional ($\mathcal{R}_e\,\mu$, $\mathcal{J}_m\,\mu$, a, Q, R) există lipiri adiționale ale componentelor lui Λ față de cele ale lui M, corespunzătoare cazului cînd unul dintre μ_i ia valoarea $-a^2$. Acestea corespund punctelor de pe $C_1 \setminus C_2$ din spațiul parametrilor, proiecția lui M în spațiul parametrilor fiind suprafața C_2 pe cînd a lui Λ — suprafața $C_1 \cup C_2$.

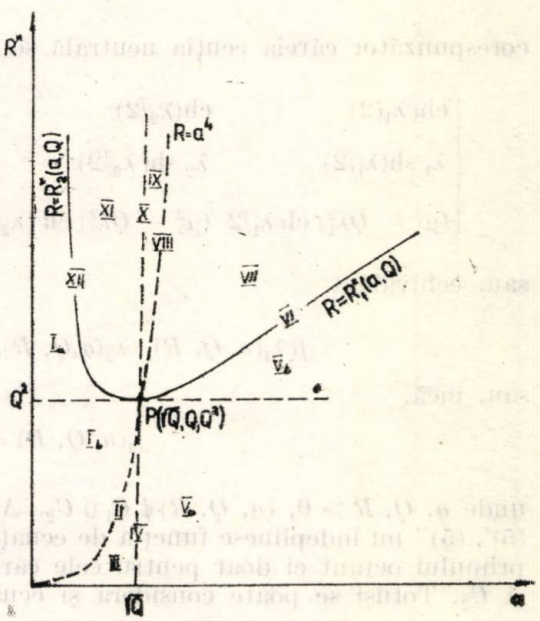


Fig. 5

Vom deduce, în cele ce urmează, ecuația neutrală pentru fiecare tip de multiplicitate a soluției ecuației (3) scriind de fiecare dată forma generală corespunzătoare a soluției ecuației (1).

Λ *are 6 foi distincte* și deci (3) are 6 rădăcini distincte cînd $(a, Q, R) \notin C_1 \cup C_2$ astfel că soluția generală a lui (1) are forma

$$W(x) = \sum_{i=1}^{3} (A_i \operatorname{ch} \lambda_i x + B_i \operatorname{sh} \lambda_i x). \qquad (4)$$

Părțile pară și impară ale acestei soluții constituie de asemenea soluții ale problemei (1), (2). Deoarece pentru valori particulare ale parametrilor a, Q, și R s-a găsit că limitele de stabilitate neutrală calculate folosind soluția pară sînt mai joase și deci sînt fizic mai potrivite, vom considera doar soluția pară

$$W_p(x) = \sum_{i=1}^{3} A_i \operatorname{ch} \lambda_i x \tag{4'}$$

corespunzător căreia ecuția neutrală se scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\lambda_1(2) & \operatorname{ch}(\lambda_2/2) & \operatorname{ch}(\lambda_3/2) \\ \lambda_1 \operatorname{sh}(\lambda_1/2) & \lambda_2 \operatorname{sh}(\lambda_2/2) & \lambda_3 \operatorname{sh}(\lambda_3/2) \\ (\mu_1^2 - Q\lambda_1^2) \operatorname{ch} \lambda_1/2 & (\mu_2^2 - Q\lambda_2^2) \operatorname{ch}(\lambda_2/2) & (\mu_3^2 - Q\lambda_3^2) \operatorname{ch} \lambda_3/2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

sau, echivalent

$$f(\lambda_1(a, Q, R),\ \lambda_2(a, Q, R),\ \lambda_3(a, Q, R)) = 0 \tag{5'}$$

sau, încă,

$$f_1(a, Q, R) = 0, \tag{5''}$$

unde $a, Q, R > 0$, $(a, Q, R) \notin C_1 \cup C_2$. Accentuăm faptul că ecuațiile (5), (5)', (5)'' nu îndeplinesc funcția de ecuație neutrală pentru orice punct al primului octant ci doar pentru cele care nu se găsesc pe suprafețele C_1 și C_2. Totuși se poate considera și ecuația

$$f_1(a, Q, R) = 0 \tag{5'''}$$

în care funcția f_1 este definită pe întregul octant $a, Q, R \geqslant 0$, dar nu toate soluțiile lui (5)''' sînt puncte ale suprafeței neutrale. În această observație este importantă specificarea domeniului în care se consideră ecuația, deci definirea ecuației cu ajutorul unei funcții; în absența acestei specificări n-am fi putut distinge între ecuația (5)'' și (5)''' și în consecință n-am fi sesizat deosebirea esențială dintre cazul tratat în [2] față de cel de aici. Faptul că domeniul de definiție al ecuațiilor (5)'' și (5)''' este diferit înlătură falsele porțiuni de suprafață neutrală. Într-adevăr, ecuația (5)''' este verificată de orice punct (a, Q, R) de pe C_2 (căci acolo $\lambda_1 = \lambda_2$) dar în punctele lui C_2 ecuația (5)'' nu este definită. Pentru punctele lui C_2 soluția generală a lui (1) nu va mai fi (4) și în consecință nici ecuația neutrală nu va mai fi (5).

Are *5 foi distincte* pentru puncte (a, Q, R) situate pe C_1 cu $a, Q, R > 0$, $R \neq R^*$ în care caz soluția generală a lui (1) devine

$$W(x) = A_3 + B_3 x + \sum_{i=1,2} (A_i \operatorname{ch} \lambda_i x + B_i \operatorname{sh} \lambda_i x), \tag{6}$$

partea pară a acesteia

$$W_p(x) = A_3 + A_1 \operatorname{ch} \lambda_1 x + A_2 \operatorname{ch} \lambda_2 x \tag{6}'$$

conducînd la ecuația neutrală

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\lambda_1/2) & \operatorname{ch}(\lambda_2/2) & 1 \\ \lambda_1 \operatorname{sh}(\lambda_1/2 & \lambda_2 \operatorname{sh}(\lambda_2/2) & 0 \\ (\mu_1^2 - Q\lambda_1^2)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) & (\mu_2^2 - Q\lambda_2^2)\operatorname{ch}(\lambda_2/2) & a^4 \end{vmatrix} = 0; \tag{7}$$

deoarece, în acest caz, $\mu_{1,2} = \dfrac{Q + a^2 \pm \sqrt{(Q - a^2)(Q + 3a^2)}}{2}$, ecuația (7) se mai scrie sub forma $\operatorname{ch}(\lambda_1/2)\operatorname{ch}(\lambda_2/2)[\lambda_1^3 \operatorname{th}(\lambda_1/2) - \lambda_2^3 \operatorname{th}(\lambda_2/2)] = 0$. Cum $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ iar funcția $\lambda^3 \operatorname{th}(\lambda/2)$ este strict crescătoare și deci injectivă, rezultă că această ecuație are numai soluția $\lambda_1 = \lambda_2$ ceea ce este inacceptabil căci în punctele în care (7) era definită aveam $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Înseamnă că nici un punct (a, Q, R) de pe suprafața C_1 cu $a, Q, R > 0$ și $R \neq R^*$ nu aparține suprafeței neutrale, deși orice soluție a lui (7) era și a lui (5)''' cu $\lambda_3 = 0$.

A are 4 foi distincte cînd $(a, Q, R) \in C_2 \setminus C_1$, cu $a, Q, R > 0$ deci cînd (a, Q, R) nu coincide cu punctul $P(\sqrt{Q}, Q, Q^2)$ și nu se găsește pe axele de coordonate Oa și OR. Atunci soluția generală a lui (1) este

$$W(x) = A_1 \operatorname{ch}\lambda_1 x + B_1 \operatorname{sh}\lambda_1 x + A_2 x \operatorname{sh}\lambda_1 x + B_2 x \operatorname{ch}\lambda_1 x + A_3 \operatorname{ch}\lambda_3 x + B_3 \operatorname{sh}\lambda_3 x \tag{8}$$

și are drept parte pară

$$W_p(x) = A_1 \operatorname{ch}\lambda_1 x + A_2 x \operatorname{sh}\lambda_1 x + A_3 \operatorname{ch}_3 \lambda_3 x \tag{8}'$$

ceea ce conduce la ecuația neutrală

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\lambda_1/2) & [\operatorname{sh}(\lambda_1/2)]/2 & \operatorname{ch}(\lambda_3/2) \\ \lambda_1 \operatorname{sh}(\lambda_1/2) & \operatorname{sh}(\lambda_1/2) + (\lambda_1/2)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) & \lambda_3 \operatorname{sh}(\lambda_3/2) \\ (\mu_1^2 - Q\lambda_1^2)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) & (4\lambda_1 \cdot_1 - 2\lambda_1 Q)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) + & (\mu_3^2 - Q\lambda_3^2)\operatorname{ch}(\lambda_3/2) \\ & + [(\mu_1^2 - Q\lambda_1^2)/2]\operatorname{sh}(\lambda_1/2) & \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Această ecuație poate fi dedusă diferențiind (5) în raport cu λ_2 și apoi trecînd la limită $\lambda_2 \to \lambda_1$, căci în același mod se deduce (8)' din (4)'. De asemenea (9) se obține din (5) dacă prima coloană din (5) se scade dintr-a doua, coloana a doua astfel obținută se împarte la $\lambda_2 - \lambda_1$ și apoi se trece la limită pentru $\lambda_2 \to \lambda_1$. Această a doua alternativă arată că trecerea de la (5) la (9) se face prin două operații care nu afectează rădăcinile lui (5), urmate de o trecere la limită. Drept rezultat, în loc să obți-

nem rădăcinile (a, Q, R) ale lui (5), din (9) găsim puncte limită ale mulțimii acestor rădăcini. Cu alte cuvinte, mulțimea rădăcinilor lui (5), mulțime ce constituie suprafața neutrală (5)'' pentru cazul $(a, Q, R) \notin C_1 \cup C_2$ este mărginită de o curbă N_3 de pe suprafața C_2, curbă constituită din puncte (a, Q, R^*) unde (a, Q) sînt soluții ale ecuației (9) scrisă sub forma echivalentă

$$g(a, Q, R^*(a, Q)) = 0, \tag{9}'$$

în care $(a, Q, R^*) \in C_2 \setminus C_1$ iar $a, Q, R^* > 0$. Rezultă, de asemenea, că, deoarece atît C_2 cît și suprafața (5)'' aparțin suprafeței (5)''', curba N_3 este formată din puncte de bifurcație ale lui (5)'''.

Să remarcăm că interpretarea lui (9) drept ecuație a proiecției, în planul (a, Q), a curbei limită a suprafeței neutrale pentru $\lambda_2 \to \lambda_1$ (și deci $R \to R^*$) permite detașarea din suprafața (5)''' a varietății neutrale situate pe suprafața $C_2 \setminus C_1$. Altfel spus, singurele puncte de pe suprafața $C_2 \setminus C_1$ care aparțin suprafeței neutrale sînt cele de pe acea curbă limită.

Menționăm că deoarece A_i și B_i depind de a, Q și R, pentru $\lambda_2 \to \lambda_1$ ordinul de mărime al acestor coeficienți ai soluției generale ca funcție de $(\lambda_2 - \lambda_1)$ se schimbă, o analiză asimptotică a lui (5) permițînd interpretarea lui (9) ca fiind coeficientul lui $(\lambda_2 - \lambda_1)$ din dezvoltarea lui (5) după șirul asimptotic $\lambda_2 - \lambda_1$, $(\lambda_2 - \lambda_1)^2, \ldots$ pentru $\lambda_2 - \lambda_1 \to 0$.

A *are trei foi distincte* doar în puncte $P(a, a^2, a^4)$, $a > 0$, care se mai scriu, echivalent, ca $(\sqrt[4]{Q}, Q, Q^2)$ sau $(\sqrt[4]{R^*}, \sqrt{R^*}, R^*)$ situate la intersecția suprafețelor C_1 și C_2 exceptînd originea (0, 0, 0). În aceste puncte $\lambda_1 = \lambda_2 = a\sqrt{2}$, $\lambda_3 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -a\sqrt{2}$, $\mu_1 = \mu_2 = a^2$, $\mu_3 = -a^2$ unde $Q = a^2 (Q = a^2, a > 0$ reprezentînd ecuația curbei proiecție a curbei alcătuite din puncte P cu $a > 0$ pe planul (a, Q), iar mulțimea punctelor P alcătuind curba de intersecție a suprafețelor C_2 și C_1, deci de bifurcație pentru (5)'''. Corespunzător, soluția generală a lui (1) este

$$W(x) = (A_1 + B_2 x) \operatorname{ch} \lambda_1 x + (B_1 + A_2 x) \operatorname{sh} \lambda_1 x + A_3 + B_3 x \tag{10}$$

și are drept parte pară expresia

$$W_p(x) = A_1 \operatorname{ch}\lambda_1 x + A_2 x \operatorname{sh}\lambda_1 x + A_3, \tag{10}'$$

ceea ce conduce la ecuația neutrală pentru punctele P

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\lambda_1/2) & [\operatorname{sh}(\lambda_1/2)]/2 & 1 \\ \lambda_1 \operatorname{sh}(\lambda_1/2) & \operatorname{sh}(\lambda_1/2) + (\lambda_1/2)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) & 0 \\ (\mu_1^2 - Q\lambda_1^2)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) & (4\lambda_1\mu_1 - 2\lambda_1 Q)\operatorname{ch}(\lambda_1/2) + & a^4 \\ & + [(\mu_1^2 - Q\lambda_1^2)/2]\operatorname{sh}(\lambda_1/2) & \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

sau, echivalent,

$$a^4(3\operatorname{sh}(a\sqrt{2}) + a\sqrt{2}) = 0. \tag{11'}$$

Deoarece această ecuație nu o are nici soluție (căci (11) este definită numai pentru $a > 0$), rezultă că nici un punct P nu aparține suprafeței neutrale.

Formal, (11) se obține din (9) pentru $R \to a^4$ și, corespunzător, $\lambda_3 \to 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \to a\sqrt{2}$ sau, din (5) pentru $R \to a^4$, $Q \to a^2$, $a > 0$.

A *are două foi distincte* pentru toate punctele semiaxei pozitive a a-ilor ($R = 0, Q = 0, a > 0$), puncte ce aparțin lui C_2. În acest caz λ_1 și λ_4 sînt multiple de ordin 3 astfel că soluția generală a lui (1) devine

$$W(x) = (A_1 + B_2x + A_3x^2)\mathrm{ch}\lambda_1 x + (B_1 + A_2x + B_3x^2) \cdot \mathrm{sh}\lambda_1 x \quad (12)$$

a cărei parte pară este

$$W_p(x) = A_1\mathrm{ch}\lambda_1 x + A_2x\mathrm{sh}\lambda_1 x + A_3x^2\mathrm{ch}\lambda_1 x. \quad (12)'$$

Cum (12)' se poate obține diferențiind (8)' de două ori în raport cu λ_3 și luînd apoi limita $\lambda_3 \to \lambda_1$ (și deci $\lambda_1 \to a$, $\mu_1 \to 0$ $Q \to 0$) rezultă că, analog, se poate deduce din (9) ecuația neutrală

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}(a/2) & (1/2)\mathrm{sh}(a/2) & (1/4)\mathrm{ch}(a/2) \\ a\mathrm{sh}(a/2) & \mathrm{sh}(a/2) + (a/2)\mathrm{ch}(a/2) & \mathrm{ch}(a/2) + (a/4)\mathrm{sh}(a/2) \\ 0 & 0 & 8a^2\mathrm{ch}(a/2). \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

sau, echivalent,

$$a^2(\mathrm{sh}a + a) = 0, \; a > 0. \quad (13)'$$

Cum această ecuație n-are nici o soluție nebanală și cum raționamente (similare cu cele care au permis să se arate că curba (9) este curbă limită a suprafeței (5)) duc la concluzia că soluțiile lui (13) sînt puncte limită pentru suprafața neutrală situate pe acea suprafață, rezultă că suprafața neutrală a lui (1), (2) n-are nici un punct pe semiaxa $a > 0$ și deci că nici un punct limită al suprafeței neutrale N a lui (1), (2) situat pe această semiaxă nu aparține acelei suprafețe.

A *are o singură foaie* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_6 = 0$ doar pentru puncte ale lui C_2 situate pe semiaxa $R \geqslant 0 (a = 0, Q = 0)$. În acest caz soluția generală a lui (1) se scrie ca

$$W(x) = A_1 + B_2x + A_3x^2 + B_3x^3 + B_2x^4 + B_1x^5, \quad (14)$$

are partea pară

$$W_p(x) = A_1 + A_3x^2 + B_2x^4 \quad (14)'$$

și conduce la ecuația neutrală

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 0 \text{ pentru } R \geqslant 0, \quad (15)$$

ecuație care nu are nici o soluție. Rezultă că varietatea neutrală a punctelor suprafeței neutrale N situate pe semiaxa $R \geqslant 0$ este vidă și deci N n-are nici un punct pe această semiaxă. Se poate demonstra că (15) rezultă din (5) diferențiind de două ori coloana a doua a lui (5) în raport cu λ_2 și de 4 ori în raport cu λ_3 și trecînd apoi la limită $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \to 0$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \to 0$, $Q \to 0$ și $a \to 0$. Cum aceste diferențieri erau echivalente cu operații ce invariau ecuația (5) rezultă că punctele varietății neutrale date de (15) ar fi fost puncte limită ale lui N pe semiaxa $R \geqslant 0$. Rezultă că toate punctele limită ale lui N situate pe această dreaptă nu aparțin suprafeței neutrale N.

Ținînd seama de toate rezultatele de mai sus rezultă că suprafața neutrală constă din suprafața dată de ecuația (5)'' și din curba N_3 (limită a acestei ultime suprafețe) constînd din puncte (a, Q, R^*), unde (a, Q) sînt puncte ale curbei (9). Curba N_3 este curbă de bifurcație pentru (5)''', din ea bifurcîndu-se suprafața neutrală N și suprafața $C_1 \diagup C_2$. Proiecția lui N_3 în planul (a, Q) este curba $\mathfrak{N}_3$, formată din puncte (a, Q), soluții ale lui (9). Dacă ecuația (9) se consideră în cadranul $a \geqslant 0$, $Q \geqslant 0$, atunci originea $(0, 0)$ și punctele $(a, 0)$ cu $a \geqslant 0$ ale semiaxei Oa sînt soluții ale acestei ecuații extinse la primul cadran. Se poate arăta că (0,0) este punct de bifurcație pentru varietatea definită ca mulțime a soluțiilor lui (9) extinsă la primul cadran (fig. 6).

De aici rezultă următorul procedeu de a determina numeric suprafața neutrală N : se aplică un algoritm de continuare avînd pe $(0, 0)$ drept punct de plecare, determinîndu-se proiecția menționată a lui N_3 pe planul (a, Q). Pentru fiecare punct (a, Q) se determină $R^*(a, Q)$ ceea ce permite găsirea lui N_3. În fiecare secțiune $Q = \text{const}$ pornind din punctul (a, Q, R^*) de pe N_3 pentru urmărirea ramurilor se aplică algoritmul de continuare [3] și se determină curba neutrală tăiată de planul $Q = \text{const}$. în suprafața N.

Determinarea completă a suprafeței neutrale N este condiționată de studiul complet de bifurcație al ecuațiilor (5)'' și (9), studiu ce va face obiectul unei lucrări ulterioare. În figurile 6 prezentăm curbele de soluții (determinate din experimente numerice ale ecuației (9) scrisă sub forma

$$3\lambda_1^2\sqrt{Q}(1 + \operatorname{ch}\lambda_1)^{-1} + (\sqrt{Q} + 4\sqrt{Q + 3a^2})\lambda_1 \operatorname{th}(\lambda_1/2) =$$

$$= (4\sqrt{Q + 3a^2} - 2\sqrt{Q})\lambda_3 \operatorname{th}(\lambda_3/2), \qquad (9)'$$

unde $\lambda_1^2 = \sqrt{Q + 3a^2}(\sqrt{Q} + \sqrt{Q + 3a^2})/3$, $\lambda_3^2 = \sqrt{Q + 3a^2}(\sqrt{Q + 3a^2} - 2\sqrt{Q})/3$. Din (9)' se vede imediat că $0 \leqslant \lambda_3 < \lambda_1$ pentru $Q \leqslant a^2$ și cum funcția $\lambda \operatorname{th}(\lambda/2)$ este crescătoare rezultă că cel de-al doilea termen al membrului stîng este mai mare decît membrul drept deci în regiunea cu $Q \leqslant a^2$ din planul (a, Q) cuprinsă între axa a și parabola $Q = a^2$ ecuația (9)' n-are nici o soluție. În schimb pentru $Q > a^2$ rezultă λ_3 imaginar astfel că $\lambda_3 \operatorname{th} \lambda_3/2 = -|\lambda_3| \operatorname{tg}(|\lambda_3|/2)$ ecuația (9)' avînd în acest caz o infinitate de soluții pentru fiecare Q sau a fixat.

Suportul teoretic al rezultatelor experimentelor numerice amintite va face obiectul unei lucrări ulterioare.

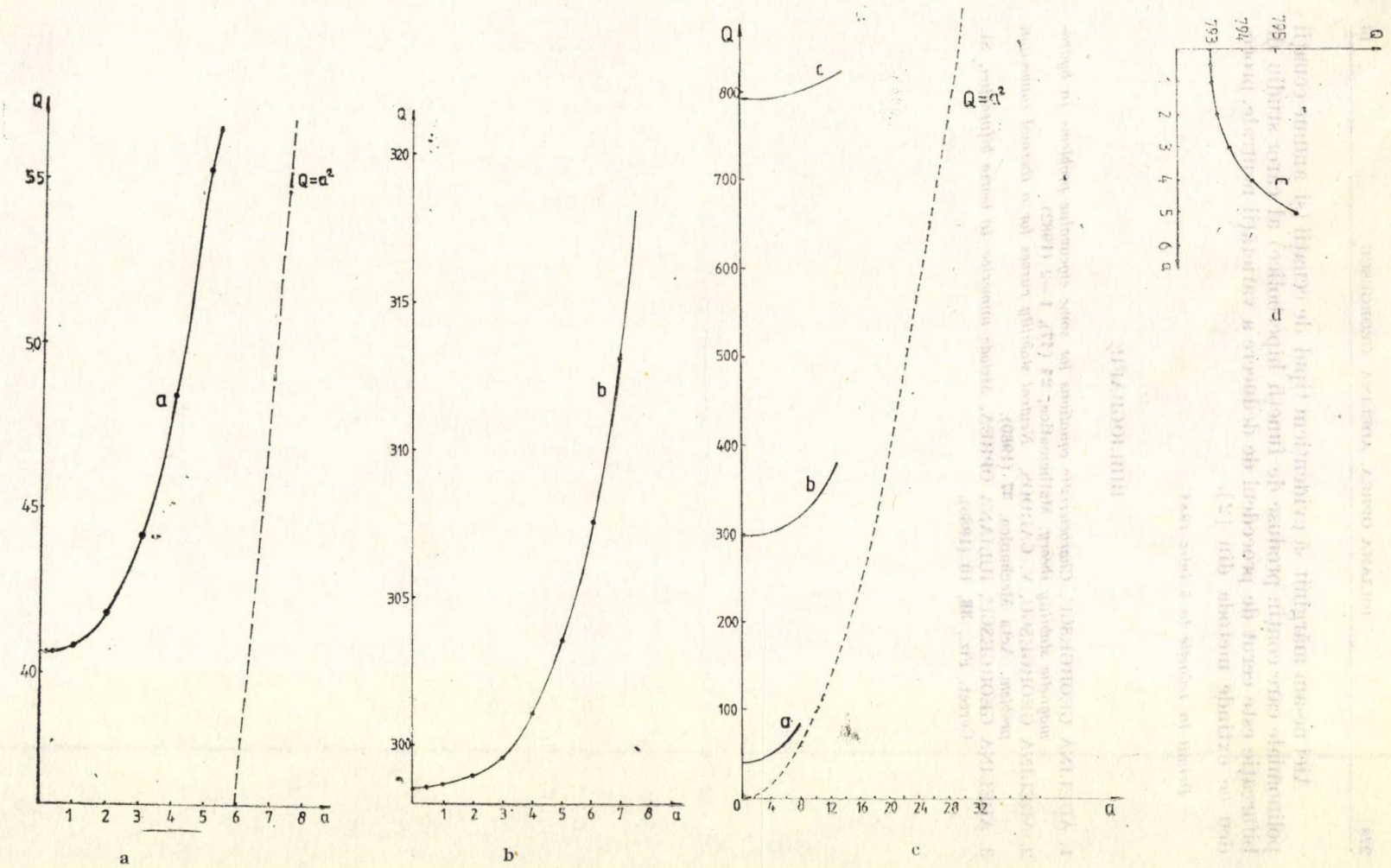

Q
55
50
45
40
Q=a²
a
1 2 3 4 5 6 7 8 a
a
Q
320
315
310
305
300
b
1 2 3 4 5 6 7 8 a
b
Q
800
700
600
500
400
300
200
100
0
c
Q=a²
b
a
4 8 12 16 20 24 28 32 a
c
Q
793
794
795
a
2 3 4 5 6
c
d

Fig. 6

Aici ne-am mărginit să evidenţiem tipul de ecuaţii (şi anume ecuaţii polinomiale care conţin produse de funcţii hiperbolice) al căror studiu de bifurcaţie este cerut de procedeul de deducere a varietăţii neutrale, procedeu ce extinde metoda din [2].

Primit în redacţie la 5 iulie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. ADELINA GEORGESCU, *Characteristic equations for some eigenvalue problems in hydromagnetic stability theory*, Mathematica, **24** (**47**), 1—2 (1982).
2. ADELINA GEORGESCU, V. CARDOŞ, *Neutral stability curves for a thermal convection problem*. Acta Mechanica, **37** (1980).
3. ADELINA GEORGESCU, IULIANA OPREA, *Metode numerice în teoria bifurcaţiei*, St. Cercet. Fiz., **38**, 10 (1986).

ASUPRA ECUAȚIILOR CURBELOR LIMITĂ DE REZISTENȚĂ LA OBOSEALĂ

de S. T. CHIRIACESCU

Universitatea din Brașov

Folosind forma liniarizată armonic a buclei de histerezis $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ obținută pentru o tensiune alternant simetrică, în lucrare este prezentată o procedură pentru stabilirea pe cale teoretică a ecuațiilor curbelor limită de rezistență la oboseală ($R-L$). În funcție de cîteva ipoteze propuse pot fi explicate ecuațiile empirice existente în literatura de specialitate și pot fi obținute alte ecuații generale pentru curbele $R-L$ trasate în planul $\sigma_m - \sigma_a$. Sînt prezentate, de asemenea, două exemple ilustrative.

1. INTRODUCERE

Calculul clasic la oboseală în prezența unei tensiuni de forma

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(\omega t) = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin \psi \tag{1}$$

necesită cunoașterea curbelor limită de rezistență la oboseală ($R - L$) [6], [25] etc. Aceste curbe sînt trasate în sistemele rectangulare de coordonate $\sigma_m - \sigma_a$ (diagrame de tip Haigh), $\sigma_m - \sigma_{max,min}$ (diagrame de tip Smith — Goodman), $\sigma_{min} - \sigma_{max}$ (diagrame de tip Ros), $\sigma_{max} - R$ (diagrame de tip Moore — Kommers — Jaspers) etc. Cu cît este mai precisă descrierea matematică a curbelor $R - L$, cu atît este mai exactă evaluarea indicatorului sintetic de rezistență la oboseală — coeficientul de siguranță la oboseală.

În literatura de specialitate există o serie de ecuații propuse pentru curbele $R - L$. Acestea au, însă, un caracter semiempiric, fiind bazate exclusiv pe aspectul experimental al curbelor $R - L$ obținute în diverse condiții de încercare și pentru diverse materiale.

Așa cum se cunoaște, construirea pe cale experimentală a unei curbe $R - L$ necesită un mare volum de muncă și un consum ridicat de energie. Din acest motiv, de dorit ar fi ca ecuația unei asemenea curbe să poată fi precizată folosind un număr minim de puncte (două sau trei), testarea propriu-zisă la oboseală efectuîndu-se pentru una-două valori ale coeficientului de asimetrie al ciclului (în mod obișnuit $R = -1$ și $R = 0$).

Ținînd seama de o serie de lucrări recente în domeniu, din rîndul cărora monografiile [19], [37] și [38] ocupă un loc aparte, în lucrarea de față sînt evidențiate bazele teoretice care permit scrierea ecuațiilor curbelor $R-L$ atunci cînd este cunoscută caracteristica statică $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ a materialului și rezistența la oboseală a acestuia în cazul $R = -1$ și, eventual, $R = 0$. Prin folosirea unor ipoteze (simplificatoare), sînt obținute o serie de ecuații ale acestor curbe, unele dintre ele coincizînd cu acelea prezentate, fără o justificare teoretică, în literatura de specialitate. Pentru simplificare, în cadrul lucrării este considerat doar cazul solicitării de întindere-compresiune și sînt discutate numai curbele $R-L$ trasate în planul $\sigma_m - \sigma_a$

2. RUPEREA PRIN OBOSEALĂ

Cercetările experimentale efectuate asupra aliajelor metalice arată că dependența tensiunii maxime în funcție de numărul de cicluri de solicitare (curba lui Wöhler) are aspectul general din figura 1 [3], [37]. În zona I ruperea are un caracter cvasistatic și se datorește dezvoltării tensiunilor pînă în apropierea tensiunii plastice limită corespunzătoare încărcării statice a epruvetei (ca în cazul încercării la tracțiune a materialelor). Zonele II și III sînt caracterizate prin apariția și dezvoltarea fisurilor, suprafața de rupere a epruvetei avînd aspectul caracteristic cunoscut [2], [6] etc. În zona II, numită zonă de *oboseală la un număr redus de cicluri* (de solicitare), ruperea este precedată de o modificare vizibilă a formei și dimensiunilor epruvetei, pe cînd în zona III, numită zonă de *oboseală la un număr mare de cicluri*, ruperea se produce fără urme vizibile de deformații remanente.

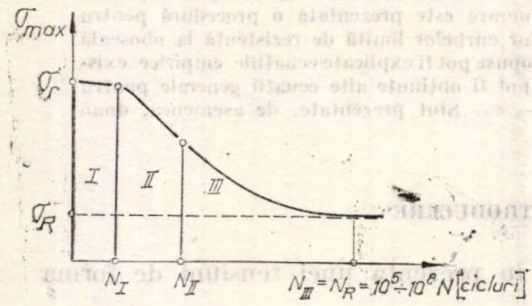


Fig. 1

În funcție de materialul testat, trecerea de la zona I la zona II are loc pentru $N_I = 10^3 \div 10^5$ cicluri și se caracterizează printr-o curgere ciclică, iar trecerea de la II la III are loc pentru $N_{II} = 2 \cdot 10^4 \div 10^5$ cicluri și se caracterizează printr-o curgere dinamică [17].

Ruperea la un număr redus de cicluri apare în cazul unor organe de mașini greu solicitate (așa cum se întîlnesc la nave aero și fluviale, mașini energetice etc.) și/sau cu concentratori puternici de tensiune. În mod obișnuit, însă, ruperea prin oboseală a organelor de mașini executate din aliaje metalice are loc în zona III.

3. DEPENDENȚA $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ ÎN CAZUL $R = -1$

Așa cum se va putea urmări în partea a doua a lucrării, solicitarea alternant simetrică va fi considerată de bază pentru comportarea materialului, indiferent de valoarea lui R. Din acest motiv, în cele ce urmează sînt evidențiate cîteva dintre rezultatele calitative care privesc comportarea aliajelor metalice aflate în prezența unui ciclu alternant simetric de solicitare.

Numeroase cercetări experimentale [19], [37], [38] etc. arată că, după cîteva cicluri alternant simetrice, în zona III (vezi fig. 1) dependența $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ capătă forma unei bucle de histerezis. În zona II, însă, bucla de histerezis se stabilizează numai după un număr însemnat de cicluri. Avînd în vedere aceste constatări și ținînd seama că zona I este neglijabilă în raport cu zonele II și III (vezi fig. 1), *cu o bună aproximație se poate admite că bucla de histerezis apare pentru oricare valoare a lui N.*

Alura generală a buclelor de histerezis (trasate pentru diverse valori ale lui σ_a) poate fi urmărită în figura 2 [38], cauzele fenomenului de histerezis fiind analizate în numeroase lucrări de specialitate [17], [18], [19], [37], [38] etc.

Pentru descrierea matematică a buclelor de histerezis de genul celor din figura 2 au fost propuse diverse ecuații. Astfel, în cazul metalelor și al aliajelor lor, cel puțin pentru zona III de solicitare, ecuațiile de tipul celor din tabelul 1 corespund cel mai bine rezulzatelor experimentale [18], [29]. În acest tabel, n și $\gamma_1 \div \gamma_3$ sînt parametri care depind de natura materialului epruvetei și de condițiile în care au fost efectuate încercările la oboseală. Trebuie menționat că aceste ecuații au un caracter exclusiv empiric.

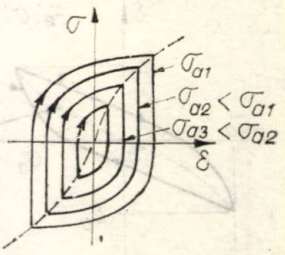


Fig. 2

Tabelul 1

Ecuații propuse	Autori, anul
$\overrightarrow{\sigma} = E\left\{2 \mp \frac{\gamma_1}{n}[(\varepsilon_a \pm \varepsilon^n) - 2^{n-1}\varepsilon_a^n]\right\}$	Davidenkov 1938
$\overrightarrow{\sigma} = E(\varepsilon \mp \gamma_2\varepsilon_a)\sqrt{1 - \varepsilon^2/\varepsilon_a^2}$	Sorokin, 1949
$\overrightarrow{\sigma} = E(\varepsilon \mp \gamma_3\varepsilon_a^n)\sqrt{1 - \varepsilon^2/\varepsilon_a^2}$	Panovko, 1953
$\overrightarrow{\sigma} = E\left[\varepsilon \pm \frac{3}{8}\gamma_4(\varepsilon_a)(\varepsilon_a \mp \varepsilon - \varepsilon^2/\varepsilon_a^2)\right]$	Pisarenko, 1971
$\overrightarrow{\sigma} = E\left[\varepsilon \pm \frac{n+1}{4n}\gamma_4(\varepsilon_a)(\varepsilon_a \mp n\varepsilon - \varepsilon^n/\varepsilon^{n-1})\right]$ $(n = 2k)$	Pisarenko și
$\overrightarrow{\sigma} = E\left[\varepsilon \pm \frac{n+2}{4(n+1)}\gamma_4(\varepsilon_a)(\varepsilon_a \mp (n+1)\varepsilon - \varepsilon^{n+1}/\varepsilon_a^n)\right]$ $(n = 2k+1)$	Boghici, 1981

4. O ECUAȚIE GENERALĂ A DEPENDENȚEI $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ ÎN CAZUL CICLULUI ALTERNANT SIMETRIC

4.1. DEDUCEREA ECUAȚIEI

Pentru descrierea matematică a dependenței dintre *mărimea-cauză*

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t) = \sigma_a \sin \psi \qquad (2)$$

și *mărimea-efect* ε se ține seama că, pentru $\sigma_a = \text{const.}$, în baza figurii 2 poate fi construită curba din figura 3.

Cu notațiile din figura 3, funcția neliniară $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ este precizată de funcțile $F_2(\sigma)$ și $F_2(\sigma)$, care pot fi puse în formele [8]:

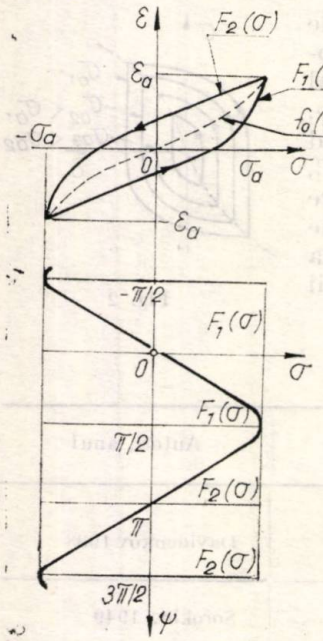


Fig. 3

$$F_1(\sigma) = f_0(\sigma) - f_1(\sigma), \qquad (3)$$
$$F_2(\sigma) = f_0(\sigma) + f_1(\sigma),$$

unde

$$F_1(\sigma) = -F_2(\sigma), \qquad (4)$$
$$f_0(\sigma) = f_0(\sigma).$$

Ținînd seama de (3) și (4), distanța $f_1(\sigma)$ dintre curbele $f_0(\sigma)$ și $F_1(\sigma)$ satisface condiția:

$$f_1(\sigma) = -f_2(-\sigma). \qquad (5)$$

Combinînd ecuațiile (3)÷(5) se obține *o ecuație generală a dependenței* $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$:

$$\varepsilon = f_0(\sigma) - f_1[\sigma \cdot \operatorname{sgn}(p\sigma)], \qquad (6)$$

unde $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Cu o bună aproximație, funcția $f_0(\sigma)$ poate fi aleasă de forma [8]:

$$f_0 = a\sigma - b\sigma^3, \qquad (7)$$

constantele a și b rezultînd din condițiile

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{1}{E}, \quad f_0(\sigma_a) = \varepsilon_a, \qquad (8)$$

în care prin E s-a notat modulul de elasticitate al materialului testat.

Avînd în vedere relațiile (8), ecuația (7) se scrie:

$$f_0 = \frac{1}{E}\left(\sigma - \frac{\sigma_a - E\varepsilon_a}{\sigma_a^3}\,\sigma^3\right). \qquad (9)$$

4.2. LINIARIZAREA ARMONICĂ A ECUAȚIEI $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$

În studiile asupra vibrațiilor structurilor mecanice cu luarea în considerare a frecării interne, dependența $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ este, adesea, liniarizată armonic [18], [29] etc. Ca urmare a proprietății de filtru trece-jos pe care o

au structurile mecanice [7], [30] etc., liniarizarea armonică a neliniarității (6) se dovedește utilă și pentru deducerea ecuațiilor curbelor $R-L$.

Notînd

$$q = q(\sigma_a, \omega) = \frac{1}{\pi \sigma_a} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi,$$

$$q' = q'(\sigma_a, \omega) = \frac{1}{\pi \sigma_a} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi, \tag{10}$$

forma liniarizată armonic a ecuației (6) este:

$$\varepsilon = \left(q + \frac{q'}{\omega} p\right) \sigma. \tag{11}$$

Coeficienții liniarizării armonice (sau funcțiile de descriere) q și q' se obțin ținînd seama de figura 3 și de ecuațiile (3)÷(5). Prin urmare:

$$q = \frac{2}{\pi \sigma_a} \int_0^{\pi/2} [2f_0(\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi) - f_1(\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi) +$$

$$+ f_1(-\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi)] \sin \psi \, d\psi,$$

$$q' = -\frac{2}{\pi \sigma_a} \int_0^{\pi/2} [f_1(\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi) + \tag{12}$$

$$+ f_1(-\sigma_a \sin \psi, \sigma_a \omega \cos \psi)] \cos \psi \, d\psi = -\frac{S}{\pi \sigma_a^2},$$

unde S reprezintă aria buclei de histerezis.

Aplicarea formulelor (12) în cazul particular al ecuației (9) dă [8]:

$$q = \frac{1}{4E\sigma_a} (\sigma_a + 3E\varepsilon_a), \tag{13}$$

ceea ce permite a scrie (11) în forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{4E} (\sigma_a + 3E\varepsilon_a) \sin \psi - \frac{S}{\pi \sigma_a} \cos \psi. \tag{14}$$

În planul $\bar{\sigma} - \varepsilon$, unde $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_a$, ecuația (14) corespunde elipsei [8]:

$$z_1\bar{\sigma}^2 + z_2\varepsilon^2 = b_1^2\sigma_a^2, \tag{15}$$

pentru care axa $0\bar{\sigma}$ face unghiul

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_1}{1 - a_1^2 - b_1^2}, \tag{16}$$

cu sensul pozitiv al axei $0\bar{\sigma}$.

Mărimile z_1 și z_2 care intervin în ecuația (15) reprezintă soluțiile ecuației

$$z^2 - (a_1^2 + b_1^2 + 1)z + b_1^2 = 0, \tag{17}$$

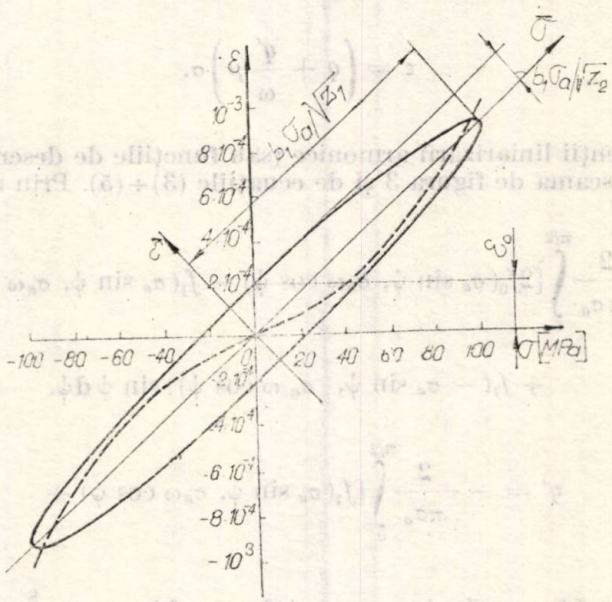


Fig. 4

iar a_1 și b_1 se calculează cu relațiile:

$$a_1 = q\sigma_a = \frac{1}{4E}(\sigma_a + 3E\varepsilon_a),$$

$$b_1 = -q'\sigma_a = \frac{S}{\pi\sigma_a}. \tag{18}$$

Pentru exemplificare, în figura 4 poate fi urmărită poziția relativă a parabolei (9) și a elipsei (15) în cazul: $\varepsilon_a = 10^{-3}$, $\sigma_a = 100$ MPa, $E = 2{,}09 \cdot 10^5$ MPa, $S = 5 \cdot 10^{-2}$ MPa.

4.3. EVALUAREA MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE ELIPSEI DE HISTEREZIS

Forma liniarizată armonic a buclei de histerezis va fi folosită, în cadrul lucrării, pentru deducerea ecuațiilor curbelor $R-L$. Din acest motiv, în cele ce urmează sînt stabilite relațiile pentru calculul: amplitudinii ε_a și defazajului φ al mărimii ε, valorii ε_0 a lui ε la $\sigma = 0$ și energiei specifice corespunzătoare unui ciclu de solicitare W_{sa1}.

Notînd

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{q'}{q}, \tag{19}$$

ecuația (11), în care $\sigma = \sigma_a \sin \psi$, se scrie:

$$\varepsilon = \varepsilon_a \sin(\psi - \varphi), \tag{20}$$

unde

$$\varepsilon_a = \sigma_a \sqrt{q^2 + q'^2}. \tag{21}$$

Pentru $\sigma = 0$, relațiile (2), (19) și (20) permit a calcula așa-numita semideformație specifică neelastică [38]:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_a \sin \varphi = -\frac{\varepsilon_a q'}{\sqrt{q^2 + q'^2}}. \tag{22}$$

Ținînd seama de (2) și (19) — (21), expresia energiei specifice

$$W_{sa1} = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(p\varepsilon)\,\mathrm{d}t,$$

poate fi scrisă:

$$W_{sa1} = \pi \sigma_a \varepsilon_a \sin \varphi = \pi \sigma_a \varepsilon_0 = -\pi \sigma_a^2 q' = S. \tag{23}$$

În cazul particular în care $f_0(\sigma)$ are forma (9), relațiile (3), (13) și (19) dau:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{7E}(3 + 4\sqrt{1 + 7u^2}). \tag{24}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{7u}{4 + 3\sqrt{1 + 7u^2}}, \tag{25}$$

unde

$$u = \frac{ES}{\pi \sigma_a^2}. \tag{26}$$

Figurile 5—7 prezintă variațiile mărimilor ε_a, ε_0 și φ, calculate cu relațiile (22) și (24)—(26), în funcție de σ_a. Curbele sînt trasate pentru două valori ale lui S, în ambele cazuri considerîndu-se $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa.

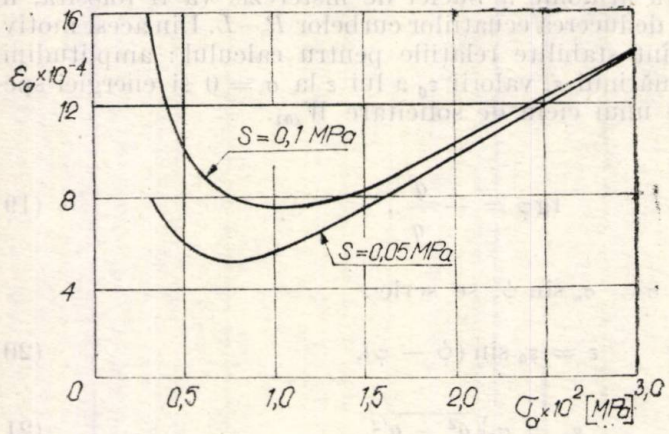


Fig. 5

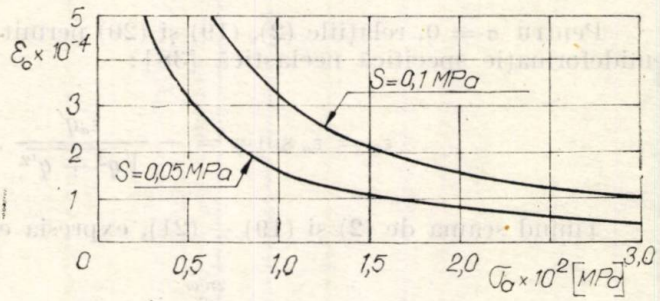


Fig.6

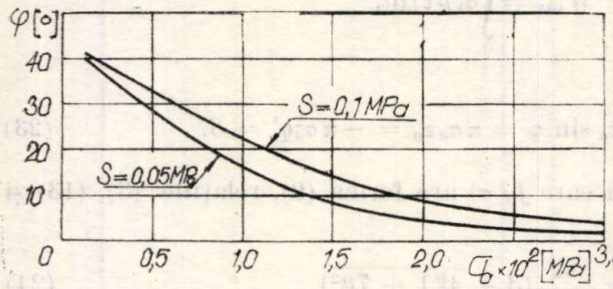


Fig. 7

5. CRITERII PENTRU REZISTENȚA LA OBOSEALĂ

5.1. CRITERII DE DEFORMAȚIE ȘI CRITERII ENERGETICE

Pentru a evalua influența factorilor constructivi, tehnologici și de exploatare asupra deteriorării organelor de mașini aflate în condiții de solicitare ciclică, în diverse lucrări se folosesc o serie de criterii de rezis-

tență la oboseală. Acestea sînt bazate, de regulă, fie pe deformația specifică critică ε_{cr}, fie pe energia specifică critică W_{scr}.

În funcție de natura materialului și/sau destinația organului de mașină, ε_{cr} poate fi deformația specifică la curgere sau la rupere. O parte a acestei deformații, notată cu ε_m, este datorată tensiunii σ_m, iar cealaltă, notată cu ε_a, este cauzată de o tensiune de forma (2). Prin urmare, curba limită de rezistență la oboseală precizată cu ajutorul criteriului deformației specifice reprezintă locul geometric al punctelor pentru care

$$\varepsilon_m + \varepsilon_a = \varepsilon_{cr}. \tag{27}$$

În cazul în care se folosește criteriul energetic relația (27) se înlocuiește prin

$$W_{sm} + W_{sa} = W_{scr}, \tag{28}$$

unde W_{sm} reprezintă energia specifică de deformație datorată tensiuni σ_m, iar W_{sa} este componenta din W_{scr} datorată tensiunii armonice (2).

Precizarea mărimilor ε_m și W_{sm} nu ridică probleme deosebite. În schimb, pentru a evalua mărimile ε_a și W_{sa} este necesar să se țină seama de cercetările efectuate asupra oboselii în condițiile ciclului alternat simetric. Ca avînd legătură cu prezenta lucrare, în cele ce urmează sînt prezentate cîteva dintre rezultatele unor asemenea cercetări.

5.2. CRITERII DE OBOSEALĂ ÎN CAZUL CICLULUI ALTERNANT SIMETRIC

(i) Lucrările care consideră deformația specifică drept criteriu de rezistență la oboseală urmăresc precizarea legii de variație a mărimilor de genul ε_{pl} (deformația plastică pe ciclu), ε_a sau ε_0 în funcție de N. Astfel, deși ecuația Coffin-Manson [11], [21], [32] etc.

$$\varepsilon_{pl} N^{c_1} = k_1, \tag{29}$$

a fost inițial propusă pentru oboseala la un număr redus de cicluri de solicitare, ulterior ea a fost extinsă în mod corespunzător și pentru oboseala la $N > N_{II}$ (vezi fig. 1) [37].

În urma testării unor oțeluri carbon și a unor aliaje de aluminiu, Șneiderovici [34] propune ecuația

$$\varepsilon_a N^{c_2} = k_2, \tag{30}$$

valabilă în domeniul oboselii la un număr redus de cicluri de solicitare. Șestopal [33] dovedește, apoi, că forma ecuației (30) se păstrează și în cazul oboselii la un număr mare de cicluri de solicitare (a oțelurilor aliate și a aliajelor neferoase).

Pe baza unui amplu program de cercetări experimentale întreprins în ultimii ani, Troșcenko [37], [38] arată că pentru oboseala la un număr mare de cicluri de solicitare are loc relația

$$\varepsilon_0 N^{c_3} = k_3. \tag{31}$$

De asemenea, el constată, ca și Șestopal [33], că numărul de cicluri de solicitare la care apare distrugerea epruvetei este independent de modul de solicitare a acesteia (întindere-compresiune, încovoiere sau torsiune).

Așa cum rezultă din monografia [38], ecuația (31) descrie cel mai corect comportarea materialelor tenace (oțeluri aliate sau nu, aliaje neferoase etc.).

În relațiile (29)—(31) c_i și $k_i (i = \overline{1, 3})$ sînt constante care depind de materialul epruvetei testate și de condițiile în care se efectuează încercările.

(ii) Baza multitudinii de criterii energetice folosite pentru a descrie comportarea la oboseală a materialelor o constituie energia specifică corespunzătoare buclei de histerezis.

Numeroși cercetători [12], [13], [22], [27] etc. consideră că distrugerea prin oboseală este datorată acumulării energiei specifice a ciclurilor de histerezis. De exemplu, Halford [13] și Forsyth [38] presupun că ruperea epruvetei apare atunci cînd energia specifică totală

$$\sum_{i=1}^{N_R} W_{sai} = W_{scr} = \text{const.} \tag{32}$$

atinge valoarea critică (care poate fi egală cu lucrul mecanic specific de deformație corespunzător ruperii statice).

Goliței, Chang-Pimbely-Kunway, Ku etc. [27], [32], [38] susțin că ruperea prin oboseală este caracterizată de ecuația

$$\sum_{i=1}^{N_R} (W_{sai} - W_{saR}) = \text{const.}, \tag{33}$$

unde W_{saR} reprezintă energia specifică pe ciclu corespunzătoare tensiunii σ_a egală cu rezistența la oboseala σ_R.

Mai recent, Troșcenko [37], [38] propune înlocuirea relației (33) cu relația

$$\sum_{i=1}^{N_R} \left[W_{sai} - W_{saR} \left(\frac{W_{sai}}{W_{saR}} \right)^{\bar{c}_4} \right] = \text{const.}, \tag{34}$$

în care constanta $\bar{c}_4$ se determină așa cum se arată în lucrarea [38].

6. IPOTEZE FOLOSITE LA STABILIREA ECUAȚIILOR CURBELOR $R-L$

Raționamentele pe care se bazează deducerea ecuațiilor curbelor $R-L$ sînt dezvoltate prin acceptarea unora dintre ipotezele specifice menționate mai jos și notate cu (I) ÷ (VI). Aceste ipoteze oferă, totodată, informații asupra bazelor fizice ale ecuațiilor existente pentru curbele $R-L$ și conturează limitele de aplicabilitate ale diverselor diagrame de rezistență la oboseală folosite în prezent (în calculul clasic de rezistență la oboseală).

(I) Pentru fiecare valoare a coeficientului de asimetrie $R \in [-1, 1]$ se presupune că tensiunea medie σ_m corespunde unui punct de pe caracteristica statică reală $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ trasată în domeniul $\varepsilon \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$.

Ținînd seama de recentele cercetări asupra oțelurilor în domeniul elasto-plastic [24], [35] etc., această caracteristică se va considera de forma

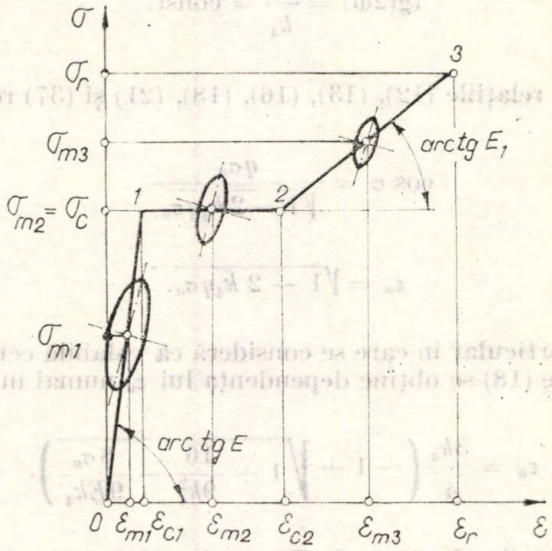


Fig. 8

0—1—2—3 prezentată în figura 8. Evident că, pentru anumite materiale, este posibil ca $\varepsilon_{c_1} \cong \varepsilon_{c_2}$ și/sau $E_1 \cong 0$.

(II) În baza figurii 2 și a celor prezentate în capitolul 3, dependența dintre componenta dinamică (variabilă în timp) a deformației specifice și tensiunea de forma (2) se va presupune ca avînd aspectul unei elipse de histerezis pentru oricare valoare a coeficientului de asimetrie $R \in [-1, 1]$.

(III) Fie că se va folosi un criteriu de deformație, sau unul energetic, la stabilirea ecuațiilor curbelor limită de rezistență la oboseală se va admite că, indiferent de valoarea lui R, epruveta se distruge atunci cînd este atinsă fie valoarea ε_{cr}, fie valoarea lui W_{scr}. Se va presupune, deci, că una din condițiile

$$(i_2) \quad \varepsilon_{cr} = \text{const.}, \tag{35}$$

$$(i_2) \quad W_{scr} = \text{const.} \tag{35'}$$

este satisfăcută pentru oricare punct de pe curba $R-L$.

(IV) După cum rezultă din compararea rezultatelor care indică dependența $\varepsilon_a = \varepsilon_a(N)$ [33] și $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N)$ [38], cel puțin pentru unele aliaje metalice se poate considera

$$\varphi = \text{const.} \tag{36}$$

(V) Ținînd seama de figura 2 și de cele arătate în capitolul 3, într-o primă aproximație se poate admite că poziția axelor elipsei de histerezis rămîne invariabilă pentru toate punctele de pe caracteristica statică din figura 8. Prin urmare se poate presupune că

$$\operatorname{tg}(2\overline{\Phi}) = \frac{1}{k_4} = \text{const.} \tag{37}$$

Combinînd relațiile (12), (13), (16), (18), (21) și (37) rezultă :

$$\cos\varphi = \frac{q\sigma_a}{\sqrt{1 - 2k_4 q\sigma_a}}, \tag{38}$$

$$\varepsilon_a = \sqrt{1 - 2k_4 q\sigma_a}. \tag{39}$$

În cazul particular în care se consideră ca valabilă ecuația (9), avînd în vedere relațiile (18) se obține dependența lui ε_a numai în funcție de σ_a :

$$\varepsilon_a = \frac{3k_4}{4}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{9k_4^2} - \frac{8\sigma_a}{9Ek_4}}\right). \tag{40}$$

(VI) Cercetările efectuate de Troșcenko [38] arată că, în cazul oboselii la un număr mare de cicluri de solicitare a materialelor metalice, dependența $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N)$ este de bază și are aspectul (31), iar dependența $\sigma_a = \sigma_a(N)$ poate fi pusă în forma :

$$10^{\sigma_a} N^{c_4} = k_5, \tag{41}$$

unde c_4 și k_5 sînt constante cu aceeași semnificație ca c_i și k_i ($i = \overline{1,3}$). Eliminînd N din relațiile (31) și (41) și ținînd seama de (22), rezultă

$$\varepsilon_a = \frac{k_3}{\sin\varphi} k_5^{-\frac{c_3}{c_4}} 10^{\frac{c_3}{c_4}\sigma_a}. \tag{42}$$

7. ECUAȚII ALE CURBELOR $R-L$ DE TIP HAIGH

Ecuația liniarizată armonic a buclei de histerezis $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, criteriile (27), (28) și ipotezele (I)÷(VI) permit a stabili noi ecuații ale curbelor limită de rezistență la oboseală și oferă o explicație fizică diverselor ecuații existente (în literatura de specialitate) pentru asemenea curbe. Numai pentru a restrînge prezentarea, în cadrul lucrării de față se iau în considerare doar curbele $R-L$ de tip Haigh.

O curbă $R-L$ de tip Haigh are aspectul general din figura 9. *Problema pe care ne-o propunem spre rezolvare constă în obținerea unei descrieri matematice cît mai exacte a acestei curbe atunci cînd sînt cunoscute numai coordonatele punctelor A și C, sau numai coordonatele punctelor A, B și C.*

În cele ce urmează, materialele ale căror caracteristici statice au diverse forme particulare ale curbei 0—1—2—3 din figura 8 vor fi împărțite în două grupe. În prima dintre ele, notată cu (α), vor fi incluse materialele pentru care, din punctul de vedere al rezistenței la oboseală, porțiunea 2—3 a curbei din figura 8 nu prezintă importanță. Asemenea situații se întîlnesc în cazul materialelor fragile și în cel al materialelor cu zonă de curgere importantă (care, de regulă, limitează rezistența la oboseală). La materialele din a doua grupă, notată cu (β), rezistența la oboseală este determinată de tensiunea de rupere, zona 1—2 fiind restrînsă (neglijabilă).

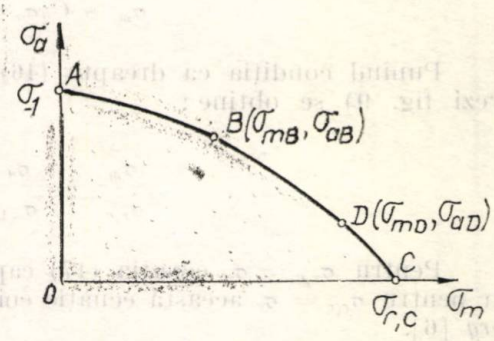


Fig. 9

Pentru început, la deducerea ecuațiilor curbelor $R-L$ de tip Haigh vor fi presupuse cunoscute coordonatele punctelor A și C (vezi fig. 9). Aceleași raționamente pot fi dezvoltate, însă, și în cazul în care sînt cunoscute coordonatele punctelor A, B și C, așa cum se va arăta în ultima parte a prezentului capitol.

7.1. CURBE $R-L$ BAZATE PE IPOTEZELE (I), (II), (III) ȘI (IV)

7.1.1. Cazul materialelor din grupa (α)

(i_1) dacă $\varphi = \text{const.}$, din relațiile (19) și (21) rezultă :

$$\varepsilon_a = q\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}\ \ \sigma_a = C_1 q\,\sigma_a. \tag{43}$$

Admițînd pentru q descrierea matematică (13), dependența (43) dintre ε_a și σ_a devine :

$$\varepsilon_a = \frac{C_1\sigma_a}{E(4 - 3C_1)} = C_2. \tag{44}$$

Dacă se presupune că relația (27) se păstrează pentru $\forall\, R \in [-1, 1]$, în conformitate cu (35) se poate scrie :

$$\varepsilon_m + \varepsilon_a = \varepsilon_{cr} = \text{const.} \tag{45}$$

Ținînd seama de (44) și de figura 8, în care $\sigma_{m^*} = \sigma_m$, criteriul (45) capătă forma :

$$\sigma_m + C_2\sigma_a = C_3. \tag{46}$$

Punînd condiția ca dreapta (46) să treacă prin punctele A și C (vezi fig. 9) se obține :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{r,c}} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1. \tag{47}$$

Pentru $\sigma_{r,c} = \sigma_r$ ecuația (47) capătă *forma propusă de Goodman*, iar pentru $\sigma_{r,c} = \sigma_c$ această ecuație coincide cu aceea *propusă de Soderberg* [6].

(i_2) Dacă relația (35′) se presupune satisfăcută pentru $\forall\, R \in [-1, 1]$, atunci ea poate fi pusă în forma :

$$W_{sm} + C_4 W_{sa} = W_{scr} = \text{const.}, \tag{48}$$

constanta C_4 fiind introdusă pentru a ține seama că numai o parte din energia ciclurilor alternant simetrice participă la ruperea epruvetei.

Avînd în vedere figura 8 și relațiile (23), (43) și (44), criteriul (48) se scrie :

$$\sigma_m^2 + C_5\sigma_a^2 = C_6 \tag{49}$$

Constantele C_5 și C_6 se determină din condiția ca punctele A și C (vezi fig. 9) să aparțină conicei (49). Procedînd în acest mod se obține ecuația *elipsei lui Buzdugan* [4], [6] :

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{r,c}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 = 1. \tag{50}$$

7.1.2. Cazul materialelor din grupa (β)

(i_1) Dependența $\varepsilon = \varepsilon(\sigma_a)$ corespunzătoare porțiunii 0—1 a caracteristicii statice din figura 8 se consideră de forma (44), aceeași dependență scriindu-se în forma

$$\varepsilon_a = C_2'\sigma_a \tag{51}$$

pentru porțiunea 2—3. Drept urmare, pentru porțiunea 0—1 criteriul deformației are forma (46), iar pentru porțiunea 2—3 forma :

$$\sigma_m + C_2'\sigma_a = C_3'. \tag{52}$$

Punînd condiția ca punctele A și D să aparțină dreptei (46), iar D și C (pentru care $\sigma_{r,c} = \sigma_r$) dreptei (52) rezultă:

$$\begin{aligned} C_2\sigma_{-1} &= C_3, \\ \sigma_c + C_2\sigma_{aD} &= C_3, \\ \sigma_c + C_2'\sigma_{aD} &= C_3', \\ \sigma_r &= C_3'. \end{aligned} \tag{53}$$

Sistemul de ecuații (53) permite determinarea constantelor C_2, C_2', C_3 și C_3'. În acest mod, admițînd $\sigma_{aD} = \sigma_r - \sigma_c$, ecuația dreptei AD capătă forma

$$\frac{\sigma_m}{C_2\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1, \tag{54}$$

cea a dreptei DC forma

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_r} + \frac{\sigma_a}{\sigma_r} = 1, \tag{55}$$

iar C_2 este

$$C_2 = \frac{\sigma_c}{\sigma_{-1} + \sigma_c - \sigma_r}. \tag{56}$$

(i_2) Folosind, acum, criteriul energetic (48), pentru porțiunea AD a curbei $R - L$ se admite ecuația (49), iar pentru porțiunea DC ecuația

$$(\sigma_m - \sigma_c)^2 + C_5'\sigma_a^2 = C_6' \tag{57}$$

Constantele C_5, C_5', C_6 și C_6' se determină din condiția ca ecuația (49) să fie verificată de coordonatele punctelor A și D, iar ecuația (57) de cele ale punctelor D și C. Procedînd în acest mod, pentru $\sigma_{r,c} = \sigma_r$ și $\sigma_{aD} = \sigma_r - \sigma_c$ ecuația curbei $\overset{\frown}{AD}$ este

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{-1}\sqrt{C_5}}\right) + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 = 1, \tag{58}$$

cea a curbei $\overset{\frown}{DC}$ are forma:

$$\left(\frac{\sigma_m - \sigma_c}{\sigma_r - \sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_r - \sigma_c}\right)^2 = 1, \tag{59}$$

iar C_5 este:

$$C_5 = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_{-1}^2 - (\sigma_r - \sigma_c)^2}. \tag{60}$$

7.2. CURBE $R-L$ BAZATE PE IPOTEZELE (I), (II), (III) ȘI (V)

7.2.1. Cazul materialelor din grupa (α)

(i_1) Combinînd relațiile (40) și (45) se obține ecuația

$$\sigma_m - \frac{3Ek_4}{4} + \frac{3Ek_4}{4}\sqrt{1 + \frac{16}{9k_4^2} - \frac{8\sigma_a}{9Ek_4}} = C_3E, \tag{61}$$

care poate fi pusă în forma :

$$\sigma_m + C_7\sqrt{1 + C_8\,\sigma_a} = C_9, \tag{62}$$

unde

$$C_8 \cong -\frac{8}{9Ek_4}. \tag{63}$$

Punînd condiția ca punctele A și D din figura 9 să aparțină curbei (61), rezultă

$$C_7 = \frac{\sigma_{r,c}}{\sqrt{1 + C_8\sigma_{-1}} - 1},$$

$$C_9 = \frac{\sigma_{r,c}\sqrt{1 + C_8\,\sigma_{-1}}}{\sqrt{1 + C_8\sigma_{-1}} - 1} \tag{64}$$

Relațiile (63) și (64) permit precizarea parametrilor C_7 și C_9 atît pentru materialele fragile ($\sigma_{r,c} = \sigma_r$), cît și pentru cele tenace ($\sigma_{r,c} = \sigma_c$). Constanta k_4 (vezi relația (36)) se determină ținînd seama de (16), în care a_1 și b_1 se calculează cu relațiile (18).

În planul $\sigma_m - \sigma_a$ ecuația (62), care mai poate fi pusă în forma

$$\sigma_a = \frac{1}{C_7^2C_8}(\sigma_m - C_9)^2 - \frac{1}{C_8}, \tag{65}$$

reprezintă o parabolă. În cazul particular în care s-ar putea admite că $C_9 = 0$, adică

$$k_4 = \frac{8\sigma_{-1}}{9E}, \tag{66}$$

conform relațiilor (64) această parabolă ia *forma propusă de Gerber* [6], [37] :

$$\sigma_a = -\sigma_{-1}\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{r,c}}\right)^2 + \sigma_{-1}. \tag{67}$$

(i_2) Luînd, acum, în considerare criteriul energetic (35′), relațiile (39), obținute prin liniarizare armonică (12) și (40) permit a scrie:

$$S \cong \pi \cdot \sigma_a \sqrt{1 - \frac{k_1 \sigma_a}{2E}}. \tag{68}$$

În acest caz condiția (48) ia forma:

$$\frac{\sigma_m^2}{2E} + \pi \sigma_a \sqrt{1 - \frac{k_4 \sigma_a}{2E}} = C_6,$$

din care rezultă o nouă ecuație a curbei $R-L$:

$$\sigma_m^2 + C_{11} \sigma_a \sqrt{1 + C_{10} \sigma_a} = C_{12}, \tag{69}$$

în care constanta C_{10} se calculează cu relația

$$C_{10} = -\frac{k_4}{2E}. \tag{70}$$

Din condiția ca punctele A și C (vezi fig. 9) să aparțină curbei (69), rezultă:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\sigma_{r,c}^2}{\sigma_{-1} \sqrt{1 + C_{10} \sigma_{-1}}}, \\ C_{12} &= \sigma_{r,c}^2. \end{aligned} \tag{71}$$

7.2.2. Cazul materialelor din grupa (β)

(i_1) În conformitate cu criteriul de deformație, porțiunii 0—1 a caracteristicii statice din figura 8 îi corespunde ecuația (62), iar porțiunii 2—3 ecuația

$$\sigma_m + C_7' \sqrt{1 + C_8' \sigma_a} = C_9', \tag{72}$$

unde

$$C_8' \cong -\frac{8}{9 E_1 k_4'}. \tag{73}$$

Pentru determinarea constantelor C_7, C_7', C_9 și C_9' se folosește sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} &C_7 \sqrt{1 + C_8 \sigma_{-1}} = C_9, \\ &\sigma_e + C_7 \sqrt{1 + C_8 \sigma_{aD}} = C_9, \\ &\sigma_c + C_7' \sqrt{1 + C_8' \sigma_{aD}} = C_9', \\ &\sigma_r + C_7' = C_9', \end{aligned} \tag{74}$$

rezultat din condiția ca punctele A și D să aparțină curbei cu ecuația (62), iar D și C (vezi fig. 9) curbei cu ecuația (72).

(i_2) Aplicînd, acum, criteriul energetic sub forma (69) pentru porțiunea 0—1 și sub forma

$$\sigma_m^2 + C'_{11}\sigma_a\sqrt{1 + C'_{10}\sigma_a} = C'_{12}, \tag{75}$$

în care

$$C'_{10} = -\frac{k'_4}{2E_1}, \tag{76}$$

pentru porțiunea 2—3 a caracteristicii statice din figura 8 și punînd condiția ca (69) să fie verificată de coordonatele punctelor A și D, iar (75) de coordonatele punctelor D și C (vezi fig. 9), se obține următorul sistem de ecuații pentru determinarea constantelor C_{11}, C'_{11}, C_{12} și C'_{12}:

$$\begin{aligned}
&C_{11}\sigma_{-1}\sqrt{1 + C_{10}\sigma_{-1}} = C_{12},\\
&\sigma_c^2 + C_{11}\sigma_{aD}\sqrt{1 + C_{10}\sigma_{aD}} = C_{12},\\
&\sigma_c^2 + C'_{11}\sigma_{aD}\sqrt{1 + C'_{10}\sigma_{aD}} = C'_{12},\\
&\sigma_r^2 = C'_{12}.
\end{aligned} \tag{77}$$

7.3. CURBE $R-L$ BAZATE PE IPOTEZELE (I), (II), (III) ȘI (VI)

7.3.1. Cazul materialelor din grupa (α)

(i_1) Notînd

$$C_{13} = k_3 k_5^{\frac{c_3}{c_4}}, C_{14} = \frac{c_3}{c_4}, \tag{78}$$

relațiile (19), (21) și (42) dau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \frac{\sigma_a}{\cos\varphi}\cdot q,\\
\varepsilon_a &= \frac{C_{13}}{\sin\varphi}\cdot 10^{C_{14}\sigma_a},
\end{aligned} \tag{79}$$

de unde, prin eliminarea lui φ, rezultă ecuația:

$$\varepsilon_a^2 - \sigma_a^2 q^2 = C_{13}^2 10^{2C_{14}\sigma_a}. \tag{80}$$

Combinînd, acum, (13) cu (79) se obține:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{7E}\left(3 + 4\sqrt{1 + \frac{7E^2}{\sigma_a^2} C_{13}^2 \cdot 10^{2C_{14}\sigma_a}}\right) \tag{81}$$

În acest caz, condiția (35) poate fi pusă în forma:

$$\sigma_m + \frac{\sigma_a}{7}\left(3 + 4\sqrt{1 + \frac{7E^2}{\sigma_a^2} C_{13}^2 10^{2C_{14}\sigma_a}}\right) = C_{15}. \tag{82}$$

Pentru ca punctele A și D (vezi fig. 9) să aparțină curbei cu ecuația (82), parametrii C_{13} și C_{15} trebuie să satisfacă ecuațiile:

$$\begin{gathered}\frac{\sigma_{-1}}{7}\left(3 + 4\sqrt{1 + \frac{7E^2}{\sigma_{-1}^2} C_{13}^2 10^{2C_{14}\sigma_{-1}}}\right) = C_{15}, \\ \sigma_{r,c} + \frac{\sqrt{7}}{7} E C_{13} = C_{15}.\end{gathered} \tag{83}$$

(i_2) Ținînd seama de (22), (23) și (79), criteriul energetic (35′) capătă forma:

$$\frac{\sigma_m^2}{2E} + C_{16}\sigma_a 10^{C_{14}\sigma_a} = C_{17}. \tag{84}$$

Coordonatele punctelor A și C verifică ecuația (84) dacă:

$$\begin{gathered}C_{16}\sigma_{-1} 10^{C_{14}\sigma_{-1}} = C_{17}, \\ \frac{\sigma_{r,c}^2}{2E} = C_{17}.\end{gathered} \tag{85}$$

Sistemul de ecuații (85) permite determinarea parametrilor C_{16} și C_{17}. În cazul particular $C_{14} = 0$, ecuațiile (85) permit a scrie (84) în forma (67) a parabolei lui Gerber.

7.3.2. Cazul materialelor din grupa (β)

(i_1) Procedînd în mod similar ca în subcapitolele 7.1 și 7.2, pentru materialele din grupa (β) criteriul (82) se consideră valabil pe porțiunea 0—1, iar pe porțiunea 2—3 (vezi fig. 8) se admite că este verificată o ecuație de forma:

$$\sigma_m + \frac{\sigma_a}{7}\left(3 + 4\sqrt{1 + \frac{7E_1^2}{\sigma_a^2} C_{13}'^2 10^{2C'_{14}\sigma_a}}\right) = C'_{15}. \tag{86}$$

Constantele C_{13}, C'_{13}, C_{15} și C'_{15} se determină impunînd condiția ca punctele A și D să aparțină curbei (82), iar punctele D și C (vezi fig. 9) curbei (86).

(i_2) Aplicînd, acum, criteriul energetic în forma (84) pentru porțiunea 0—1 și în forma

$$\frac{\sigma_{mi}^2}{2E_1} + C'_{16}\sigma_a 10^{C'_{15}\sigma_a} = C'_{17}, \tag{87}$$

pentru porțiunea 2—3 a caracteristicii statice din figura 8 se obțin alte ecuații ale curbelor $R—L$. Și de această dată, condiția ca punctele A și D să se afle pe curba (84), iar D și C pe curba (87) permite precizarea parametrilor C_{16}, C'_{16}, C_{17} și C'_{17}.

7.4. CURBE $R—L$ DE TIP SERENSEN

O aproximare mai bună a curbei $R—L$ în comparație cu ecuațiile propuse de Goodman și Soderberg este datorată lui Serensen [6], [41] etc. Ea constă în înlocuirea curbei din figura 9 prin segmente de dreaptă, pe lîngă coordonatele punctelor A și C fiind necesară și determinarea experimentală a coordonatelor $\sigma_{mB} = \sigma_0/2$, $\sigma_{aB} = \sigma_0/2$ ale punctului B. În cele ce urmează, curbele $R—L$ la a căror trasare se presupun cunoscute pozițiile punctelor A, B și C vor fi numite curbe de tip Serensen.

Ipotezele folosite în subcapitolele 7.1 ÷ 7.3 pentru stabilirea ecuațiilor curbelor $R—L$ pot fi ușor extinse și pentru curbele de tip Serensen. Astfel, pentru cazul în care $\sigma_{mB} < \sigma_{mD} = \sigma_c$ (vezi fig. 9), în tabelul 2 pot fi urmărite formele ecuațiilor curbelor $R—L$ determinate prin aplicarea procedurii din subcapitolul 7.1.

8. EXEMPLIFICĂRI

Cu scopul de a ilustra modalitățile de obținere a ecuațiilor curbelor $R—L$ corespunzătoare unor materiale date, în cele de mai jos sînt luate în considerare oțelurile cu caracteristicile statice din figura 10 [24]. Carac-

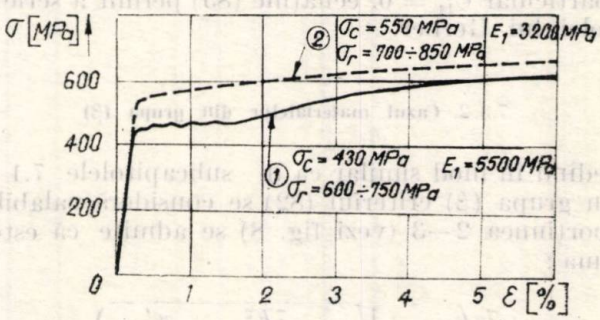


Fig. 10

teristica ① corespunde oțelului aliat cehoslovac 13220, iar caracteristica ② oțelului cehoslovac 15422. Din punctul de vedere al clasificării folosite în capitolul precedent se poate admite că oțelul 13220 aparține grupei (α), iar oțelul 15422 grupei (β).

Ținînd seama de recomandările din literatura de specialitate [6], [41] etc., pentru oțelul 13220 se consideră $\sigma_{-1} \cong 230$ MPa, iar pentru

Tabelul 2

Materialul	Criteriul	Ecuațiile curbelor $R-L$
(α)	(35)	$(\overline{AB}): \dfrac{\sigma_{-1}-\sigma_{aB}}{\sigma_{mB}} \cdot \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{-1}} + \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1$
		$(\overline{BC}): \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{r,c}} + \dfrac{\sigma_{r,c}-\sigma_{mB}}{\sigma_{aB}} \cdot \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{r,c}} = 1$
	(35′)	$(\widehat{AB}): \dfrac{\sigma_{-1}^2-\sigma_{aB}^2}{\sigma_{mB}^2} \cdot \left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 = 1$
		$(\widehat{BC}): \left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{r,c}}\right)^2 + \dfrac{\sigma_{r,c}^2-\sigma_{mB}^2}{\sigma_{aB}^2} \cdot \left(\dfrac{\sigma_a}{\sigma_{r,c}}\right)^2 = 1$
(β)	(35)	$(\overline{AB}): \dfrac{\sigma_{-1}-\sigma_{aB}}{\sigma_{mB}} \cdot \dfrac{\sigma_m}{\sigma_{-1}} + \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 0$
		$(\overline{BD}): \dfrac{\sigma_{aB}-\sigma_{aD}}{\sigma_{aB}\sigma_{mD}-\sigma_{aD}\sigma_{mB}} \cdot \sigma_m + \dfrac{\sigma_{mD}-\sigma_{mB}}{\sigma_{aB}\sigma_{mD}-\sigma_{aD}\sigma_{mB}} \cdot \sigma_a = 1$
		$(\overline{DC}): \dfrac{\sigma_m}{\sigma_r} + \dfrac{\sigma_{aD}}{\sigma_r-\sigma_{mD}} \cdot \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1$
	(35′)	$(\widehat{AB}): \dfrac{\sigma_{-1}^2-\sigma_{aB}^2}{\sigma_{mB}^2} \left(\dfrac{\sigma_m}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 = 1$
		$(\widehat{BD}): \dfrac{\sigma_{aB}^2-\sigma_{aD}^2}{\sigma_{aB}^2\sigma_{mD}^2-\sigma_{aD}^2\sigma_{mB}^2} \cdot \sigma_m^2 + \dfrac{\sigma_{mD}^2-\sigma_{mB}^2}{\sigma_{aB}^2\sigma_{mD}^2-\sigma_{aD}^2\sigma_{mD}^2} \cdot \sigma_a^2 = 1$
		$(\widehat{DC}): \left(\dfrac{\sigma_m-\sigma_c}{\sigma_r-\sigma_c}\right)^2 + (\sigma_r-\sigma_{mD})(\sigma_r+\sigma_{mD}-2\sigma_c)\left(\dfrac{\sigma_a}{\sigma_{aD}(\sigma_r-\sigma_c)}\right)^2 = 1$

oțelul 15422 se admite $\sigma_{-1} \cong 260$ MPa. Valoarea lui σ_r s-a presupus egală cu media aritmetică a limitelor prezentate în figura 10, pentru k_4 și E admițîndu-se 575 și $2{,}09 \cdot 10^5$ MPa în cazul materialului (α), respectiv 520 și $1{,}196 \cdot 10^5$ MPa în cazul materialului din grupa (β), iar $k'_4 = 10$.

Cu aceste date, formele particulare ale cîtorva dintre ecuațiile generale stabilite în capitolul 7 pot fi urmărite în tabelul 3, iar reprezentarea grafică a acestora în figurile 11 și 12.

Tabelul 3

Materialul	Ecuația generală	Forma particulară a ecuației $R-L$
13220	(47)	$\frac{\sigma_m}{430} + \frac{\sigma_a}{230} = 1$
	(50)	$\left(\frac{\sigma_m}{430}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{230}\right)^2 = 1$
	(62)	$\sigma_m + 5{,}055 \cdot 10^8 \sqrt{1 - 7{,}396 \cdot 10^{-9}\, \sigma_a} = 5{,}055 \cdot 10^8$
	(69)	$\sigma_m^2 + 9{,}723 \cdot 10^2 \sigma_a \sqrt{1 - 1{,}375 \cdot 10^{-3}\, \sigma_a} = 6 \cdot 10^5$
15422	(54)	$\frac{\sigma_m}{4086} + \frac{\sigma_a}{260} = 1$
	(55)	$\frac{\sigma_m}{775} + \frac{\sigma_a}{775} = 1$
	(58)	$\left(\frac{\sigma_m}{4633{,}2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{260}\right)^2 = 1$
	(59)	$\left(\frac{\sigma_m - 550}{225}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{225}\right)^2 = 1$
	(62)	$\sigma_m - 2{,}199 \cdot 10^9 \sqrt{1 - 1{,}429 \cdot 10^{-8}\, \sigma_a} = -2{,}199 \cdot 10^9$
	(72)	$\sigma_m - 7{,}189 \cdot 10^4 \sqrt{1 - 2{,}777 \cdot 10^{-5}\, \sigma_a} = -7{,}111 \cdot 10^4$
	(69)	$\sigma_m^2 + 2{,}848 \cdot 10^3 \sigma_a \sqrt{1 - 2{,}174 \cdot 10^{-3}\, \sigma_a} = 4{,}883 \cdot 10^6$
	(75)	$\sigma_m^2 + 1{,}645 \cdot 10^2 \sigma_a \sqrt{1 - 1{,}562 \cdot 10^{-3}\, \sigma_a} = 6{,}006 \cdot 10^5$

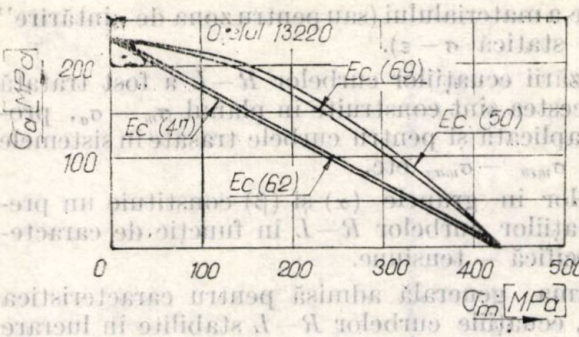


Fig. 11

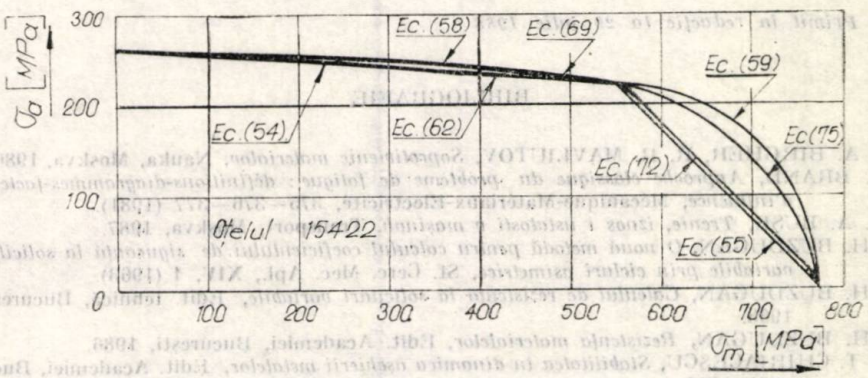


Fig. 12

9. CONCLUZII

1. Folosirea unor ipoteze de genul celor prezentate în capitolul 6 permite a obține o serie de ecuații ale curbelor $R-L$ pentru care, în planul $\sigma_m - \sigma_a$ sînt cunoscute două sau trei puncte. După cum se poate vedea din capitolul 7, majoritatea ecuațiilor existente în literatura de specialitate și deduse în lucrarea de față sînt bazate pe ipoteza unui defazaj constant între tensiune și deformație specifică.

2. În sistemul de axe ε și $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_a$, ipoteza (V) a condus la relația (40). Dacă elipsa de histerezis este analizată în planul $\varepsilon - \sigma$ (vezi § 4.2.), atunci se poate arăta că condiția ca poziția axelor acestei elipse să rămînă invariabilă pentru $\forall R \in [-1, 1]$, adică:

$$\operatorname{tg}(2\Phi) = \frac{2q}{(1-q^2-q'^2)\sigma_a} = \text{const.},$$

permite a aduce relația (40) la forma (44) (obținută cu ajutorul ipotezei (IV)).

3. Relația (66) care condiționează coincidența parabolei (62) cu cea propusă de Gerber este satisfăcută numai pentru valori mici ale lui E (comparabile cu cele ale lui σ_{-1}), adică pentru porțiunea de trecere de la

zona elastică la cea de curgere a materialului (sau pentru zona de „întărire" evidențiată de caracteristica statică $\sigma - \varepsilon$).

4. Deși problema precizării ecuațiilor curbelor $R-L$ a fost tratată numai pentru cazul în care acestea sînt construite în planul $\sigma_m - \sigma_a$, procedura folosită poate fi ușor aplicată și pentru curbele trasate în sistemele de coordonate $\sigma_m - \sigma_{min,max}$, $\sigma_{min} - \sigma_{max}$ etc.

5. Împărțirea materialelor în grupele (α) și (β) constituie un prețios ghid pentru alegerea ecuațiilor curbelor $R-L$ în funcție de caracteristica statică deformație specifică — tensiune.

6. Avînd în vedere forma generală admisă pentru caracteristica statică $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ din figura 8, ecuațiile curbelor $R-L$ stabilite în lucrare sînt aplicabile, cu precădere, oțelurilor.

Primit în redacție la 29 iulie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. BIRGHER, R. R. MAVLIUTOV, *Soprotivlenie materialov*, Nauka, Moskva, 1986.
2. A. BRAND, *Approche classique du problème de fatigue : définitions-diagrammes-facteurs d'influence*, Mécanique-Matériaux-Electricité, 375—376—377 (1981).
3. N. A. BUȘE, *Trenie, iznos i ustalosti v mașinah*, Transport, Moskva, 1987.
4. GH. BUZDUGAN, *O nouă metodă pentru calculul coeficientului de siguranță la solicitări variabile prin cicluri asimetrice*, St. Cerc. Mec. Apl., **XIV**, 4 (1963).
5. GH. BUZDUGAN, *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, Edit. tehnică, București, 1963.
6. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Edit. Academiei, București, 1986.
7. S. T. CHIRIACESCU, *Stabilitatea în dinamica aschierii metalelor*, Edit. Academiei, București, 1984.
8. S. T. CHIRIACESCU, *An equation of the high cyclic strain-stress curve of inelastic materials*, Bul. Univ. din Brașov, Seria A, **XXX** (1988).
9. D. CIOCLOV, *Rezistența și fiabilitatea la solicitări variabile*. Edit. Facla, Timișoara, 1975.
10. A. CIȘMAN, B. F. ROTHENSTEIN, A. POLICEC, *Fenomene fizice în metale feromagnetice solicitate*, Edit. Academiei, București, 1968.
11. L. E. COFFIN Jr., *Low cycle fatigue. A review*, J. Appl. Metl. Res., **1**, 3 (1962).
12. C. E. FELTNER, J. D. MORROW, *Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture*, Trans. ASME, J. Basic Eng., **83**, 1 (1961).
13. G. R. HALFORD, *The energy required for fatigue*, J. Metl., **1**, 1 (1966).
14. SANDA HANGAN, L. CRAINIC, *Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor*, Edit. Academiei, București, 1980.
15. G. M. HAJINSKII, *Ob otenke vinoslivosti strejnei v usloviiah razrușeniia — sjatiia i izghiba*, Problemî procinosti, 8 (1987).
16. A. I. IȘLINSKII, *Mehanika viazkoplasticeskih i ne vpolne uprughih tel*, Nauka, Moskva, 1986.
17. V. S. IVANOVA, V. F. TERENTIEV, *Priroda ustalosti metallov*, Metalurghiia, Moskva, 1975.
18. L. F. KOGINEVA, *Vnutrenee trenie v tverdih telah pri kolebaniiah*, Nauka, Moskva, 1979.
19. V. P. KOGAEV, N. A. MAHUTOV, A. P. GUSENKOV, *Rasceti detalei mașin i konstrukții na procinosti i dolgovecinosti*, Mașinostroienie, Moskva, 1985.
20. H. LE BOITEUX, *La fatigue dans les matériaux*, Ediscience, Paris, 1973.
21. S. S. MANSON, *Fatigue. A complex subject-Some simple approximation*, Exptl. Mech., **5**, 7 (1965).
22. D. E. MARTIN, *An energy criterion for low-cycle fatigue*, Trans. ASME, J. Basic Eng., 83 (1961).
23. D. R. MOCANU, V. PALIHOVICI, N. LAȘCU-SIMION, *Încercarea materialelor la solicitări variabile*, în monografia „Încercarea materialelor", Vol. 1, Edit. Tehnică, București, 1982.

24. A. MRAZIK, M. ȘKALOUD, M. TOHACEK, *Rasceti i proektirovanie stalinih konstrukții s ucetom plasticeskih deformații*, Stroiizdat, Moskva, 1986.
25. ȘT. NADAȘAN, B. HOROVITZ, AL. BERNATH, V., SAFTA, *Oboseala materialelor*, Edit. Tehnică, București, 1962.
26. N. V. OLEINIK, *Nesușciia sposobnosti elementov konstrukții pri țikliceskom nagrujenii*, Naukova dumka, Kiev, 1985.
27. W. T. PIMBLEY, T. C. KU, *Design for fatigue based on energy concept*. ASME Paper 68—DE—17, 1968.
28. G. S. PISARENKO, *O novom podhode k opusaniu kontura petli ghisterezisa v teorii mehaniceskih kolebanii*, Problemi procinosti, 6 (1971).
29. G. S. PISARENKO, O. E. BOGHINICI, *Kolebaniia kinematiceski vozbujdaemih mehaniceskih sistem s ucetom disipații energhii*, Naukova dumka, Kiev, 1981.
30. E. P. POPOV, *Prikladnaia teoriia profesov upravleniia v nelineinih sistemah*, Nauka, Moskva, 1973.
31. O. RUSU, T. GALL, *Probleme moderne ale rezistenței materialelor*, Edit. tehnică, București, 1970.
32. A. SEIREG, *Mechanical sytems analysis*, Int. Textbook Co., Scranton, Pennsylvania, 1969.
33. L. F. ȘESTOPAL, *Issledovanie zakonomernosti ustalostnogo razrușeniia i neuprugogo deformirovaniia pri krucenii*, Avtoref. dis., Kiev. 1973.
34. R. M. ȘNEIDEROVICI, *Procinosti pri staticeskom povtornostaticeskom nagrujeniah*, Mașinostroienie, Moskva, 1968.
35. M. SIRATORI, T. MIYOSI, H. MAIUSITA, *Vicislitelinaia mehanika razrușeniia*, Mir, Moskva, 1986.
36. L. SORS, *Fatigue design of machine components*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
37. V. T. TROȘCENKO, *Deformirovanie i razrușenie metallov pri mnogoțiklovom nagrujenii*, Naukova dumka, Kiev, 1981.
38. V. T. TROȘCENKO, *Țikliceskie deformații i ustalosti metallov*, Naukova dumka Kiev, 1985.
39. I. M. VASINIUK, L. A. KHAMAZA, *O kriterialinoi oțenke ustalostnoi procinosti metallov*, Problemi procinosti, 4 (1973).
40. G. VERTES, *Structural dynamics*, Elsevier, Amsterdam 1985.
41. * * * *Staticeskaia procinosti i mehanika razrușeniia stalei* (pod red. W. Dahl, W. Anton), Metallurghiia, Moskva, 1986.

24. A. MRAZIK, M. ŞKALOIP, M. TOHACEK, Rasceti i proektirovanie stalinih konstrukţii s uceţom plasticeskih deformaţii, Stroiizdat, Moskva, 1986.
25. ŞT. NADAŞAN, B. HOROVITZ, AL. BERNATH, V., SAFTA, Oboseala materialelor, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1962.
26. N. V. OLEINIK, Nesusciia sposobnosti elementov konstrukţii pri ţikliceskom nagrujenii, Naukova dumka, Kiev, 1985.
27. W. T. PIMBLEY, T. C. KU, Design for fatigue based on energy concept, ASME Paper 68-DE-17, 1968.
28. G. S. PISARENKO, O novom podhode k opasaniu kostura petli ghisterezisa v teorii mehaniceskih kolebanii, Problemi procinosti, 6 (1971).
29. G. S. PISARENKO, O. E. BOGHINICI, Kolebaniia kinematiceski vozbujdaemih mehaniceskih sistem s uceţom disipaţii energhii, Naukova dumka, Kiev, 1981.
30. E. P. POPOV, Prikladnaia teoriia profesov upravleniia v nelineinih sistemah, Nauka, Moskva, 1973.
31. O. RUSU, T. GALL, Probleme moderne ale rezistenţei materialelor, Edit. tehnică, Bucureşti, 1970.
32. A. SEIREG, Mechanical sytems analysis, Int. Textbook Co., Scranton, Pennsylvania, 1969.
33. L. F. ŞESTOPAL, Issledovanie zakonomernosti ustalostnogo razruşeniia i neuprugogo deformirovaniia pri kruceniii, Avtoref. dis., Kiev, 1973.
34. R. M. ŞNEIDEROVICI, Procinosti pri staticeskom podornostaticeskom nagrujeniah, Maşinostroienie, Moskva, 1968.
35. M. SIRATORI, T. MIYOSI, H. MAIUSITA, Vietstitelinaia mehanika razruşeniia, Mir, Moskva, 1986.
36. L. SORS, Fatigue design of machine components, Pergamon Press, Oxford, 1971.
37. V. T. TROŞCENKO, Deformirovanie i razruşenie metallov pri mnogoţiklovom nagrujenii, Naukova dumka, Kiev, 1981.
38. V. T. TROŞCENKO, Ţikliceskie deformaţii i ustalosti metallov, Naukova dumka Kiev, 1985.
39. I. M. VASINIUK, L. A. KHAMAZA, O kriterialinoi ofenke ustalostnoi procinosti metallov, Problemi procinosti, 4 (1973).
40. G. VERTES, Structural dynamics, Elsevier, Amsterdam 1985.
41. „ * „ Staticeskaia procinosti i mehanika razruşeniia stalei (pod red. W. Dahl, W. Anton), Metallurghiia, Moskva, 1986.

CUPLUL OPTIM AL SISTEMULUI PISTON-CILINDRUL POMPEI DE ADÎNCIME

de AL. D. STAN

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

În lucrare se stabilește dependența dintre debitul de petrol pompat de către pompa de adîncime, pierderile de petrol prin cuplul piston-cilindrul pompei și numărul de înlocuiri de pompe uzate.
Ca urmare a dependenței obținute, se stabilește un criteriu de optimizarea rentabilității fiecărei sonde de pe o structură petrolieră și se sugerează posibilitățile reale de a mări eficiența pompajului de adîncime prin alegerea unui cuplu piston-cilindru potrivit.

1. INTRODUCERE

Multe sonde extractive de petrol sînt în pompaj de adîncime fiind echipate cu pompe la care sistemul cilindru-piston (*CP*) joacă probabil cel mai însemnat rol atît în ceea ce privește durata de funcționare a acestuia, cît și asupra randamentului de fund al pompei.

Un joc mare între cele două piese componente ale cuplului *CP* presupune o uzură redusă, dar, în același timp, are loc și scurgere însemnată a fluidului scurs printre piese.

Referitor la cantitatea de fluid scursă printre piesele componente ale cuplului *CP*, în atelierele de pompe ale unităților care exploatează sondele productive, se efectuează proba de alunecare care dă unele indicații asupra cuplului.

2. DURATA DE FUNCȚIONARE A CUPLULUI *CP*

Pompa de extracție este principalul reper al utilajului de adîncime de la o sondă care dă debitul de petrol extras cît și durata de funcționare neîntreruptă a pompajului. Referitor la ultimul aspect, trebuie precizat că dacă uzura între piesele componente ale pompei este mai accentuată schimbările de pompe sînt mai numeroase.

În cazul ideal că în timpul exploatării sondei în pompaj pompa nu s-ar uza, cheltuielile aferente reparării pompelor ca și timpii de oprirea pompajului ar fi foarte reduși; situație foarte favorabilă pentru extracția petrolului prin acest sistem.

Datorită faptului că între părțile componente ale pompei (cilindru și piston), supapele cilindrului și ale pistonului există o permanentă mobilitate se produce uzura părților componente ale pompei.

Cu siguranță că existența particulelor solide în fluidul extras duce la o accentuare a uzurii acelorași părți componente ale pompei care, de fapt, duc la înlocuirea pompei. Orice înlocuire de pompă de la sondă

duce în mod inevitabil la oprirea pompajului și la cheltuieli de exploatare mărite față de situația în care aceeași sondă ar fi exploatată continuu.

Cel mai concludent criteriu ce caracterizează durata de exploatare a unei pompe este parametrul D dat de relația

$$D = S \cdot n \cdot T, \tag{1}$$

unde S reprezintă cursa de fund a pistonului, n numărul de curse duble în unitatea de timp a unității de pompare, iar T timpul cît a funcționat pompa de adîncime.

Durata de funcționare D este echivalentă perioadei de funcționare T la toate sondele care au parametrul Sn constant. Apare evident că D reprezintă, de fapt, lungimea parcursă de deplasarea celor două piese componente ale cuplului CP.

Este posibil că în afara celor trei parametri evidenți (S, n, T) care dau durata reală de funcționare, să existe și alți factori ce influențează durata de funcționare cum este presiunea de contact, viteza relativă între piese precum și duritatea suprafețelor în contact nemijlocit.

Această afirmație este bazată pe aceea că la un contact direct volumul de material dislocat prin frecare este dat de formula

$$V = C \frac{p}{H} v, \tag{2}$$

unde C este o constantă ce depinde de natura contactului între piese, p — presiunea de contact, v — viteza de deplasare între piese, iar H — duritatea materialului supus uzurii.

Într-un caz extrem, dacă deplasarea dintre două piese ar fi nulă, nu s-ar produce o uzură între acestea. Eventuala uzură a pieselor s-ar datora unor fenomene cum ar fi acelea de coroziune și abraziune.

În lumina celor arătate mai înainte apare evident că existența particulelor solide în masa petrolului duce la o accentuare a uzurii față de cazul pompării unui petrol curat.

Așa cum am precizat anterior, singurul criteriu de a alege o pompă pentru o sondă este proba de alunecare care trebuie efectuată cu mare grijă pentru o durată de funcționare cît mai îndelungată.

Din acest motiv ar fi indicat ca această probă să se efectueze cît mai exact și în cît mai multe poziții relative ale pistonului și cilindrului pompei.

S-a constatat că proba de alunecare, deși realizată în condiții statice, arată că pe măsura creșterii alunecării se mărește și durata de funcționare a pompei. Această concluzie a fost dedusă din prelucrarea datelor la patru sonde S_1, S_2, S_3 și S_4 de pe o structură petrolieră din țara noastră (fig. 1).

Alunecarea unei pompe depinde de mărimea parametrului k dat de raportul celor două raze R_1 și R_2 care formează spațiul inelar al cuplului CP.

$$k = \frac{R_1}{R_2}. \tag{3}$$

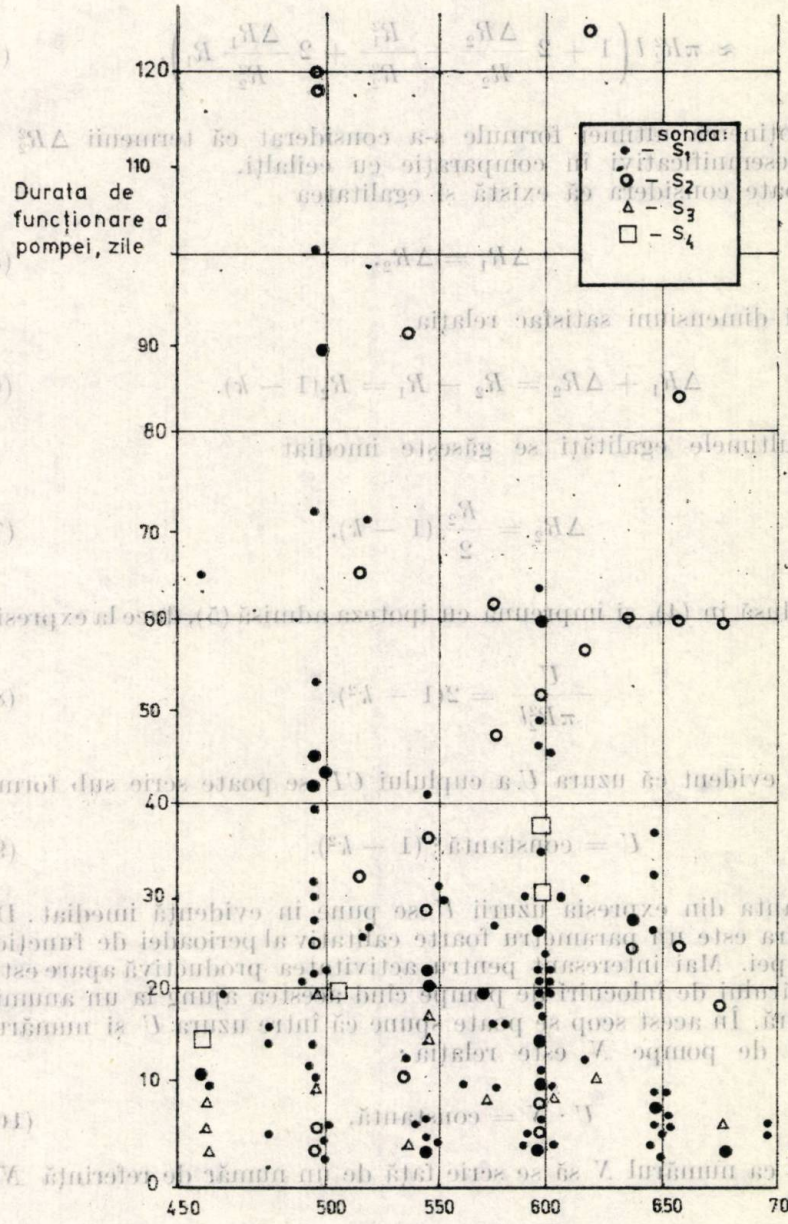


Fig. 1

Tot de parametrul k depinde în esență și uzura aceluiași cuplu CP. Astfel, dacă se consideră că uzura U a cuplului este echivalentă cantității de material dislocat prin deplasarea relativă a pieselor componente ale cuplului, aceasta se scrie

$$U = \pi[(R_2 + \Delta R_2)^2 - (R_1 - \Delta R_1)^2]\, l \approx$$

$$\approx \pi R_2^2\, l\left(1 + 2\,\frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{R_1^2}{R_2^2} + 2\,\frac{\Delta R_1}{R_2^2}\,R_1\right). \tag{4}$$

La obținerea ultimei formule s-a considerat că termenii ΔR_2^2 și ΔR_1^2 sînt nesemnificativi în comparație cu ceilalți.

Se poate considera că există și egalitatea

$$\Delta R_1 = \Delta R_2, \tag{5}$$

iar aceleași dimensiuni satisfac relația

$$\Delta R_1 + \Delta R_2 = R_2 - R_1 = R_2(1 - k). \tag{6}$$

Din ultimele egalități se găsește imediat

$$\Delta R_2 = \frac{R_2}{2}\,(1 - k), \tag{7}$$

care, introdusă în (4), și împreună cu ipoteza admisă (5), duce la expresia

$$\frac{U}{\pi R_2^2 l} = 2(1 - k^2). \tag{8}$$

Apare evident că uzura U a cuplului CP se poate scrie sub forma

$$U = \text{constantă} \cdot (1 - k^2). \tag{9}$$

Constanta din expresia uzurii U se pune în evidență imediat. De fapt, și uzura este un parametru foarte calitativ al perioadei de funcționare a pompei. Mai interesant pentru activitatea productivă apare estimarea numărului de înlocuiri de pompe cînd acestea ajung la un anumit grad de uzură. În acest scop se poate spune că între uzura U și numărul de înlocuiri de pompe N este relația:

$$U \cdot N = \text{constantă}, \tag{10}$$

ceea ce face ca numărul N să se scrie față de un număr de referință Ne sub forma:

$$Ue \cdot Ne = U \cdot N \tag{11}$$

Ue este uzura pentru un parametru de referință ke obținută în mod similar ca și (8).

$$\frac{Ue}{\pi R_2^2 l} = 2(1 - k^2 e) \tag{12}$$

de unde se obține

$$N = Ne \frac{1 - k_e^2}{1 - k^2} \tag{13}$$

Apare evident că la un anumit parametru dimensional ke folosit la o anumită sondă unde s-au înregistrat un număr Ne de înlocuiri ale pompei se pot prevedea ritmul de schimbări de pompă N dacă se modifică parametrul k de la ke la o valoare oarecare k a acestuia.

Rezultă deci că menținerea parametrului de la valoarea ke duce la un ritm de schimbări N egale cu Ne, iar dacă parametrul k se reduce numărul N devine mai mic dată de Ne.
În situația inversă și anume la mărirea lui k față de ke numărul N devine mai mare decît Ne.

Cu toate limitele admise la obținerea formulei (8), apreciem că relația (13) poate da o valoare orientativă a numărului de înlocuiri de pompe în funcție de parametrul k.

De asemenea, aceeași formulă caracterizează exploatarea unei anumite sonde deoarece numărul de înlocuiri Ne de pompe înregistrate ca urmare a utilizării parametrului dimensional ke are în vedere condițiile de lucru ale sondei (adîncime, caracteristici fizice ale petrolului extras, rația de particule solide în masa de fluide, dimensiunile și duritatea impurităților solide) care pot fi considerate invariabile în timp.

3. DEBITUL DE PETROL POMPAT DE CĂTRE PISTON

În situația unei scurgeri laminare a petrolului prin cuplul CP debitul de lichid este dat de relația:

$$Q = \frac{\pi R_2^4 \Delta p}{8\mu l}(1 - k^2)\left(1 + k^2 + \frac{1 - k^2}{\ln k}\right). \tag{14}$$

În afara notațiilor deja utilizate, μ reprezintă vîscozitatea dinamică a lichidului, l — lungimea pistonului, iar Δp — presiunea diferențială exercitată pe lichidul din spațiul inelar. Dacă se neglijează lungimea pistonului față de adîncimea de fixare a pompei H, presiunea diferențială Δp se scrie sub forma

$$\Delta p = \rho g H, \tag{15}$$

unde g este accelerația gravitațională, iar ρ densitatea petrolului.

În formula (14) dacă se introduce $k = 0$, rezultă debitul scurs printr-un tub cu secțiunea circulară cunoscută sub numele de relația Hagen—Poiseuille.

$$Q_0 = \frac{\pi R_2^4 \Delta p}{8\mu l}, \tag{16}$$

iar pentru un parametru dimensional $k = 1$ rezultă imediat că debitul dat de către formula (14) este nul.

Pe de altă parte, debitul pompat în coloana țevilor de extracție poate fi luat de referință având mărimea egală tot cu Q_0 ceea ce face ca debitul rămas după ce s-a realizat scurgerea lichidului prin cuplul CP să fie

$$Q = Q_0\left[1 - (1 - k^2)\left(1 + k^2 + \frac{1 - k^2}{\ln k}\right)\right]. \tag{17}$$

Se observă cu ușurință că debitul Q satisface condițiile pentru cazurile limită ale lui k, adică:

$$\lim_{k \to 1} Q = Q_0 \tag{18}$$

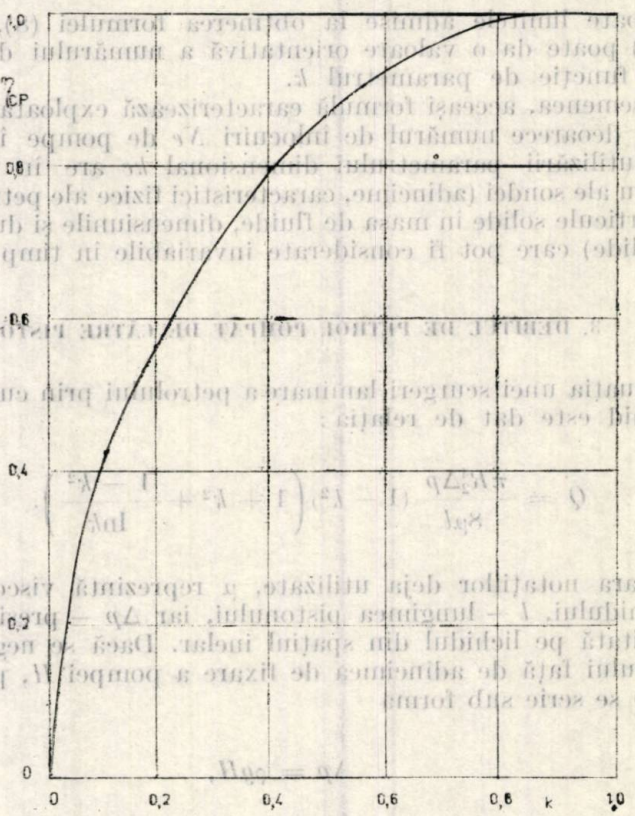


Fig. 2

și

$$\lim_{k\to 0} Q = 0. \tag{19}$$

Debitul de referință Q_0 ar putea fi considerat că este intrat în coloana țevilor de extracție, deci același cu debitul obținut la suprafață, dacă cuplul CP ar avea un parametru dimensional $k = 1$.

La o analiză atentă se deduce că paranteza dreaptă ce înmulțește debitul de referință Q_0 este un randament η_{CP} al cuplului CP.

În figura 2 se reprezintă valoarea randamentului η_{CP} în funcție de parametrul k. Se observă că valoarea cea mai mare a randamentului η_{CP} are loc pentru un parametru dimensional $k = 1$ ceea ce ar implica și un număr foarte mare de schimbări de pompe potrivit relației (13).

Datorită celor două aspecte diferite pe care le prezintă parametrul k trebuie ca acesta să fie determinat avînd în vedere considerentele economice.

4. ALEGEREA OPTIMĂ A CUPLULUI CP

Așa cum a fost stabilit anterior, parametrul dimensional k al cuplului CP are cea mai mare importanță la alegerea pompei de extracție deoarece pe măsură ce acest parametru are valori apropiate de unitate, crește debitul de petrol pompat și, tot la asemenea valori ale lui k, sporesc numărul de înlocuiri de pompe ceea ce duce la cheltuieli de exploatare mărite.

Înlocuirea unei pompe prezintă și dezavantajul că pentru durata cît are loc asemenea operație se oprește și producția sondei.

Din acest motiv pentru un număr de înlocuiri de pompe ca urmare a uzurii acestora, schela de producție are pierderea :

$$N(C + Q\cdot p\cdot T) = \frac{Ne(1-k^2e)}{1-k^2}(C + Q\cdot p\cdot T), \tag{20}$$

unde C reprezintă costul unei pompe noi sau recondiționate, p este costul pe unitatea de petrol extras, iar T — timpul cît are loc o înlocuire de pompă; T depinde în special de adîncimea medie de fixare a pompei.

Q este debitul de petrol pompat de către pompă și la obținerea unui optim al parametrului k pe cale analitică vom presupune că debitul Q este egal chiar cu Q_0. Această ipoteză de calcul are un suport real deoarece în p și T se pot include ajustarea de la Q la Q_0.

Cu această ultimă ipoteză care nu reduce cu nimic generalitatea problemei, rezultă că optimul funcției

$$E = Q_0 p\left[1-(1-k^2)\left(1+k^2+\frac{1-k^2}{\ln k}\right)\right] - \frac{Ne(1-k^2e)}{1-k^2}(C + Q_0 pT) \tag{21}$$

reprezintă cea mai economică alegere a parametrului dimensional k și din acest motiv, această valoare se va nota cu k_{max}. Maximul funcției E, E_{max} se obține prin rezolvarea ecuației.

$$\frac{dE}{dk} = 0 \tag{22}$$

Dacă se introduce notația

$$A = \frac{Ne(1-k^2e)}{Q_0 \cdot p}(C + Q_0 pT) \tag{23}$$

ecuația (22) se pune sub forma

$$\frac{dE}{dk} = 2k\left(1+k^2+\frac{1-k^2}{\ln k}\right) + (k^2-1)\left[2k\frac{2k^2\ln k+1-k^2}{k(\ln k)^2}\right] - \frac{2kA}{(k^2-1)^2} = 0. \tag{24}$$

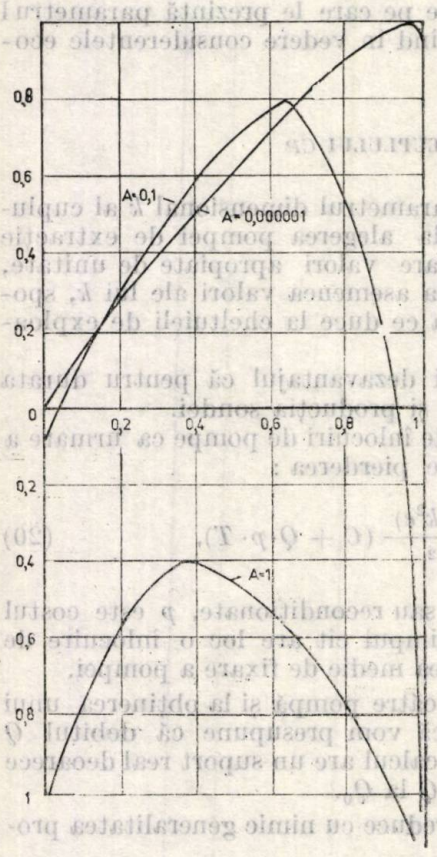


Fig. 3

Această ecuație a fost rezolvată pe un calculator electronic FELIX C-256 pentru mai multe valori numerice ale lui A.

În graficul din figura 3 prezentăm variația funcției în funcție de pentru trei valori ale lui A.

Pentru valori mari ale lui A, de exemplu $A = 1$, funcția E are pentru întreg domeniul de variație a lui k situat între 0 și 1, valori negative și are maximul $E_{max} = -0{,}3905$ la $k = k_{max} = 0{,}3640$.

Aceasta înseamnă că la astfel de valori ale lui A, schela lucrează numai cu pierderi și cele mai mici dintre acestea sînt realizate la acele cupluri CP cu parametri dimensionali k egali cu valorile maxime k_{max} ale acestora.

Pentru o altă valoare a lui $A = 0,1$, funcția intersectează axa abscizelor la $k_1 = 0{,}00045$ și $k_2 = 0{,}9486$ și prezintă un maxim egal cu $E_{max} = 0{,}7795$ la $k_{max} = 0{,}6471$.

În sfîrșit, la $A = 0{,}000001$, graficul intersectează axa absciselor foarte aproape de valorile extreme pe care le poate lua k, și anume 0 și 1, ceea ce dovedește că practic pentru orice mărime a lui k cuplul CP este economic, dar și aici este o valoare maximă a funcției E. Pentru valoarea considerată a lui $AE_{max} = 0{,}99996$ și are loc pentru $k_{max} = 0{,}9811$.

Din cele prezentate rezultă că cea mai favorabilă situație pentru o schelă petrolieră ar fi aceea în care parametrul A este redus. Acesta presupune cheltuieli aferente cumpărării sau recondiționării pompelor reduse, prețuri mari de vînzare a petrolului și, de asemenea, timpi reduși pentru înlocuirile pompelor uzate.

Apare evident că alegerea optimă a parametrului k este valabilă pentru fiecare structură petrolieră.

De altfel, tot pentru fiecare structură petrolieră probabil că numărul de schimbări de pompe observate în exploatare rămîne constant și este dependent de natura materialului solid (duritate, dimensiune, concentrație) aflat în masa petrolului extras.

5. VALORI OBSERVATE ÎN PRACTICA DE ȘANTIER

Tot pentru cele patru sonde ale căror durate de funcționare în funcție de alunecare au fost analizate, prezentăm în tabelul 1 mărimile înregistrate.

Tabelul 1

Sonda	Adîncimea pompei, m	Durata medie de funcționare a pompei, zile	Parametrul k	Cursa S, m	Numărul de curse pe minut	Debitul mediu la o cursă $10^4 \cdot m^3$
S_1	600	913	0,9793	0,5227	10,77	7,0507
S_2	737,5	1575	0,9847	0,70	9	4,5056
S_3	1244,1	481	0,9821	1,296	8,43	7,6504
S_4	2642	737	0,9798	3	7	16,9683

iar în tabelul 2 redăm valoarea parametrului optim k_{max} și a funcției E pentru cuplul CP utilizat, valoarea maximă E_{max} precum și diferența $(E_{max} - E)/Q_0 p$. La calculele efectuate am considerat perioada de înlocuire a unei pompe $T = 8$ ore și am ales $C = 2500$ lei/pompă, $p = 800$ lei/m³.

Se vede pentru valorile considerate la toate cele patru sonde analizate de pe o structură petrolieră că există posibilități reale de a mări eficiența pompajului de adîncime prin alegerea parametrului dimensional k al cuplului CP egal cu k_{max}.

Alegerea oricărei valori a parametrului dimensional k diferită de aceea optimă și anume fie un joc mai redus sau mai mare între piesele

Tabelul 2

Sonda	E	k_{max}	E_{max}	$(E_{max} - E)/Qp$, lei/an
S_1	0,997969	0,9455	0,999234	2288,5
S_2	0,998055	0,9536	0,999220	2268,9
S_3	0,998531	0,9548	0,999293	2779,4
S_4	0,998801	0,9609	0,999302	3647,8

componente ale cuplului *CP* duce inevitabil la o diminuare a eficienței pompajului.

Cu toate că am efectuat unele calcule foarte orientative, am indicat posibilitățile reale de a mări eficiența pompajului de adîncime prin alegerea unui cuplu *CP* potrivit fiecărei sonde de pe o structură petrolieră din țara noastră.

6. CONCLUZII

Alegerea cuplului *CP* prezintă un mare interes practic pentru exploatarea sondelor în pompaj. Un joc foarte redus între pistonul și cilindrul pompei duce la o uzură accentuată a acestor piese mai ales atunci cînd fluidul extras conține și suspensii solide. În cazul unui joc mare între piese face să se mărească durata între două schimburi de pompe dar, în același timp, printre piesele componente ale cuplului *CP* se realizează și o scurgere mare de petrol.

Pentru fiecare structură petrolieră există posibilitatea optimizării cuplului *CP* astfel ca unitatea productivă să rentabilizeze la maximum pompajul de adîncime.

Primit în redacție la 1 decembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. N. PETRE, P. MILITARU-CHIȚU, *Extracția țițeiului prin pompaj cu prăjini*, Edit. tehnică, București, p. 344—357.
2. AL. D. STAN, I. TUDOR, D. STOIANOVICI, *Alunecarea exactă la pompele de adîncime (I)*, Mine, petrol și gaze, **39**, 3 (1988).
3. C. ȘERBAN, *Considerente constructive în fabricația noilor pompe de extracție cu cilindru lung și piston metalizat*, Mine, petrol și gaze, **37**, 11 (1986).

DETERMINAREA DURABILITĂȚII PRĂJINILOR DE FORAJ PE BAZA CONCEPTELOR MECANICII RUPERII MATERIALELOR

de V. ULMANU și GH. ZECHERU

Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Estimarea durabilității elementelor garniturii de foraj este esențială pentru desfășurarea lucrărilor de foraj în condiții de deplină siguranță și economicitate. Pornind de la analiza principalelor etape ce trebuie parcurse pentru evaluarea analitică a durabilității elementelor garniturii de foraj, lucrarea prezintă modalitățile de utilizare a conceptelor și criteriilor mecanicii ruperii materialelor în calculele privind determinarea duratei de utilizare în siguranță sau degradării cumulate a prăjinilor de foraj. Exemplele numerice ce însoțesc dezvoltările teoretice evidențiază clar că metodele bazate pe conceptele și criteriile din mecanica ruperii permit folosirea celor mai pertinente scheme de calcul și obținerea unor rezultate veridice la determinarea analitică a durabilității prăjinilor de foraj.

1. ETAPELE DETERMINĂRII ANALITICE A DURABILITĂȚII PRĂJINILOR DE FORAJ

Evaluarea pe cale analitică a durabilității elementelor unui sistem mecanic — în particular, a componentelor garniturii de foraj — necesită cunoașterea sub toate aspectele (loc de aplicare, intensități, caracterul variației în timp etc.) a solicitărilor la care este supus sistemul în exploatare, adoptarea unei ipoteze acceptabile de degradare cumulativă (în decursul diferitelor etape de lucru) a componentelor sistemului și cunoașterea unor caracteristici (determinate experimental) care să exprime cît mai fidel comportarea materialelor acestor componente la acțiunea solicitărilor variabile.

Corectitudinea rezultatelor determinărilor analitice privind durabilitatea elementelor unui sistem mecanic este influențată esențial de modul în care este îndeplinită cea de-a treia dintre cerințele formulate anterior. Astfel, calculele obișnuite de durabilitate, ce utilizează pentru aprecierea comportării la solicitări variabile a pieselor curbele de durabilitate (Wöhler) ale materialului acestora (determinate cu epruvete și în condiții de solicitare standard), asociate cu factori de corecție (ce iau în considerație forma concentratorilor de tensiuni existenți în piese, dimensiunile și starea suprafețelor pieselor), conduc la rezultate incerte, estimările de durabilitate fiind uneori neacoperitoare, iar alte ori neeconomice, [16], [22]. Utilizarea în calcule a curbelor Wöhler ale pieselor reale, determinate prin experimentări efectuate direct pe piese, în condiții de solicitare stabilite în corelație cu cele la care sînt supuse piesele în exploatare, conduce la determinări precise ale durabilității, [21]; acest mod de lucru este însă greu de generalizat datorită costurilor ridicate ale standurilor de încercări, aparaturii de măsură, pieselor de probă și experimentărilor necesare obținerii unor astfel de curbe, [16], [21]. Calculele moderne de durabilitate sînt bazate pe metodele teoretico-experimentale ale mecanicii ruperilor, care permit aprecierea comportării la solicitări variabile a pieselor prin analiza zonelor critice ale acestora, zone situate în vecinătatea concentratorilor de tensiuni de tip mecanic (crestături, orificii, schimbări de secțiune etc.) sau de tipul discontinuităților fizice

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 3, 1989, P. 315—332

ale materialului (incluziuni, porozități, fisuri etc.); în calculele de acest fel se utilizează o serie de caracteristici mecanice ale materialului din care sînt confecționate piesele, determinate pe epruvete și în condiții de încercare specifice metodelor mecanicii ruperilor, [4], [9], [13].

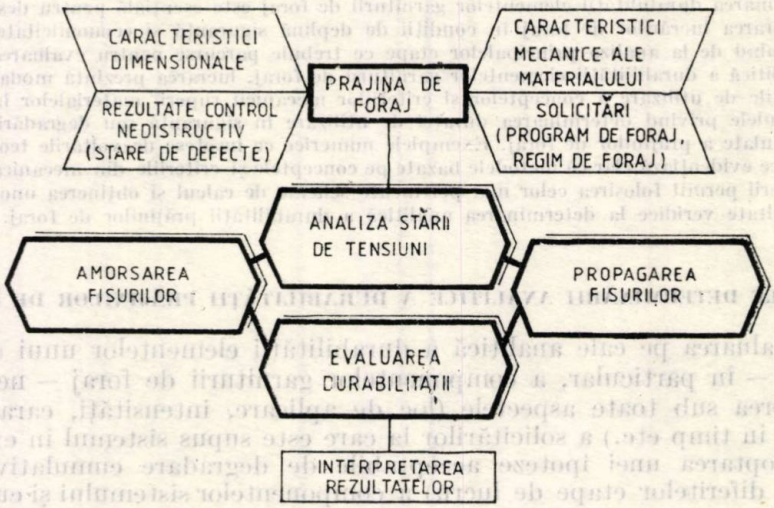


Fig. 1

Aspectele prezentate au condus la ideea realizării unui algoritm de determinare analitică a durabilității prăjinilor de foraj bazat pe aplicarea conceptelor și relațiilor din mecanica ruperii materialelor. Algoritmul are în structură mai multe etape specifice de analiză și calcul, așa cum se prezintă în schema din figura 1; principalele aspecte ce trebuie avute în vedere și relațiile de calcul ce pot fi aplicate la parcurgerea fiecăreia din etapele principale ale algoritmului sînt prezentate în continuare.

2. ANALIZA STĂRII DE TENSIUNI DIN PRĂJINILE DE FORAJ

În condițiile forajului de medie și mare adîncime, prăjinile de foraj și celelalte elemente din alcătuirea garniturilor de foraj sînt supuse unor solicitări complexe, unele dintre componentele sistemului de solicitare avînd caracter variabil, [16]. Astfel, la forajul rotativ — tehnologie aplicată cu precădere la realizarea sondelor de petrol și gaze — prăjinile de foraj sînt solicitate în principal la tracțiune prin acțiunea greutății proprii a garniturii de foraj, la torsiune datorită momentului de torsiune aplicat sapei de foraj prin intermediul garniturii de foraj, la încovoiere datorită devierilor găurii de sondă (produse accidental sau prin practicarea unui foraj dirijat) sau ca urmare a apariției unor fenomene de pierdere a stabilității prăjinilor și la presiune interioară și exterioară datorită circulației fluidului de foraj. Deoarece, pentru o anumită prăjină, greutatea garniturii de foraj susținută, presiunea de circulație a noroiului de foraj și

momentul de torsiune transmis la sapă în cursul unui marș nu se modifică substanțial, solicitările datorită acestora pot fi admise ca fiind constante, sub acțiunea lor dezvoltîndu-se în prăjina considerată o stare de tensiuni a cărei tensiune echivalentă, σ_{ech}, calculată la suprafața exterioară a prăjinii, pe baza teoriei energiei potențiale de variație a formei, are expresia, [1]:

$$\sigma_{ech}^2 = \sigma_t^2 + 3 \cdot p_i/[(D/d)^2 - 1]^2 + 3 \cdot \tau^2 \qquad (1)$$

în care σ_t este tensiunea axială (de tracțiune) din prăjină, p_i — presiunea noroiului de foraj în interiorul prăjinii, τ — tensiunea tangențială din prăjină datorită solicitărilor de torsiune, iar D și d reprezintă diametrul exterior, respectiv interior al prăjinii analizate. Datorită rotirii garniturii de foraj în gaura de sondă prezentînd devieri (produse din motivele precizate anterior), solicitările la încovoiere ale prăjinilor de foraj au caracter alternant simetric, tensiunea maximă din încovoiere, σ_i, în vecinătatea racordurilor speciale ale unei prăjini — stabilită ținînd seama de intensitatea devierii găurii de sondă în zona de lucru a prăjinii respective și de prezența în aceasta a tensiunilor generate de solicitările la tracțiune — fiind dată de relația:

$$\sigma_i = \frac{E \cdot D \cdot c}{2} \cdot \frac{\alpha \cdot L}{\mathrm{th}(\alpha \cdot L)}, \qquad (2)$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal (Young) al materialului din care este confecționată prăjina considerată, c — curbura găurii de sondă, L — semilungimea prăjinii de foraj, iar α este definit prin relația, [16]:

$$\alpha = 4 \cdot \sqrt{\sigma_t/[E \cdot (D^2 - d^2)]}. \qquad (3)$$

Cunoscînd (sau adoptînd) distribuția devierilor pe lungimea unei găuri de sondă (distribuție diferită de la o sondă la alta și avînd caracter aleator în cazul cînd devierile sînt accidentale), se poate stabili prin utilizarea relației (2) legea de repartiție a tensiunilor σ_i pe lungimea garniturii de foraj.

Considerînd (așa cum se întîmplă în realitate) acțiunea cumulată a solicitărilor cu caracter constant și a celor variabile, rezultă că solicitarea globală a fiecărei prăjini din alcătuirea unei garnituri de foraj este ciclică, ciclurilor de solicitare corespunzîndu-le: tensiunea medie $\sigma_m = \sigma_t$, amplitudinea tensiunilor $\sigma_a = \sigma_i$, tensiunea maximă $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_t + \sigma_i$, tensiunea minimă $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a = \sigma_t - \sigma_i$ și coeficientul de asimetrie $\sigma_{min}/\sigma_{max} = (\sigma_t - \sigma_i)/(\sigma_t + \sigma_i)$.

Stările de tensiuni ce se dezvoltă în prăjinile de foraj sub acțiunea solicitărilor din exploatare nu pot fi caracterizate complet cu ajutorul, relațiilor precizate anterior deoarece acestea nu iau în considerație concentrările de tensiuni induse de defectele inevitabil prezente în prăjini (datorită formelor constructive impuse de cerințele funcționale, tehnologiilor de fabricație, manipulărilor repetate, utilizărilor anterioare etc.). Zonele din

MUZEUL TEHNIC BUCUREȘTI 1963

prăjini în care își manifestă acțiunea concentrările de tensiuni sînt cele mai susceptibile la inițierea și dezvoltarea proceselor de rupere și, ca urmare, comportarea în exploatare a unei astfel de piese nu poate fi descrisă complet decît prin analiza comportării acestor zone critice, fapt ce necesită caracterizarea cît mai fidelă a stărilor de tensiuni și deformații corespunzătoare lor. Satisfacerea acestei necesități este posibilă prin utilizarea unora dintre soluțiile dezvoltate în mecanica ruperii pentru stările de tensiuni și deformații din jurul discontinuităților fizice de tip fisură existente în corpuri (piese) cu diferite configurații, confecționate din materiale cu comportare elastică sau elasto-plastică la solicitările mecanice, [4], [12], [13]. Pentru evidențierea soluțiilor adecvate studierii zonelor critice din prăjinile de foraj se folosesc schemele de calcul prezentate în figura 2, întocmite acceptînd următoarele ipoteze:

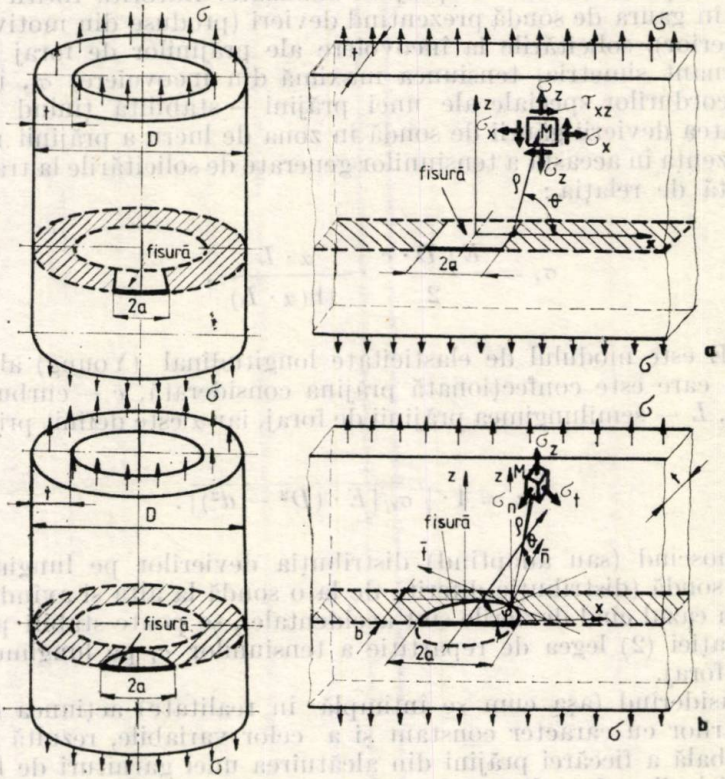


Fig. 2

— defectele reale din corpul prăjinilor de foraj (crestături, amprente de bacuri, micro sau macrofisuri, incluziuni etc.) se pot asimila cu defecte plane de tip fisură echivalente din punctul de vedere al concentrării tensiunilor și deformațiilor (pentru determinarea configurației și dimensiunilor fisurilor echivalente cu diferite defecte reale existente în piese se pot folosi indicațiile din [24]);

— orice defect plan de tip fisură din corpul prăjinilor de foraj evoluează prin deschidere — modul I de extindere, [4], [13] — deplasările

punctelor de pe suprafețele fisurii sub acțiunea stării de tensiuni determinată de solicitările mecanice exterioare fiind normale la planul fisurii (devine astfel evident că pentru calculul durabilității prăjinilor de foraj este importantă considerarea zonelor critice prezentînd fisuri cu planul amplasat normal pe direcția solicitărilor maxime din exploatare);

— stările de tensiuni și deformații la vîrful fisurilor din corpul unei prăjini de foraj sînt identice cu cele induse de prezența acelorași fisuri într-o placă plană echivalentă (obținută prin desfășurarea plană a corpului prăjinii și avînd aceeași grosime cu aceasta).

Schema de calcul din figura 2 arată că pentru caracterizarea stărilor de tensiuni și deformații în zonele critice ale prăjinilor de foraj se pot folosi soluțiile stabilite în mecanica ruperii pentru cazul plăcilor plane cu fisuri; în conformitate cu aceste soluții, [4], [13], componentele stării de tensiuni la vîrful fisurilor din corpul prăjinilor de foraj sînt date de relații de forma:

$$\sigma_j = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \rho}} \cdot K_I \cdot f_{Ij}(\theta), \tag{4}$$

iar deplasările — de relații de forma:

$$u_j = \frac{1}{2 \cdot G} \sqrt{\frac{\rho}{2 \cdot \pi}} \cdot K_I \cdot g_{Ij}(\theta), \tag{5}$$

j fiind indicele prin care se precizează direcția de acțiune a eforturilor unitare (vezi notațiile din fig. 2 ale eforturilor unitare corespunzătoare stării de tensiuni într-un punct curent M din vecinătatea frontului fisurii) sau de realizare a deplasărilor.

În relațiile (4), (5), ρ și θ au semnificațiile geometrice precizate în figura 2, f_{Ij} și g_{Ij} sînt funcții de variabila θ cu expresii analitice cunoscute, [4], [13], G este modulul de elasticitate transversal al materialului din care sînt confecționate prăjinile, iar K_I — un parametru caracteristic al concentrării tensiunilor la vîrful fisurilor din piesele analizate, numit „factorul de intensitate al tensiunilor". Expresia analitică generală a factorului K_I este, [4], [13]:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a_f \cdot \beta(a_f, L_i)}, \tag{6}$$

în care a_f este semilungimea fisurii (măsurată pe direcția în care fisura se extinde), β — o funcție avînd ca variabile dimensiunile fisurii și dimensiunile caracteristice, L_i, ale piesei ce conține fisura, iar σ — intensitatea eforturilor unitare ce solicită piesa în zona de amplasare a fisurii (determinată considerînd piesa lipsită de defecte).

Dacă prăjina de foraj prezintă un defect de tip fisură pătrunsă de lungimea $2a$ (vezi schema din fig. 2 *a*), expresia factorului K_I are forma particulară, [13]:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{w \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot a/w)}, \tag{7}$$

obținută considerînd în (6) $a_f = a$ și $\beta = (\pi \cdot a/w)^{-1} \cdot \operatorname{tg}(\pi \cdot a/w)$.

În cazul cînd se consideră că prăjina de foraj analizată conține un defect de tip fisură semieliptică cu pătrunderea $b < t$ (vezi schema din fig. 2*b*), factorul K_I se poate determina cu precizie suficientă folosind relația, [4]:

$$K_I = (\sigma/\text{Ø}) \cdot \sqrt{\pi \cdot b \cdot (1 - e_f^2 \cdot \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \tag{8}$$

în care e_f este excentricitatea elipsei ce conține frontul fisurii, $e_f = \sqrt{(a^2 - b^2)}/a$, iar Ø este integrala eliptică completă de ordinul al doilea, [4]:

$$\text{Ø} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - e_f^2 \cdot \sin^2 \varphi} \, d\varphi, \tag{9}$$

ce poate lua valori între $\text{Ø} = 1$ (pentru $b \ll a$ și $e_f \to 1$) și $\text{Ø} = \pi/2$ (pentru $b = a$ și $e_f = 0$). Pentru calculul durabilității unei prăjini de foraj prezintă importanță considerarea valorii maxime a factorului K_I, ce se realizează — așa cum rezultă analizînd relația (8) — pe direcția pătrunderii maxime a fisurii în corpul prăjinii ($\varphi = \pi/2$) și este dată de relația:

$$K_I = (\sigma/\text{Ø}) \cdot \sqrt{\pi \cdot b}. \tag{10}$$

Relația (10) a fost corectată ținînd seama că fisura eliptică are axa mare cuprinsă în planul suprafeței libere a piesei (fapt neluat în considerație la stabilirea relației (8) și care modifică substanțial efectul de concentrare a tensiunilor indus de prezența defectului), obținîndu-se următoarea expresie pentru valoarea maximă a factorului K_I, [4]:

$$K_I = 1{,}1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot b/[\text{Ø}^2 - 0{,}212 \cdot (\sigma/R_e)^2]} = 1{,}1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot b/Q(\sigma)}, \tag{11}$$

în care R_e este limita de curgere a materialului din care este confecționată piesa (se poate stabili cu ușurință că funcția de variabilă $x = \sigma/R_e$, $0 < x < 1$, definită prin relația (11) este strict crescătoare).

Schemele de calcul din figura 2 și grupul de relații (4)—(11) permit stabilirea stărilor de tensiuni și deformații în zonele critice ale prăjinilor de foraj. Analizînd structura relației (4) rezultă că tensiunile maxime corespunzătoare unei zone critice se realizează în imediata vecinătate a frontului fisurii existente în zona respectivă, măsura concentrării tensiunilor la vîrful fisurii fiind dată de mărimea factorului K_I; pornind de la această observație, condiția de neinițiere a unui proces de propagare instabilă a unei fisuri are forma, [13]:

$$K_I \leqslant K_{Ic}, \tag{12}$$

K_{Ic} este un parametru caracteristic al tenacității la rupere a materialului din care este confecționată piesa analizată, numit „factorul critic de inten-

sitate al tensiunilor", ce se determină prin încercări mecanice speciale (STAS 9760, ASTM 399, AFNOR A 03—180) sau se estimează cu ajutorul caracteristicilor determinate prin încercările mecanice clasice (tracțiune, încovoiere prin șoc), [24]. În tabelul 1 sînt prezentate valorile K_{Ic} corespunzătoare cîtorva oțeluri, unele de tipul celor utilizate la realizarea prăjinilor de foraj.

Sub formă de egalitate, condiția (12) poate fi utilizată pentru determinarea lungimii pînă la care o fisură existentă într-o zonă critică a unei prăjini de foraj poate evolua prin propagare stabilă (lentă); această lungime (numită „dimensiunea critică a fisurii", deoarece atingerea ei declanșează ruperea bruscă a piesei) este în cazul fisurii pătrunse:

$$a_{cr} = (w/\pi) \cdot \operatorname{arctg} [(K_{Ic}/\sigma)^2/w], \tag{13}$$

iar în cazul fisurii semieliptice cu pătrunderea $b < t$ (ce se presupune că își conservă excentricitatea în cursul propagării):

$$b_{cr} = (K_{Ic}/\sigma)^2 \cdot [Q(\sigma)/(1{,}21 \cdot \pi)]. \tag{14}$$

Metoda și relațiile prezentate, propuse pentru analiza stărilor de tensiuni în zonele critice ale prăjinilor de foraj, se pot utiliza (așa cum s-a precizat și la întocmirea schemelor de calcul) numai cînd defectele constatate în zonele respective au caracteristicile proprii unor fisuri (defectele sînt plane, raza de rotunjire la vîrful acestora fiind neglijabilă). Este posibil însă ca starea defectologică a unor prăjini de foraj să prezinte numai defecte cu dezvoltare spațială, cu raza la vîrf $\rho_d > 0$ (defecte ce nu pot fi asimilate cu discontinuități fizice de tip fisură); în această situație, pentru caracterizarea efectului de concentrator al unui defect, se determină intensitatea efortului unitar maxim la vîrful defectului, σ^*_{max}, folosind relația, [4], [14]:

$$\sigma^*_{max} = k_t \cdot \sigma, \tag{15}$$

în care k_t este „coeficientul de concentrare a tensiunilor" (a cărui mărime se poate stabili cunoscînd caracteristicile geometrice ale defectului și piesei, [2], [14]).

3. CRITERII ȘI RELAȚII PENTRU DETERMINAREA DURABILITĂȚII PRĂJINILOR DE FORAJ

Analizînd situațiile considerate anterior privind caracterul și configurația defectelor ce pot exista în corpul prăjinilor de foraj rezultă că, în cazul cel mai general, pentru determinarea durabilității în exploatare a unei prăjini (exprimată prin numărul ciclurilor de solicitare pînă la rupere, N) trebuie considerate următoarele etape:

I. Etapa de amorsare a fisurii; dacă prăjina de foraj analizată prezintă în zona critică cea mai periculoasă un defect superficial neasimilabil cu o fisură ($\rho_d > 0$), în această etapă se produce, sub acțiunea solicitărilor variabile, trecerea defectului la starea de fisură (de tip semieliptic, cu $b < t$), într-un număr de cicluri N_a.

Tabelul 1

Oțelul	Compoziția chimică (elemente principale)	Caracteristici mecanice			Amorsarea fisurilor $N_a = C_{ma}(\Delta K_I/\sqrt{\varrho_d})^{-n_a}$ ●			Propagarea fisurilor $\frac{da}{dN} = C_{mp}(\Delta K_I)^{n_p}$ ● ●		
		R_m, N/mm²	R_e, N/mm²	K_{Ic} N/mm$^{3/2}$	C_{ma}	n_a	[ ]	C_{mp}	n_p	[ ]
Ni—Cr—Mo îmb.	0,37%C; 4,5%Ni; 1,80%Cr; 0,5%Mo	1580	1320	2700	$4,88 \cdot 10^{18}$	4,51	[2]	$1,52 \cdot 10^{-11}$	2,352	[12]
Cr—Mo îmb.	0,35%C; 1,0%Cr; 0,25%Mo	1150*	1020*	3500	$1,00 \cdot 10^{16}$	3,77	[2]	$5,84 \cdot 10^{-11}$	2,133	[23]
		—	620	1950	—	—		$2,11 \cdot 10^{-14}$	3,160	[19]
Mn—Mo	0,25%C; 1,4%Mn; 0,52%Mo	1100	—	3200	—	—		$2,51 \cdot 10^{-11}$	2,200	[15]
Ni—Co	0,25%C; 9,0%Ni; 4,0%Co	—	1250	5300	—	—		$6,32 \cdot 10^{-11}$	2,358	[15]
oțel carbon	0,23%C	308	220	2500	$1,63 \cdot 10^{10}$	4,00	[8]	$2,75 \cdot 10^{-17}$	4,283	[11]

* corespunde oțelurilor grad S—135; ● N_a — cicluri, $\Delta K_I/\sqrt{\varrho_d}$ — N/mm²; ● ● da/dN — mm/ciclu, ΔK_I — N/mm$^{3/2}$; [ ] sursa bibliografică din care s-au luat datele experimentale necesare definirii regresiilor pentru N_a și da/dN.

II. Etapa de propagare a fisurii; fisura superficială de tip semieliptic amorsată sau existentă în zona critică cea mai periculoasă a prăjinii de foraj se dezvoltă în această etapă prin propagare stabilă, într-un număr de cicluri N_p, după care are loc ruperea bruscă a prăjinii. Dacă $b_{cr} < t$ — ruperea bruscă a prăjinii de foraj va surveni înainte ca fisura să pătrundă pe toată grosimea prăjinii, dacă $b_{cr} \geqslant t$ și a $a_{cr} < b_{cr}/(1 - e_f^2)^{\frac{1}{2}}$ — ruperea se va produce imediat ce fisura a atins suprafața interioară a prăjinii, iar dacă $b_{cr} > t$ și $a_{cr} > b_{cr}/(1 - e_f^2)^{\frac{1}{2}}$ — fisura semieliptică trece prin propagare stabilă la starea de fisură pătrunsă, care se dezvoltă lent pînă la atingerea dimensiunii a_{cr} la care apare ruperea bruscă (în acest ultim caz, N_p trebuie totuși considerat numai pînă la pătrunderea fisurii pe toată grosimea prăjinii, cînd se poate produce pierderea etanșeității și prăjina devine inutilizabilă).

3.1. AMORSAREA FISURILOR ÎN PRĂJINILE DE FORAJ

Pentru stabilirea parametrilor de care depinde numărul de cicluri N_a în care un defect (cu $\rho_d > 0$) existent în corpul unei prăjini de foraj trece în starea de fisură ($\rho_d \to 0$) s-a considerat ca model cazul orificiului eliptic existent într-o placă infinită solicitată la tracțiune. Cînd $c \ll a$, orificiul eliptic are configurația unei crestături, iar cînd (sub acțiunea solicitărilor la care e supusă placa) la extremitățile axei mari apar microfisuri, crestătura devine echivalentă cu o fisură pătrunsă (fig. 3). În cazul

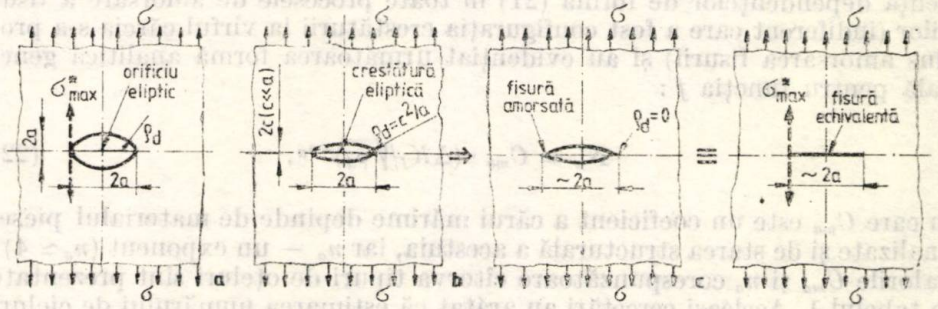


Fig. 3

general, efortul unitar la extremitatea axei mari a orificiului eliptic (pe direcția solicitării la tracțiune a plăcii) este dat de relația, [4]:

$$\sigma^*_{max} = \sigma \cdot (1 + 2 \cdot a/c). \tag{16}$$

Cînd $c \ll a$, raza de curbură la extremitatea axei mari a crestăturii eliptice este $\rho_d = c^2/a$ și relația (16) devine:

$$\sigma^*_{max} = \sigma \cdot [1 + 2 \cdot (a/\rho_d)^{\frac{1}{2}}] \simeq 2 \cdot \sigma \cdot (a/\rho_d)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Pentru crestătura degenerată în fisură, factorul de intensitate al tensiunilor are expresia (obținută din (7) cînd $w \to \infty$):

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}, \tag{18}$$

care în conjuncție cu (17) conduce la relația:

$$\sigma^*_{max} = 2 \cdot K_I / \sqrt{\pi \cdot \rho_d}. \tag{19}$$

Considerînd că placa model conținînd crestătura semieliptică este solicitată variabil, tensiunea σ modificîndu-și intensitatea în cursul fiecărui ciclu de solicitare între valorile extreme σ_{min}, σ_{max}, rezultă că variația într-un ciclu a efortului unitar maxim la vîrful crestăturii este dată de relația:

$$\Delta\sigma^*_{max} = 2 \cdot (K_{Imax} - K_{Imin}) / \sqrt{\pi \cdot \rho_d} = 2 \cdot \Delta K_I / \sqrt{\pi \cdot \rho_d}. \tag{20}$$

Acceptînd că mărimea $\Delta\sigma^*_{max}$ este cea care influențează primordial desfășurarea procesului de amorsare a fisurilor, pe baza relației (20), s-a avansat ideea că numărul de cicluri N_a poate fi pus în relație funcțională cu parametrul $\Delta K_I / \sqrt{\rho_d}$:

$$N_a = f(\Delta K_I / \sqrt{\rho_d}). \tag{21}$$

Cercetările experimentale întreprinse, [2], [8], au confirmat existența dependențelor de forma (21) în toate procesele de amorsare a fisurilor (indiferent care a fost configurația crestăturii la vîrful căreia s-a produs amorsarea fisurii) și au evidențiat următoarea formă analitică generală pentru funcția f:

$$N_a = C_{ma} \cdot (\Delta K_I / \sqrt{\rho_d})^{-n_a}, \tag{22}$$

în care C_{ma} este un coeficient a cărui mărime depinde de materialul piesei analizate și de starea structurală a acestuia, iar n_a — un exponent ($n_a \simeq 4$); valorile C_{ma} și n_a corespunzătoare cîtorva tipuri de oțeluri sînt prezentate în tabelul 1. Aceleași cercetări au arătat că estimarea numărului de cicluri N_a cu relații de tipul (22) este acceptabilă numai dacă la vîrful concentratorilor din piesele analizate nu apar, în cursul procesului de amorsare a fisurilor, enclave plastice de dimensiuni semnificative.

3.2. PROPAGAREA FISURILOR ÎN PRĂJINILE DE FORAJ

Comportarea în etapa de propagare a fisurilor a materialului unei piese supuse solicitărilor variabile și, ca urmare, numărul de cicluri N_p se apreciază curent folosind drept criteriu viteza de propagare a fisurilor da_f/dN.

Acceptînd că procesul de propagare a unei fisuri este influențat primordial de mărimea variației în fiecare ciclu de solicitare a efortului unitar maxim la vîrful fisurii, $\Delta\sigma^*_{max}$, aflată în dependență directă cu variația ciclică a factorului de intensitate a tensiunilor $\Delta K_I = K_{I max} - K_{I min}$, a rezultat următoarea relație funcțională generală pentru viteza de propagare stabilă a fisurilor, [8], [12], [15]:

$$\frac{da_f}{dN} = g(\Delta K_I). \tag{23}$$

Prin cercetări experimentale, [5], [6], [15], s-a confirmat existența dependențelor de forma (23) și s-a evidențiat că pentru funcția g se poate considera următoarea expresie analitică generală:

$$\frac{da_f}{dN} = C_{mp} \cdot (\Delta K_I)^{n_p}, \tag{24}$$

în care coeficientul C_{mp} și exponentul n_p depind în principal de materialul piesei analizate și de starea structurală a acestuia; în tabelul 1 sînt prezentate valorile C_{mp} și n_p pentru cîteva tipuri de oțeluri.

Cercetări experimentale mai detaliate au reliefat și alte aspecte privind procesul de propagare a fisurilor:

— la aceeași amplitudine a solicitărilor ciclice, viteza de propagare a fisurilor crește odată cu tensiunea medie de tracțiune a ciclurilor de solicitare, respectiv odată cu mărirea coeficientului de asimetrie $R = \sigma_{min}/\sigma_{max} = K_{min}/K_{max}$; tensiunile medii de compresiune ($\sigma_m < 0$) nu au efect asupra vitezei de propagare a fisurilor, [9], [19];

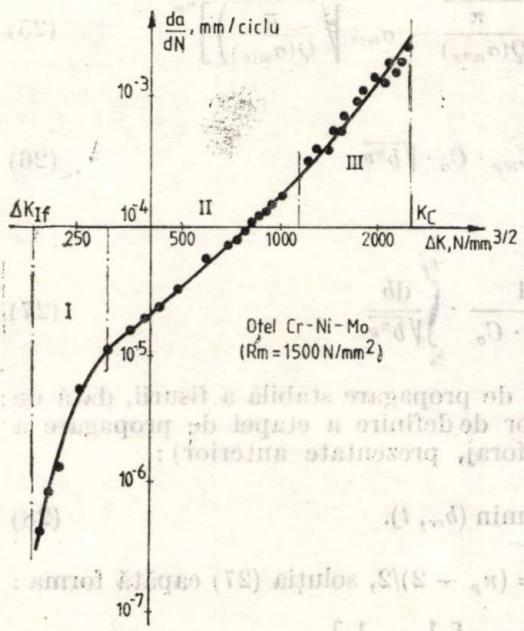


Fig. 4

— funcția de corelație dintre viteza de propagare a fisurilor și ΔK_I are expresia dependentă (ca formă analitică) de valoarea acestui parametru; pentru fiecare material (așa cum se arată în fig. 4 pentru cazul unui oțel) există o valoare $\Delta K_I = \Delta K_{If}$, numită „prag de fisurare", sub care propagarea fisurilor nu se produce și trei domenii de valori ale parametrului ΔK_I — situate în intervalul ΔK_{If}, K_{Ic} — cu forme diferite ale funcției g, forma dată de (24) descriind cu fidelitate procesul de propagare a fisurilor numai cînd

solicitările variabile se caracterizează prin variații ciclice ale parametrului ΔK_I situate în domeniul II, [4], [15];

— dacă între ciclurile de solicitare (cu amplitudine constantă) a unei piese în care se propagă o fisură se intercalează (accidental sau intenționat) cicluri de suprasolicitare, după aceste cicluri se produce un fenomen de întîrziere a revenirii la viteza de propagare a fisurii corespunzătoare solicitării de bază, [4], [17].

Aceste aspecte au condus la propunerea unor noi relații analitice pentru viteza de propagare a fisurilor — majoritatea obținute prin completarea formei (24) a funcției g cu factori sau termeni conținînd și alți parametrii (în afară de ΔK_I) de influență ai procesului de propagare a fisurilor (R, ΔK_{If}, K_{Imax}), [2] — și la formularea unor ipoteze, metode și relații pentru explicarea fenomenelor de întîrziere a propagării fisurilor după suprasolicitări și evaluarea influenței acestora asupra numărului de cicluri N_p. Deoarece metodele propuse prezintă domenii restrinse de aplicabilitate, iar relațiile aferente utilizării lor conțin factori greu de evaluat cantitativ în diversele cazuri de interes practic, în prezent cele mai utilizate metode de descriere cantitativă a proceselor de propagare a fisurilor sub acțiunea solicitărilor variabile se bazează tot pe relații de forma (24).

Astfel, pentru evaluarea numărului de cicluri N_p în cazul unei prăjini de foraj se consideră că procesul de propagare afectează o fisură semieliptică de adîncime $a_f = b_0$ (preexistentă sau obținută în urma unui proces de amorsare), situată în zona critică cea mai periculoasă a prăjinii. Admițînd că viteza de propagare a fisurii este exprimată de o relație de forma (24), explicitînd parametrul ΔK_I cu ajutorul relației (11) și făcînd notația :

$$C_\sigma = \left[1,1 \cdot \left(\sigma_{max} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{Q(\sigma_{max})}} - \sigma_{min} \sqrt{\frac{\pi}{Q(\sigma_{min})}}\right)\right]^{n_p}, \tag{25}$$

rezultă ecuația diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}N} = C_{mp} \cdot C_\sigma \cdot \sqrt{b^{n_p}}, \tag{26}$$

cu soluția de forma :

$$N_p = \frac{1}{C_{mp} \cdot C_\sigma} \cdot \int_{b_0}^{b_f} \frac{\mathrm{d}b}{\sqrt{b^{n_p}}} \tag{27}$$

în care, b_f este adîncimea maximă de propagare stabilă a fisurii, dată de relația (stabilită pe baza criteriilor de definire a etapei de propagare a fisurilor în corpul prăjinilor de foraj, prezentate anterior) :

$$b_f = \min (b_{cr}, t). \tag{28}$$

Efectuînd integrarea și notînd $n = (n_p - 2)/2$, soluția (27) capătă forma :

$$N_p = \frac{1}{n \cdot C_{mp} \cdot C_\sigma} \cdot \left[\frac{1}{b_0^n} - \frac{1}{b_f^n}\right], \tag{29}$$

ce poate fi utilizată pentru evaluarea numărului de cicluri al etapei de propagare a fisurilor în corpul prăjinilor de foraj.

3.3. EVALUAREA DURABILITĂȚII PRĂJINILOR DE FORAJ

Metodele anterior prezentate permit evaluarea cantitativă a durabilității în exploatare a prăjinilor de foraj :

$$N = N_a + N_p. \tag{30}$$

Etapele ce trebuie parcurse pentru determinarea durabilității unei prăjini de foraj sînt :

A. Se analizează rezultatele controlului nedistructiv al prăjinii și se definesc toate caracteristicile zonelor critice ale acesteia (tip de defecte, dimensiuni, amplasare) ; deoarece pentru prăjinile de foraj se folosesc de obicei metode de control bazate pe principii magnetice, care pot detecta defecte cu adîncimea minimă $b_0 = 0{,}1 \cdot t < 0{,}125 \cdot t$ ($0{,}125 \cdot t$ — adîncimea maximă a defectelor superficiale admise în prăjinile de foraj, [25]), dacă la controlul nedistructiv nu sînt înregistrate defecte, se poate presupune în calculele de durabilitate existența unui defect de tip fisură semieliptică, cu $b_0 = 0{,}1 \cdot t$, amplasat în corpul prăjinii în vecinătatea unui racord special (zona cea mai puternic solicitată în exploatare).

B. Se precizează sarcinile de lucru ale prăjinii și se definesc caracteristicile ciclurilor de solicitare variabilă la care este supusă prăjina în cursul exploatării.

C. Dacă defectul de cea mai mare acuitate existent în corpul prăjinii analizate are caracteristicile unei crestături, se stabilește cu relația (22) numărul de cicluri N_a necesar amorsării unei fisuri la vîrful acestuia (evident, dacă prăjina conține un defect plan asimilabil cu o fisură, $N_a = 0$).

D. Pentru fisura din corpul prăjinii (preexistentă sau obținută printr-un proces de amorsare) se stabilește folosind relația (11) mărimea parametrului ΔK_I și se compară cu valoarea „pragului de fisurare" dată de relația experimentală, [4] :

$$\Delta K_{If} = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot E - 0{,}165 \cdot R_e \tag{31}$$

(ΔK_{If} rezultă în $N \cdot mm^{-3/2}$, cînd R_e și E se introduc în $N \cdot mm^{-2}$) ; dacă $\Delta K_I < \Delta K_{If}$, ciclurile de solicitare nu pot produce propagarea fisurii în prăjina analizată (și calculele se întrerup în această etapă), iar dacă $\Delta K_I \geqslant \geqslant \Delta K_{If}$, se stabilește dimensiunea critică a fisurii, b_{cr}, cu relația (14) și se determină cu criteriul (28) mărimea parametrului b_f.

E. Se evaluează cu relația (29) numărul de cicluri N_p, corespunzător propagării stabile a fisurii în prăjina analizată.

F. Se determină durabilitatea în exploatare a prăjinii folosind relația (30).

Metodele de determinare a componentelor N_a și N_p ale durabilității pot fi utilizate și pentru evaluarea degradării cumulate a unei prăjini de foraj supuse succesiv unor secvențe de solicitare variabilă cu caracte-

ristici diferite ale ciclurilor. Pentru aceasta se aplică criteriul Palmgren-Miner, [16], și rezultă că degradarea prăjinii într-o secvență de solicitare este proporțională cu numărul de cicluri al secvenței respective, iar degradarea cumulată a prăjinii în toate secvențele de solicitare, D_c, este dată de relația :

$$D_c = \sum_{j=1}^{s} D_{cj} = \sum_{j=1}^{s} (n_j/N_j), \tag{32}$$

în care s reprezintă numărul secvențelor de solicitare variabilă a prăjinii, n_j — numărul de cicluri de solicitare în secvența j ($j = 1, 2, \ldots, s$), iar $N_j = N_{aj} + N_{rj}$ — durabilitatea prăjinii în cazul ipotetic al solicitării variabile a acesteia numai cu cicluri având caracteristicile corespunzătoare celor din secvența j. Aplicarea unei succesiuni de secvențe de solicitare variabilă nu va conduce la ruperea prăjinii analizate, dacă $D_c < 1$.

Definirea cu relația (32) a degradării cumulate a unei prăjini de foraj este corespunzătoare atunci cînd (în stare inițială) prăjina prezintă în zona critică cea mai periculoasă un defect de tip fisură (deci, cînd $N_{aj} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$) și, ca urmare, toate secvențele de solicitare variabilă la care este supusă prăjina în exploatare participă (cu diferite ponderi) numai la realizarea procesului de propagare stabilă a fisurii. În cazul cînd defectul evidențiat în prăjina analizată este o crestătură neasimilabilă cu o fisură, definiția (32) a degradării cumulate este neplauzibilă, deoarece consideră că fiecare secvență de solicitare contribuie atît la amorsarea unei fisuri la vîrful defectului existent în prăjină, cît și la propagarea fisurii (chiar dacă secvențele de solicitare anterioare nu au realizat amorsarea acesteia); pentru acest caz, o evaluare mai realistă a degradării cumulate se poate face stabilind mai întîi efectul fiecărei secvențe de solicitare asupra transformării crestăturii existente în prăjină într-un defect de tip fisură, determinînd apoi numărul secvenței s_a în care procesul de amorsare a fisurii a fost finalizat, folosind relația :

$$\sum_{j=1}^{s_a} D_{aj} = \sum_{j=1}^{s_a} (n_j/N_{aj}) = 1 \tag{33}$$

și calculînd în final degradarea cumulată a prăjinii cu următoarea relație :

$$D_c = \sum_{j=s_a}^{s} D_{pj} = \sum_{j=s_a}^{s} (n_j/N_{rj}). \tag{34}$$

Stabilirea celui mai indicat mod de definire a parametrului D_c constituie una din preocupările cercetărilor experimentale viitoare ale autorilor.

3.4. APLICAȚII PRIVIND CALCULUL DURABILITĂȚII PRĂJINILOR DE FORAJ

Aplicația 1. Să se calculeze durabilitatea unei prăjini de foraj din oțel grad S—135 (R_e = min. 930 N/mm², $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm²), cu dimensiunea nominală $D = 127$ mm (5 in), grosimea peretelui $t = 9{,}19$ mm și lungimea $2L = 8080$ mm, prezentînd în zona vecină unui racord special

o crestătură superficială dispusă transversal, cu adîncimea $b_0 = 0{,}9$ mm, lungima $2a_0 = 3{,}6$ mm și raza la vîrf $\rho_d = 0{,}12$ mm; prăjina este solicitată la tracțiune cu tensiunea $\sigma_t = 280$ N/mm^2 și se rotește într-o gaură de sondă avînd intensitatea deviației 5°/30 m.

Pentru determinarea durabilității prăjinii se parcurg etapele prezentate în §3.3.

A. Caracteristicile defectului existent în corpul prăjinii și poziția zonei critice corespunzătoare lui sînt date în enunțul problemei: $b_0 = 0{,}9$ mm; $a_0 = 1{,}8$ mm, $\rho_d = 0{,}12$ mm, zona critică situată în vecinătatea unui racord special.

B. Prăjina de foraj analizată este solicitată la tracțiune cu tensiunea $\sigma_t = 280$ N/mm^2. Tensiunea maximă din încovoiere în zona critică a prăjinii, datorită rotirii prăjinii în gaura de sondă cu intensitatea deviației 5°/30 m (deci cu o curbură $c = 5 \cdot \pi/(180 \cdot 30)$), se determină cu relațiile (2) și (3): $\alpha = 2{,}218 \cdot 10^{-3}$ mm^{-1}; $\sigma_i = 133$ N/mm^2. Caracteristicile ciclurilor de solicitare a prăjinii sînt: $\sigma_m = \sigma_t = 280$ N/mm^2; $\sigma_a = \sigma_i = 133$ N/mm^2; $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a = 413$ N/mm^2; $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a = 147$ N/mm^2; $R = 0{,}36$.

C. Se calculează mărimea parametrului ΔK_I la vîrful defectului conținut în prăjina analizată, folosind relația (11): Ø $= 1{,}276$; $\Delta K_{If} = 393$ N/mm$^{3/2}$. Se determină N_a utilizînd relația (22), cu $C_{ma} = 10^{16}$ și $n_a = 3{,}77$ (indicate în tabelul 1 pentru un oțel de tip grad S—135): $N_a = 30437$ cicluri.

D. Se calculează cu relația (31) valoarea pragului de fisurare $\Delta K_{If} = 246$ N/mm$^{3/2}$. Deoarece $\Delta K_I = 393 > \Delta K_{If}$, fisura amorsată la vîrful crestăturii din prăjină se poate propaga stabil pînă la dimensiunea b_{cr} dată de relația (14): $b_{cr} = 30$ mm; utilizînd criteriul (28) rezultă: min (30; 9,19) = 9,19 și deci pentru calculul durabilității prăjinii adîncimea maximă de propagare stabilă a fisurii este $b_f = 9{,}19$ mm.

E. Considerînd $C_{mp} = 5{,}84 \cdot 10^{-11}$ și $n_p = 2{,}133$, date în tabelul 1 pentru un oțel de tip grad S — 135, rezultă din relația (25) $C_\sigma = 382817$; folosind relația (29) se obține: $N_p = 96975$ cicluri.

F. Durabilitatea în exploatare a prăjinii (în condițiile de lucru date în enunțul aplicației) va fi: $N = N_a + N_p = 30437 + 96975 = 127412$ cicluri (ceea ce corespunde, dacă se consideră o turație a garniturii de foraj de 100 rot/minut, cu o durată de funcționare în siguranță de aproximativ 21 ore).

Aplicația 2. Să se determine degradarea cumulată a unei prăjini de foraj grad S—135 ce suferă o succesiune de secvențe de solicitare în care efortul unitar de tracțiune este același, $\sigma_t = 400$ N/mm^2, iar eforturile unitare maxime din încovoiere σ_i au intensități diferite, indicate, împreună cu numărul de cicluri n_j al fiecărei secvențe și cu ordinea cronologică a realizării secvențelor, în tabelul 2 (coloanele 1, 2, 3); în stare inițială, prăjina conține un defect superficial de tip crestătură, cu $b_0 = 0{,}8$ mm, $2a_0 = 3{,}2$ mm și $\rho_d = 0{,}1$ mm.

Pentru rezolvarea problemei s-au calculat pentru toate cele $s = 19$ secvențe numerele N_{aj} și N_{pj}, folosind metodologia prezentată detaliat în cazul aplicației precedente; s-au determinat apoi degradările cumulate D_c folosind (pentru comparație) ambele moduri de definire prezentate în § 3.3; valorile D_{cj} și D_c stabilite cu relația (32) sînt prezentate în coloana

Tabelul 2

Ordinea secvențelor j	$\sigma_{t,j}$, N/mm²	n_j, cicluri	σ_{max}, N/mm²	σ_{min}, N/mm²	ΔK_I, N/mm$^{3/2}$	$N_{aj} \cdot 10^{-4}$ cicluri	b_f mm	$N_{pj} \cdot 10^{-4}$ cicluri	D_{cj}	D_{aj}	D_{pj}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	10	250000	410	390	28,4	43250	—	∞	0	—	0
17	24	200000	424	376	68,0	1608,5	—	∞	0	—	0
18	38	170000	438	362	107,8	283,16	—	∞	0	—	0
1	52	150000	452	348	147,5	86,827	—	∞	0	0,17276	—
2	65	50000	465	335	184,3	37,495	—	∞	0	0,13335	—
3	79	30000	479	321	224,1	17,940	—	∞	0	0,16722	—
4	93	18000	493	307	263,9	9,6866	9,19	21,115	0,05844	0,18582	—
5	107	5000	507	293	303,6	5,7111	9,19	15,659	0,02340	0,08755	—
6	120	4000	520	280	340,6	3,7020	9,19	12,253	0,02507	0,10805	—
7	134	2200	534	266	380,5	2,4381	9,19	9,6742	0,01816	0,09023	—
8	148	1800	548	252	420,4	1,6741	9,19	7,8206	0,01896	0,05502*	0,01124**
13	162	1500	562	238	460,3	1,1894	9,19	6,4454	0,01965	—	0,02327
14	176	1100	576	224	500,4	0,8681	9,19	5,3935	0,01757	—	0,02039
15	189	800	589	211	537,5	0,6629	9,19	4,6304	0,01511	—	0,01728
9	203	500	603	197	577,7	0,5051	9,19	3,9701	0,01117	—	0,01259
10	217	300	617	183	617,8	0,3941	9,19	3,4406	0,00782	—	0,00872
11	231	150	631	169	658,0	0,3092	9,19	3,0077	0,00452	—	0,00499
12	245	70	645	155	698,3	0,2472	9,19	2,6496	0,00242	—	0,00264
19	258	20	658	142	735,7	0,2030	9,19	2,3705	0,00078	—	0,00084
* calculat cu $n_8' = 921$; ** calculat cu $n_8'' = 879$; $(n_8' + n_8'' = n_8 = 1800$; $s_a = 8)$									$D_c = 0,22$	$\Sigma D_{aj} = 1$	$D_c = 0,10$

10 a tabelului 2, iar valorile D_{aj}, D_{pj} și D_c obținute cu relațiile (33), (34) sînt date în coloanele 11 și 12 ale aceluiași tabel. Comparînd rezultatele obținute în cele două moduri de rezolvare aplicate rezultă clar importanța tehnico-economică a stabilirii (prin cercetările experimentale viitoare) a celui mai pertinent criteriu de definire a degradării cumulate în exploatare a prăjinilor de foraj.

4. CONCLUZII

● Durabilitatea în exploatare a prăjinilor de foraj este direct determinată de comportarea zonelor critice ale acestora, zone situate în vecinătatea defectelor ce produc puternice efecte de concentrare a tensiunilor.

● Analiza comportării zonelor critice în timpul solicitărilor variabile la care sînt supuse prăjinile de foraj în cursul exploatării poate fi realizată corespunzător utilizînd principiile și metodele mecanicii ruperii materialelor. În lucrare se prezintă modul în care aceste principii și metode pot fi particularizate pentru a studia cazul general al comportării unei zone critice dintr-o prăjină de foraj supusă la solicitări variabile: trecerea defectului (existent în zona critică) din starea de crestătură în starea de fisură și propagarea stabilă a fisurii pînă la atingerea dimensiunilor sale critice, ce determină producerea ruperii brutale a prăjinii.

● Rezultatele analizei zonelor critice ale unei prăjini de foraj pe baza principiilor și metodelor mecanicii ruperii pot fi utilizate pentru evaluarea cantitativă a durabilității în exploatare a prăjinii, exprimată sub forma numărului de cicluri de solicitare pînă la rupere sau sub forma degradării cumulate a prăjinii ca urmare a exploatării ei, o durată determinată, în diferite condiții de solicitare. În lucrare se prezintă (în formă generală și prin cîteva aplicații) algoritmul propus de autori pentru determinarea practică a celor două caracteristici de exprimare cantitativă a durabilității prăjinilor de foraj. Aplicarea algoritmului implică îndeplinirea următoarelor condiții: materialul prăjinilor analizate are comportare liniar-elastică la solicitări (condiție îndeplinită, de exemplu, de oțelurile cu rezistență ridicată de tip grad X—95, grad G—105, grad S—135, grad V—150); sînt cunoscute (pentru materialul prăjinilor analizate) valorile experimentale ale constantelor și exponenților ce intervin în relațiile de tipul (22) și (24); starea defectologică a prăjinilor analizate este perfect cunoscută (în urma efectuării unui control defectoscopic riguros la recepția inițială și după fiecare ciclu de utilizare); este înregistrată riguros toată „istoria" exploatării fiecărei prăjini analizate (toate secvențele de solicitare în exploatare).

Primit în redacție la 8 noiembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. AMZALLAG, *Influence of various parameters on the determination of the fatigue crack arrest threshold*, ASTM—STP, nr. 738, 1981.
2. A. BAUS, ș.a., *Etude de l'amorçage des fissures de fatigue sur des éprouvettes en acier à très haute résistance possedant aes défauts de formes et de dimensions differentes*, Revue de Métallurgie, oct. (1977).
3. D. CIOCLOV, *Rezistență și fiabilitate la solicitări variabile*, Edit. Facla, Timișoara, 1975.
4. D. CIOCLOV, *Mecanica ruperii materialelor*, Edit. Academiei, București, 1977.

5. A. COULON, *Essais métallurgiques et de la mécanique de la rupture sur aciers pour disques de turbines de grandee dimensions*, Revue de Métallurgie, oct. (1977).
6. M. M. HAMMOUDA, K. J. MILLER, *Prediction of fatigue lifetime of notched members*, în *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, vol. **2**, Pergamon Press, 1980.
7. A. F. HEISER, W. MORTIMER, *Effect of thickness and orientation on fatigue crack growth rate in 4340 steel*, Metallurgical Transactions, august (1972).
8. A. R. JACK, A. T. PRICE, *The initiation of fatigue cracks from notches in mild steel plates*, Int. Journ. of Fracture Mech., 6 (1970).
9. E. KRAL ș.a., *Fracture mechanics estimates drillpipe fatigue*, Oil and Gas J., Aug. 6 (1984).
10. E. KRAL ș.a., *Fracture mechanics concept offers models to help calculate fatigue life in drillpipe*, Oil and Gas J., Aug. 13 (1984).
11. H. P. LIEURADE, *Application de la mécaniques de la rupture à la fatigue des structures soudées*, Revue de Métallurgie—CIT, aug.—sept. (1983).
12. H. P. LIEURADE, *Etude de la fissuration par fatigue, a l'aide de la mécaniques de la rupture*, CIT du CDS, 12 (1973).
13. T. PANĂ, *Aplicații inginerești ale mecanicii ruperilor*, Edit. Tehnică, București, 1975.
14. R. PETERSON, *Koefitienti konțentrații napriajenii*, MIR, Moscova, 1977.
15. P. RABBE, *Application de la mécanique de la rupture a l'étude de la fissuration en fatigue*, CIT du CDS, 1 (1971).
16. D. RAȘEEV, V. ULMANU, GH. GEORGESCU, *Construcția și exploatarea garniturii de foraj*, Edit. Tehnică, 1986.
17. G. SANZ, *Développements récents dans le domaine de la mécanique de la rupture*, Revue de Métallurgie, nov. (1977).
18. W. SCHÜTZ, *Versuchsmethoden der Bruchmechanik*, Der Maschinen-Schaden, 5 (1975).
19. D. F. SOCIE, *Prediction of fatigue crack growth in notched members under variable amplitude loading histories*, Eng. Fract. Mech., 9 (1977).
20. A. M. SULLIVAN, T. W. CROOKER, *The effect of specimen thickness upon the fatigue crack growth rate of A 516—60 pressure vessel steel*, Transaction of the ASME, mai (1977).
21. V. ULMANU, D. RAȘEEV, *Cercetări privind rezistența la oboseală a elementelor garniturii de foraj*, Mine, Petrol și Gaze, 8 (1985).
22. V. ULMANU, *Analiza fiabilității garniturii de foraj*, Construcția de Mașini, 1 (1987).
23. V. ULMANU, GH. ZECHERU, *Cercetări privind rezistența la oboseală a racordurilor speciale pentru prăjinile de foraj executate din mărci de oțeluri diferite*, A VII-a Conferință de sudură și încercări de materiale, Timișoara, 1987.
24. GH. ZECHERU, *Utilizarea rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc pentru evaluarea tenacității la rupere K_{Ic} a oțelurilor*, St. Cerc. Apl. 4 (1986).
25. * * * *A.P.I. Specification for Casing, Tubing and Drill-Pipe*, A.P.I. Spec. 5 A, Mai, 31, 1987.

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A MULTIPLICATORULUI DE IMPACT (II)

de M. V. SOARE
Institutul de Construcții București

1. INTRODUCERE

Într-o notă precedentă am studiat multiplicatorul de impact cînd pe grindă, în momentul impactului, sînt aplicate una sau mai multe forțe concentrate sau distribuite, neluînd în considerare masa proprie a grinzii [14].

În continuare ne vom ocupa de cazul cînd se ia în considerare masa proprie a grinzii lovite. În diferite manuale și tratate (vezi de exemplu [1], [3], [11], [16], [18]) se stabilește, pentru multiplicatorul de impact, o formulă de tipul

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + k\frac{E_0}{W}} \tag{1}$$

în care k reprezintă un coeficient de reducere a energiei cinetice E_0, iar W este energia potențială de deformație statică a grinzii.

Pentru determinarea coeficientului k există, în literatura de specialitate, două metode care, deși ambele se bazează pe aceleași teoreme ale Mecanicii teoretice, conduc la rezultate asemănătoare din punct de vedere formal.

Din preocuparea de a stabili expresiile lui k pentru mai multe cazuri de solicitare și de rezemare a grinzii, am ajuns la un caz paradoxal care ne face să sugerăm că numai una dintre metodele cunoscute conduce la rezultate coerente.

2. LUAREA ÎN CONSIDERARE A MASEI PROPRII

2.1 METODA LUI H. COX

Fie v_0, viteza corpului care cade, în momentul imediat premergător impactului. În momentul șocului, corpul care cade pierde o parte din viteză, iar corpul lovit preia viteză, astfel încît, în final, în punctul de contact, cele două corpuri au aceeași viteză v_1.

Energia cinetică $\bar{E}_0$ va fi suma dintre E_0' — energia cinetică a forței P cînd, prin șoc, a pus în mișcare bara și E_0'' — energia cinetică a barei.

Notînd p greutatea proprie a barei pe unitatea de lungime (se consideră cazul $p = \text{const.}$) și L — lungimea totală a barei (pentru a include situația mai multor deschideri), se va putea scrie :

$$E_0' = P \frac{v_1^2}{2g}, \tag{2a}$$

$$E_0'' = \int_0^L p\,\mathrm{d}x \cdot \frac{v_x^2}{2g} = \frac{pv_1^2}{2g} \int_0^L \frac{v_x^2}{v_1^2}\,\mathrm{d}x, \tag{2b}$$

în care g este accelerația gravitației, iar v_x viteza unui punct curent al elementului lovit.

Admițînd că mișcarea este uniformă rezultă că vitezele sînt proporționale cu deformațiile dinamice și cu deformațiile statice, iar raportul vitezelor poate fi înlocuit cu raportul săgeților, adică

$$\frac{v_x}{v_1} = \frac{w_x}{w_1}. \tag{3}$$

Expresia (2b) devine atunci

$$E_0'' = \frac{pv_1^2}{2g} \int_0^L \frac{w_x^2}{w_1^2}\,\mathrm{d}x = k_2 pL \cdot \frac{v_1^2}{2g} \tag{4}$$

în care

$$k_2 = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{w_x^2}{w_1^2}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

reprezintă o constantă care depinde de poziția punctului de impact și de condițiile de rezemare ale grinzii ; se observă că este satisfăcută inegalitatea $k_2 > 0$.

Însumînd (2a) și (4) rezultă

$$\bar{E}_0 = E_0' + E_0'' = (P + k_2 pL) \frac{v_1^2}{2g}. \tag{6}$$

Notînd $Q = pL$ masa grinzii, termenul

$$Q' = k_2 Q = k_2 pL$$

reprezintă o *masă redusă a grinzii.*

Viteza v_1 va fi determinată din aplicarea teoremei conservării impulsului (impulsul sistemului este același înainte și după impact), luînd în considerare masa redusă a grinzii :

$$Pv_0 = (P + Q')v_1.$$

De aici rezultă

$$v_1 = \frac{Pv_0}{P + Q'} = \frac{Pv_0}{P + k_2 pL}. \tag{7}$$

Introducînd expresia lui v_1 în (6) se obține

$$\bar{E}_0 = (P + k_2 pL)\left(\frac{Pv_0}{P + k_2 pL}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = \frac{P}{P + k_2 pL} \cdot \frac{Pv_0^2}{2g} =$$

$$= \frac{P}{P + k_2 pL} E_0,$$

unde prin E_0 am notat energia cinetică corespunzătoare cazului cînd se neglijează masa proprie a grinzii.

Punînd

$$k = \frac{P}{P + k_2 pL} = \frac{1}{1 + k_2 \dfrac{pL}{P}} \tag{8}$$

a rezultat expresia coeficientului de reducere din relația (1). Se va observa că avem totdeauna $k \in (0\,;\,1)$.

Această metodă a fost propusă de Homersham Cox și publicată în Transactions Cambridge Phil. Soc., vol. 9, 1849, pp. 73—78; rezultatele teoretice erau confirmate de cele experimentale, stabilite de Eaton Hodgkinson în anii 1833—35 (citat după St. P. Timoshenko [13], pp. 178—9).

Metoda este larg acceptată și prezentată în diferite tratate cum sînt [2], [4], [11], [17]. O metodă similară a fost propusă de A. P. Filin [6].

2.2. METODA LUI H. ESCHLER

Păstrînd aceleași ipoteze de bază, în conformitate cu metoda a doua, viteza v_1 va putea fi determinată din aplicarea prealabilă a teoremei conservării impulsului

$$Pv_0 = v_1\left(P + p\int_0^L \frac{v_x}{v_1}\,\mathrm{d}x\right) = v_1\left(P + p\int_0^L \frac{w_x}{w_1}\,\mathrm{d}x\right). \tag{9}$$

Notînd

$$k_1 = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{w_x}{w_1}\,dx, \tag{10}$$

din (9) va rezulta

$$v_1 = \frac{Pv_0}{P + k_1 pL}, \tag{11}$$

unde, evident, $k_1 \neq k_2$.

Ducînd pe v_1 în (6), se obţine în final

$$\bar{E}_0 = \frac{P(P + k_2 pL)}{(P + k_1 pL)^2} \cdot \frac{Pv_0^2}{2g} = \frac{P(P + k_2 pL)}{(P + k_1 pL)^2} E_0.$$

Punînd

$$k = \frac{P(P + k_2 pL)}{(P + k_1 pL)^2} = \frac{1 + k_2 \dfrac{pL}{P}}{\left(1 + k_1 \dfrac{pL}{P}\right)^2} \tag{12}$$

rezultă expresia coeficientului de reducere din relaţia (1).

Sînt cunoscute expresiile lui k_1 şi k_2 pentru cazul solicitării axiale şi de încovoiere pentru cîteva cazuri de rezemare. În continuare vom arăta un mod general de stabilire a lui k_1 şi k_2 pentru grinda cu diferite condiţii de rezemare.

3. EXPRESIILE LUI k_1 ŞI k_2 PENTRU DIFERITE CONDIŢII DE REZEMARE

Vom considera grinda cu o singură deschidere, cu diferite condiţii de rezemare la capetele 0 şi 2, considerînd reazemele fixe. În acest caz se poate înlocui grinda dată cu o grindă simplu rezemată avînd aplicate pe reazeme momentele M_0 şi M_2; considerînd şi forţa P aplicată static, în secţiunea 1 din deschidere, rezultă diagrama de momente din figura 1.

Pentru stabilirea coeficienţilor k_1 şi k_2 va fi mai simplu să se determine expresiile săgeţilor w_x pe intervalele 0—1 şi 2—1, alegînd ca abscisă pe x, măsurat de la 0 spre 1, respectiv x', măsurat de la 2 spre 1.

Trecînd peste calculele intermediare se stabilesc următoarele expresii ale lui w_x:

— pe intervalul 0—1 $x \in (0, a)$

$$w_x = -(Pb - M_0 + M_2)\frac{x^3}{6EIl} - \frac{M_0 x^2}{2EI} + \tag{13a}$$

$$+\frac{1}{6EIl}[Pab(l + b) + (2M_0 + M_2)l^2]$$

— pe intervalul $2-1$ $x' \in (0, b)$

$$w_x = -(Pa + M_0 - M_2)\frac{x'^3}{6EIl} - \frac{M_2 x'^2}{2EI} + \\ + \frac{1}{6EIl}[Pa(l + a) + (M_0 + 2M_2)l^2]. \tag{13b}$$

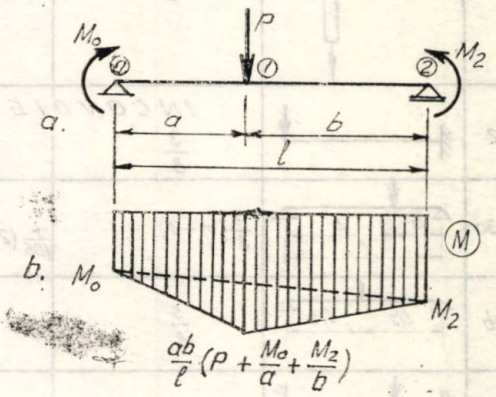


Fig. 1. — a) Grinda simplu rezemată cu momentele M_0 și M_2 pe reazeme; b) diagrama de momente încovoietoare.

Pe această cale se obține soluția generală

$$k_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{Pab(a^2 + 3ab + b^2) + (M_0 + M_2)l^3}{2Pa^2b^2 + ab[M_0(l + b) + M_2(l + a)]}. \tag{14}$$

Au fost făcute următoarele particularizări:

a) grinda simplu rezemată $M_0 = M_2 = 0$;

b) grinda dublu încastrată $M_0 = -\frac{Pab^2}{l^2}$, $M_2 = -\frac{Pa^2b}{l^2}$

c) grinda cu un reazem simplu și celălalt încastrat

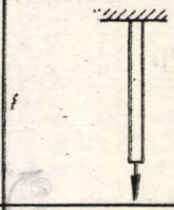
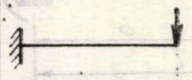
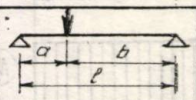
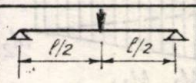
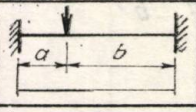
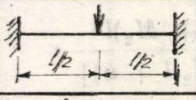
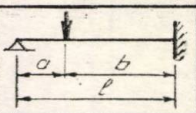
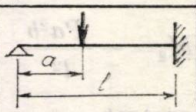
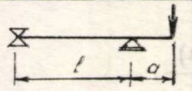
$$M_0 = 0, \quad M_2 = -\frac{Pab(l + a)}{8l^2}.$$

Rezultatele au fost trecute în tabelul 1. Valorile lui k_1 pentru secțiunile particulare înscrise la cazurile 3b, 4b, 5b reprezintă *valori minime* care corespund aplicării forței la mijlocul deschiderii, respectiv în secțiunea $a = 0{,}40208\, l$.

Pentru k_2 expresia este mai complicată și ne-am rezumat la expresiile generale date în tabelul 1.

Vom considera, mai departe, un caz mai complicat, cînd grinda simplu rezemată are o consolă pe vîrful căreia cade forța P (fig. 2).

Tabelul 1

Nr. crt.	FIGURA	k_1	k_2	NOTAȚII OBSERVAȚII
		SOLICITARE AXIALĂ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$,	Valabil pentru întindere. Pentru compresiune trebuie luat în considerare și flambajul.
2		INCOVOIERE $\frac{3}{8}$	$\frac{33}{140}$	
3a		$\frac{1}{8}(\eta+1)$	$\frac{1}{105}(2\eta^2+4\eta+3)$	$\eta=\frac{\ell^2}{ab}$
3b		$\frac{5}{8}$	$\frac{17}{35}$	Caz particular al cazului 3a când $a=b=\ell/2$, $\eta=4$
4a		$\frac{\eta}{8}$	$\frac{1}{140}(3\eta^2+\eta)$	$\eta=\frac{l^2}{ab}$
4b		$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{35}$	Caz particular al cazului 4a când $a=b=\ell/2$, $\eta=4$
5a		$\frac{1+2\xi}{4\xi(1-\xi)(3+\xi)}$	$\frac{3+12\xi+14\xi^2}{35\xi^2(1-\xi)^2(3+\xi)^2}$	$\xi=\frac{a}{\ell}$
5b		0,551461	0,513716	Caz particular al cazului 5a pentru $a=0,402079\,\ell$; k_1 la valoarea minimă
6		$\frac{-1+\xi+3\xi^2}{2\xi(1+\xi)}$	$\frac{8-8\xi+8\xi^2+132\xi^3+99\xi^4}{420\xi^2(1+\xi)^2}$	$\xi=\frac{a}{\ell}$ Pentru $\xi\in(0,\xi_0)$ rezultă $k_1<0$ $\xi_0=0,4342585$ Când $\ell\to\infty$ se regăsesc rezultatele de la cazul 2.

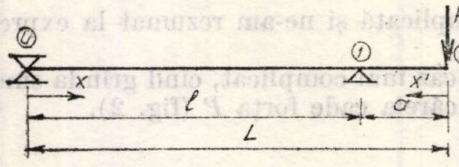


Fig. 2. — Grinda simplu rezemată cu consolă, încărcată cu forța P la capătul liber.

Măsurînd abscisele x de la reazemul 0 spre 1 și abscisele x' de la capătul liber 2 spre reazemul 1, se stabilesc următoarele expresii ale săgeților :

— pe intervalul $0-1$ $x \in (0, l)$

$$w_x = \frac{Pa}{6EIl}(x^3 - l^2 x), \tag{15 a}$$

— pe intervalul $2-1$ $x' \in (0, a)$

$$w_x = \frac{P}{6EI}[x'^3 - (2l + 3a)ax' + 2a^2(l + a)]. \tag{15 b}$$

Trecînd și aici peste calculele intermediare, se ajunge la următoarele expresii ale coeficienților k și k_2 :

$$k_1 = \frac{-l^2 + al + 3a^2}{8a(l + a)}, \tag{16 a}$$

$$k_2 = \frac{8l^4 - 8al^3 + 8a^2l^2 + 132a^3l + 99a^4}{420a^2(l + a)^2}. \tag{16 b}$$

Pentru adimensionalizare s-a introdus notația $\xi = a/l$; expresiile astfel rezultate au fost trecute în tabelul 1, cazul 6.

Este de observat că, spre deosebire de cazurile precedente (inclusiv cele semnalate în literatura de specialitate) cînd avem $k_1 > 0$, rezultă că, pentru acest caz de rezemare, pot rezulta *valori negative* pentru k_1 și anume cînd

$$\frac{a}{l} \in (0, \xi_0), \text{ unde } \xi_0 = \frac{\sqrt{13} - 1}{6} \cong 0{,}4342585.$$

Cîteva valori ale lui k_1 și k_2, pentru diferite valori ale lui ξ au fost trecute în tabelul 2 (vezi și [10] p. 468).

Consecința acestui rezultat este că, în cazul aplicării metodei a doua, coeficientul de reducere k dat de (12) poate să ia *valori supraunitare*, fapt încă nesemnalat după cunoștința autorului. Ar rezulta astfel că, în cazul luării în considerare a masei proprii a grinzii, multiplicatorul de impact poate lua valori superioare față de cazul cînd se neglijează masa proprie. În particular,

Tabelul 2

$\xi = a/l$	k_1	k_2
0,10	−0,98864	1,46043
0,15	−0,56703	0,59816
0,20	−0,35417	0,32798
0,25	−0,22500	0,21819
0,30	−0,13782	0,16728
0,35	−0,07474	0,14211
0,40	−0,02679	0,12954
0,43426	0	0,12499
0,45	+0,01102	0,12364
0,50	0,04167	0,12143

cînd $k_1 < 0$, și forța care cade are valoarea $P = -k_1 pL$, rezultă $k \to \infty$, rezultat care nu își are o interpretate fizică.

Mai general, se ajunge la rezultate asemănătoare cînd aria întregii diagrame de săgeți a grinzii este negativă.

Spre deosebire de această situație, *prima metodă conduce totdeauna la rezultate coerente*, cu $k < 1$. Aici mai este cazul să semnalăm studiul lui J. Krebitz [8], reluat de Fr. Stüssi și P. Dubas [15], care arată că uneori deformata dinamică poate diferi considerabil de aceea statică și că, drept consecință, multiplicatorul de impact poate lua valori considerabil mai mari decît acelea furnizate de teoria aproximativă pe care ne-am bazat și noi.

Primit în redacție la 31 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. BELEȘ, R. P. VOINEA, *Rezistența materialelor, II. Pentru ingineri constructori*. Edit. Tehnică, București, 1958.
2. N. M. BELEAEV, *Rezistența materialelor*, II, Edit. tehnică, București, 1956, pp. 874—899.
3. C. BIA, V. ILIE, M. V. SOARE, *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
4. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, ediția XI revizuită, Edit. Tehnică, București, 1980.
5. H. ESCHLER, *Beitrag zur elementaren Theorie des Querstosses auf Stäbe und Platten*. Ingenieur Archiv, **XII**, 1, 31—37, (19.1).
6. A. P. FILIN *Prikladnaia Mehanika tverdovo deformiruevo tela*. T. **III**, Nauka, Moskva, 1981 p. 271—5.
7. C. M. HARRIS, CH. E. CREDE, *Șocuri și vibrații*. Edit. tehnică, București, 1968.
8. J. KREBITZ, *Der Querstoss auf einen Balken*. Abhandlungen I.V.B.H., **5**, Zürich, 1937—38, p. 221—232.
9. CH. MASSONNET, *Résistance des matériaux*. vol. II, ediția doua, Sciences et Lettres, Liège, 1972.
10. H. Ia. PANARIN, I. I. TARASENKO, *Soprotivlenie materialov*. Gostroĭizdat, Leningrad, Moskva, 1962, p. 465—9.
11. G. S. PISARENKO, A. P. YÁKOVLEV, V. V. MATVÉEV, *Manual de resistencia de materiales*. Editorial Mir, Moscú, 1979, p. 578—588.
12. S. D. PONOMARIOV ș.a., *Calculul modern de rezistență în construcția de mașini*, vol. **I**, Edit. Tehnică, București, 1956.
13. R. J. ROARK, W. C. YOUNG, *Formulas for Stress and Strain*. Ediția cincea, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975, p. 572—582.
14. M. V. SOARE, *Asupra unei generalizări a multiplicatorului de impact, I*. St. mec. apl., **43**, 2, 219—224 (1989).
15. FR. STÜSSI, P. DUBAS, *Grundlagen des Stahlbaues*, ediția doua revizuită, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971, p. 513—516.
16. ST. P. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1953, p. 178—9.
17. ST. TIMOSHENKO, *Strength of Materials. Part I. Elementary Theory and Problems*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, ediția a treia, 1962, p. 320—323.
18. S. TIMOSHENKO, D. H. YOUNG, *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, ediția a treia ed., 1964, p. 411—3.

R. P. VOINEA, D. C. VOICULESCU, F.-P. SIMION, *Introducere în mecanica solidelor cu aplicații în inginerie*, Editura Academiei, București, 1988, 1152 p.

Sînt cărți care s-au impus pe plan științific pentru o lungă durată de timp.

Așa a fost, în 1959, tratatul de „Mecanică teoretică", avînd ca autori pe V. Vâlcovici, Șt. Bălan, Radu Voinea. Acea carte prezenta mecanica rigidului la un nivel mai ridicat decît manualele pentru studenți, fiind destinată în special cadrelor didactice din învățămîntul superior și cercetătorilor. Mai tîrziu, Editura Tehnică a publicat traducerea tratatului în 3 volume „Calculul de rezistență în construcția de mașini" al colectivului condus de prof. S. D. Ponomariov. Ambele cărți își păstrează și astăzi actualitatea, ele referindu-se însă la domenii limitate — mecanica rigidului, respectiv rezistența materialelor.

De curînd, un colectiv de cadre didactice din catedra de mecanică a Institutului Politehnic din București ne-a oferit o lucrare care încearcă să îmbrățișeze întregul domeniu al mecanicii solidului în forma în care această știință este utilă inginerilor.

Lucrarea, avînd 62 capitole și 5 anexe, tratează : mecanica clasică, mecanica analitică, mecanica mediului continuu elastic, elemente de teoria plasticității și reologie, solicitări dinamice, vibrații mecanice, stabilitatea elastică a structurilor și se încheie cu două capitole, unul de mișcări haotice și altul de teoria catastrofelor. Nu au fost însă incluse capitole de vibrații aleatoare, oboseală la solicitări aleatoare, încercări de materiale, studiul experimental al tensiunilor și deformațiilor, mecanica ruperii.

În continuare vom sublinia unele particularități ale acestei lucrări :

— primele două părți cuprind tot ce trebuie să cunoască un student la examenul de mecanică, deci cartea îi poate servi drept manual ;

— de asemenea, ea cuprinde practic toată partea de curs de teoria elasticității ;

— se dă o mare dezvoltare studiului vibrațiilor — suplinind astfel lipsa unui curs mai dezvoltat din planurile actuale de învățămînt ;

— se bucură de o amplă dezvoltare studiul stabilității mișcării și mai ales cel al stabilității echilibrului elastic ;

— capitolele de încheiere, neîntîlnite în cărți de mecanică, sporesc interesul cititorului.

Astfel descrisă cartea cuprinde aproape toate ramurile mecanicii solidului pe care trebuie să le cunoască un tînăr inginer care activează în acest domeniu, fie că se ocupă de mecanică teoretică, rezistența materialelor, vibrații, elasticitate sau stabilitate.

Prezentarea la un loc a acestor variate capitole ale mecanicii îl scutește pe cercetător, cel puțin *în prima fază a documentării sale*, de a studia monografiile consacrate diferitelor capitole, oferindu-i o „introducere" în materie. De aceea, consider că oricine dorește să se consacre activității de învățămînt superior sau de cercetare științifică în mecanică, trebuie să cunoască această carte. Eu aș considera-o un adevărat „Îndrumar pentru admiterea în domeniul de activitate al mecanicii solidului".

Cartea prezintă clar, didactic, științific, toate problemele care fac obiectul diferitelor capitole, adresîndu-se *capacității de înțelegere* a cititorilor.

Ea este destinată inginerilor de toate ramurile, neavînd o coloratură de specializare.

Lucrarea nu conține toate elementele necesare unui proiectant — tabele, grafice, formule etc. — care se găsesc de altfel în „manualele inginerești", scopul urmărit de autori, și care consider că a fost atins, nefiind acela de a da o informație exhaustivă, ci de a aduce o contribuție la formarea gîndirii inginerești în domeniul mecanicii solidului.

Sînt de părere că această carte merită să fie prezentă pe masa de lucru a oricărui inginer.

Gh. Buzdugan

E. BROMMUNDT, G. SACHS, *Technische Mechanik* (Mecanică tehnică), *Eine Einführung* (O introducere), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, XV + 239 p., 370 fig.

Lucrarea „Mecanică teoretică" se adresează studenților facultăților tehnice în semestrul de început (pregătitor). Structurată în 3 părți mari : Statică, Elastostatică (elemente de rezistența materialelor) și de Cinematică și Cinetică, cartea îmbină reprezentarea intuitivă cu modelarea cazurilor reale și sistematizarea noțiunilor teoretice și își propune călăuzirea studentului în punerea problemei, căutarea și găsirea modului de rezolvare a acesteia.

În prima parte, „Statica", sînt prezentate bazele fundamentale ale Mecanicii în 10 axiome care permit rezolvarea unitară atît a problemelor de statică cît și de cinetică (dinamică) prin introducerea momentelor și forțelor de inerție ale lui d'Alembert.

Prezentarea mărimilor mecanice se face prin aplicarea metodei vectoriale în paralel cu scrierea matriceală a acestora, ceea ce face posibilă adoptarea cu ușurință a problemelor la rezolvarea cu ajutorul calculatoarelor electronice.

În partea a doua sînt prezentate principalele noțiuni de rezistența materialelor, fiind analizate principalele cazuri de solicitare a barelor drepte în cazul plan, atît pentru probleme static determinate, cît și unele static nedeterminate.

În partea a treia sînt prezentate pe lîngă noțiunile cinematică și dinamică și unele aspecte speciale cum ar fi mecanica mișcărilor impulsive (ciocniri) sau mecanica mișcărilor oscilatorii (vibrații).

Fără a depăși scopul propus, lucrarea reprezintă un îndrumar util în pregătirea studenților în domeniul mecanicii tehnice la nivelul de pregătire al subinginerilor.

Al. Popa

S. L. REAM (sub red.), *Focus on Laser Materials Processing. Proceedings of the 6th International Congress on Applications of Lasers and Electro-optics ICALEO'87, 8—14 November, 1987, San Diego, California USA* (Privire asupra prelucrării cu laser a materialelor. Lucrările celui de-al 6-lea Congres asupra aplicațiilor tehnicilor laser și ale electro-opticei ICALEO'87, 8—14 noiembrie 1987, San Diego California, S.U.A.) IFS Publications Ltd., U.K., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, in association with the Laser Institute of America, 1988, 264 p., 75 fig.

Volumul conține un număr de 32 lucrări prezentate la cel de-al 6-lea Congres asupra aplicațiilor tehnicii laser și electroopticii care a avut loc în zilele de 8—14 noiembrie 1987 la San Diego, California, S.U.A. Obiectivul congresului a fost de a stringe legăturile între cercetătorii și beneficiarii tehnologiilor de prelucrare cu laser a materialelor. Lucrările prezentate au demonstrat o concentrare a interesului asupra aplicațiilor industriale ale laserului în special în industria de autovehicule, aerospațială, electronică, apărare, fabricarea tablelor metalice. Articolele din volum prezintă problemele specifice ale stadiului de dezvoltare a domeniului la nivelul anului 1987.

Conținutul volumului este grupat în șase capitole.

Primul capitol, „Controlul procesului", conține un număr de patru articole. Un articol se referă la strînsa dependență între calitatea tăieturilor și parametrii laserului cu CO_2 de mare putere, prezentînd rezultatele măsurătorilor efectuate asupra a patru tipuri de asemenea instalații laser utilizate la tăierea tablelor din oțel carbon. Sistemul de măsurare, de mare viteză permite măsurarea valorilor instantanee a unor parametri ca : puterea, lățimea și focalizarea fasciculului, simetrizarea energetică de-a lungul axei sale etc.

Sînt tratate aspecte ale proceselor fizice de bază în cadrul sudării cu laser demonstrîndu-se existența unei corelații între dinamica băii de metal topit și fluctuațiile plasmei induse.

Două articole prezintă sisteme expert în timp real destinate controlului proceselor de sudare și respectiv încărcare prin sudare cu laser.

Cel de-al doilea capitol, conținînd șase articole, prezintă aspecte tehnologice privind sudarea cu laser a unei game diverse de materiale ca : oțeluri, oțeluri inoxidabile, aliaje de aluminiu. Un articol se referă la sudarea metalelor disimilare cu ajutorul unui laser Na-YAG în impulsuri. K. W. Carlson și V. G. Gregson de la Westinghouse Marine Division U.S.A. prezintă tehnologii de sudare cu laser a corpurilor cilindrice cu pereți groși, între 6,4 mm și 19,2 mm, din oțeluri inoxidabile.

Al treilea capitol, care cuprinde cinci articole, tratează probleme referitoare la transportul și conducerea fasciculului laser. Un prim articol prezintă calculul opticii unui laser de mare putere, în CO_2, utilizat în sisteme robotizate pentru sudare și tăiere.

Se descrie mașina de tăiere tridimensională cu laser „MELCUT-3DCM system III", proiectată pentru utilizarea de către un personal cu calificare redusă. Mașina este ușor programabilă, sistemul calculînd pe baza parametrilor tehnologici introduși viteza optimă de tăiere și puterea fasciculului laser, iar linia de tăiere este trasată automat cu ajutorul unor senzori optici.

M. Hishii, K. Sato și T. Fukushima de la Mitsubishi Electric Corp., Japonia, descriu un laser de înaltă performanță în CO_2, de 5 kW, utilizabil în variate domenii industriale pentru sudare, tratamente termice, tăiere.

Cel de-al 4-lea capitol, „Perfecționări în tăiere", cuprinde un număr de șase articole. Sînt prezentate în detaliu aspectele termice ale procesului de tăiere cu laser. Este comparată calitatea tăieturilor efectuate cu diferite tipuri de laser, în cazul unor materiale diverse, detașîndu-se net laserul tip excimer caracterizat printr-un grad ridicat de precizie și acurateță a tăieturilor.

Este studiat efectul alinierii corecte a duzei și fasciculului laser asupra calității tăieturilor și reproductibilității procesului de tăiere. Un articol se referă la o tehnică de tăiere cu laser a materialelor care reflectă puternic lumina, cum sînt cuprul și aluminiul, fără utilizarea unor acoperiri absorbante.

Cu ajutorul spectroscopiei atomice de absorbție au fost determinate nivelele unor produși nocivi formați la tăierea, sudarea sau lipirea metalelor cu acoperiri de protecție conținînd zinc și crom.

Capitolul cinci conține șapte articole referitoare la modificări ale suprafețelor prin prelucrare cu laser. Sînt prezentate aspecte referitoare la durificarea suprafețelor din oțel AISI 4340 influența parametrilor procesului asupra tendinței de fisurare a suprafețelor compozite prelucrate cu laser., încărcarea prin sudare cu laser a oțelului AISI 4142 în vederea obținerii unui strat de acoperire ceramic cu zirconiu. Alte articole se referă la tratamentul superficial prin topire cu laser a aliajelor de aluminiu, la încărcarea prin sudare cu laser a oțelului A3 cu aliaj NiCrSiB.

Ultimul capitol, intitulat „Noi procedee", cuprinde patru articole. Un articol se referă la depunerea cu ajutorul laserului cu CO_2 a aluminei pe un suport din aliaj de aluminiu fiind studiată calitatea învelișului astfel realizat. Alte articole se referă la sudarea cu laser a sticlei, la curățirea vopselelor fără deteriorarea suprafețelor. Se mai prezintă rezultate experimentale privind creșterea rezistenței la șoc a oțelurilor austenitice cu ajutorul unui laser în CO_2.

Volumul se adresează tuturor specialiștilor angrenați în cercetarea, proiectarea și implementarea în procesele de producție a laserului.

X. Epure

B. G. KORENEV, L. M. REZNIKOV, *Dinamiceskie gasiteli kolebanii* (Absorbitori dinamici de vibrații. Teorie și aplicații tehnice), Nauka, Moscova, 1988, 304 p.

Monografia cu acest titlu se adaugă celorlalte două pe care le posedam — cea engleză a profesorului J. B. Hunt și cea românească a profesorului T. Pană.

Se știe, din tratatele de teoria vibrațiilor, că absorbitorul de vibrații constituie o soluție interesantă — posibilă în anumite limite — de micșorare a vibrațiilor unor corpuri din cele mai variate domenii.

În esență, la corpul care vibrează se atașază, printr-o legătură elastică sau alt mod, un al doilea corp, care preia o bună parte din vibrațiile celui dintîi, micșorîndu-le.

Profesorul Korenev, un bine cunoscut cercetător în domeniul dinamicii construcțiilor, împreună cu un colaborator, a publicat, recent, monografia cu titlul de mai sus.

Lucrarea este împărțită în următoarele capitole:

1. Teoria absorbitorului dinamic liniar la diferite excitații.
2. Forme constructive și modele complicate de absorbitori dinamici de vibrații.
3. Vibrațiile sistemelor cu număr infinit de grade de libertate, dotate cu absorbitori dinamici de vibrații.
4. Aplicații practice ale teoriei și exemple de realizare a izolării vibrațiilor.

Cartea conține relații de calcul și tabele, care permit proiectanților să construiască și să aplice cu succes, absorbitori dinamici în numeroase domenii ale tehnicii. Desene și scheme constructive sînt de un real folos la proiectare.

Cartea se încheie cu unele anexe și cu un mare număr de referințe bibliografice.

Recomand folosirea acestei lucrări de către cei care caută soluții de micșorare a vibrațiilor.

Gh. Buzdugan

G. SZABÓ, *Revision des verallgemeinerten Gesetzes von Hooke* (Revizuirea legii generalizate a lui Hooke), Eigenverlag G. S., Waldorfhäslach, 1986, 82 pag., 27 fig., 9 tabele, 18 ref. bibl.

În teoria corpului elastic se admite că o forță produce tensiuni și deformații pe direcția ei de acțiune, iar transversal acesteia doar deformații. Deja în 1970 autorul a susținut în cartea sa „Die Grundlagen einer neuen Festigkeitstheorie" (Bazele unei noi teorii de rezistență) că această ipoteză privind două tipuri de deformații — una însoțită de tensiuni și cealaltă nu — trebuie abandonată. Într-un articol publicat în 1980 a formulat teza că orice tensiune provoacă tensiuni transversale ei, deci că nu poate exista o stare de tensiune monoaxială.

Cartea de față reia în 8 capitole și o anexă această problematică și — în concordanță cu noi cercetări întreprinse — fundamentează necesitatea revizuirii legii generalizate a lui Hooke. Concepția actuală privind tensiunile și deformațiile admite modelul mediului continuu nestructurat, în contradicție cu realitatea structurii atomice a tuturor materialelor. Bazat pe imaginea unui sistem spațial cu zăbrele ce reflectă toate proprietățile geometrice și mecanice importante ale mulțimii dezordonate de atomi, autorul determină mărimile și direcțiile medii ale reacțiunilor interatomice. Aceste întinderi sau compresiuni echilibrează acțiunile exterioare. Forțele interatomice transversale direcției acțiunii provoacă deformațiile transversale. Rezultatele teoretice obținute au fost utilizate cu succes la explicarea unor proprietăți de rezistență și deformație ale betonului și oțelului.

În vederea revizuirii concepției tradiționale privind solicitările și deformațiile autorul propune două modalități. Prima este radicală, cerînd înlocuirea noțiunii de tensiune prin noțiunea de reacțiune interatomică medie. Cea de a doua se mulțumește cu adaptarea legii lui Hooke la realitățile fizice, cu menținerea noțiunilor tradiționale de mediu continuu nestructurat și tensiune. Această variantă de compromis postulează următoarele : orice modificare a unei lungimi depinde exclusiv de tensiunea pe direcția ei (legea tensiune-deformație) și orice tensiune produce tensiuni transversale direcției ei de acțiune (legea tensiune-tensiune), necesitînd instrucțiuni de aplicare.

Prin modul de abordare și tratare a problemei solicitărilor mecanice, cartea lui G. Szabó este foarte interesantă și utilă, deschizînd perspective noi cercetărilor în domeniul materialelor și în cel al calculului de rezistență. Se adresează inginerilor de toate specialitățile și reprezintă primul volum al unei serii de mecanică inginerească bazată pe realitatea structurii atomice a materialelor.

R. Friedrich

J. SÁNCHEZ, N. SCHOLZ, *Baustatik mit Multiplan* (Statica construcțiilor cu Multiplan), Werner Verlag, Düsseldorf, 1987, 235 pag., 27 fig., 28 tab., 26 indic. bibl.

Programele pentru calculul cu ajutorul tabelelor (Spreadsheets) sînt foarte potrivite pentru efectuarea unor secvențe de operații matematice repetate frecvent. Multiplan face parte din acest grup de programe, fiind conceput inițial pentru domeniul economic și cel al asigurărilor. Cartea de față pledează pentru utilizarea lui în calculele inginerești din specialitățile construcții și mecanică.

Alcătuită din 5 capitole și 5 anexe, cartea debutează cu o introducere în Multiplan ce cuprinde o descriere generală, prezentarea funcțiilor și istrucțiunilor, exemple de tabele, legarea și tipărirea acestora cît și interfețe pentru transferul datelor. Un capitol se referă la aplicația în statica și stabilitatea structurilor : rezolvarea grinzilor continue cu procedeul Cross, utilizarea expresiilor analitice pentru calculul grinzilor, cadrelor, plăcilor plane și al plăcilor axial-simetrice, preprocesări și postprocesări pentru calculul cu metoda elementelor finite.

Capitolul privind aplicațiile în construcții metalice cuprinde tabele de profile utilizabile direct în proiectare, dimensionarea elementelor solicitate excentric și verificarea nodurilor grinzilor cu zăbrele. Ultimul capitol se ocupă de aplicații la construcții din beton armat : dimensionări la acțiuni normale și verificări la forțe tăietoare.

Anexele cuprind date privind structura tabelelor, instrucțiunile și funcțiile Multiplan și programe pentru interfața de date și pentru cea grafică. Programele descrise în carte pot fi obținute pe dischete pentru microcalculatoare IBM—PC și compatibile.

Pentru utilizarea eficientă a tehnicii Multiplan se necesită un microcalculator de cel puțin 64 ko, două unități de discuri flexibile și o inprimantă. Costul programului este echivalat cu 20 ore inginer, pentru însușirea lui fiind necesare 10 ore inginer.

Comparativ cu programele în limbajele uzuale, programul Multiplan se remarcă prin ușurința introducerii datelor și prin viteza de lucru mărită. Studiul cărții permite simplificarea rutinei zilnice în proiectare, prezentînd interes și pentru cercetarea și învățămîntul de specialitate.

R. Friedrich

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 48, nr. 4 iulie — august 1989

SUMAR

I. ANTON, GH. CĂLIN şi D. IONESCU, Optimizarea reţelelor plane de turbine hidraulice. II. Proiectarea reţelei şi a paletei 349

ŞT. STAICU, Vibraţiile sistemelor spaţiale 367

M. MUNTEANU, Axele elasticităţii în cazul unui solid rigid cu legături elastice triaxiale 379

M. PECULEA şi ANISIA MOŞTEANU, Compresor cu membrană metalică cu profil de deformare liniarizat 399

T. OROVEANU şi I. SPULBER, Asupra curgerii lichidelor calde prin conducte 411

CONSTANTIN TEODORESCU, Asupra performanţelor acustice ale avionului ROMBAC 1—11—560 şi compatibilizării acestora cu cerinţele capitolului 3 din anexa 16 — ICAO 419

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate în două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și introducîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula . Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl, 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițial și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

OPTIMIZAREA REȚELELOR PLANE DE TURBINE HIDRAULICE

II. Proiectarea rețelei și a paletei [1)]

de I. ANTON, GH. CĂLIN și D. IONESCU

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Problema dimensionării rețelelor de profile destinate paletei turbinelor hidraulice axiale este rezolvată prin generarea stratului limită optim, adiacent extradosului profilului. Analiza curgerii, luînd în considerare efectele viscozității, arată că funcționarea rețelei obținute, are loc în domeniul valorilor minime al pierderilor hidraulice. În cazul proiectării paletei rezultate bune, din punct de vedere hidrodinamic și constructiv, se obțin prin modificarea adecvată a geometriei unui profil generator, rezultat din optimizarea rețelei de la butuc.

1. INTRODUCERE

În proiectarea paletei unei mașini hidraulice axiale este necesar ca în toate secțiunile de calcul să găsim rețeaua optimă care să funcționeze cu eficiență maximă pentru elementele asimptotice, cinematice și unghiulare, cunoscute în amonte și în aval. Deoarece disipațiile se datorează în principal curgerii în stratul limită, este evident că problema poate fi rezolvată numai impunînd dezvoltarea optimă a acestuia din care să rezulte distribuția de viteză pe care trebuie să o realizeze profilul din rețea.

Optimizarea stratului limită este abordată pe baza modelului dezvoltat de Le Foll [10], care poate fi adaptat cu ușurință unor astfel de probleme. Spre deosebire de rețelele destinate compresoarelor sau turbinelor cu gaz [11], în cazul rețelelor de turbină hidraulică [6, 8], datorită funcționării la valori ridicate ale numărului Reynolds Re_∞ și ale turbulenței înalte a curgerii exterioare w'/W_e optimizarea constă în principal din optimizarea stratului limită turbulent.

Încercările de a obține în toate secțiunile de calcul ale unei palete rețele optimizate prin planul imagine [6, 8], formate din profile asemenea, au întîmpinat unele greutăți, deoarece :

— parametrii de proiectare ai rețelei diferă de la o secțiune la alta, ceea ce în planul imagine determină reprezentarea unei familii de curbe care, prin procedeul de dimensionare, nu conduc la profile asemenea ;

— prin metoda de dimensionare [15] rezultă un profil care aproximează distribuția de viteză impusă. Metoda este sensibilă la valorile vitezei în bordul de atac și de fugă care, în general, sînt dificil de precizat. În plus, obținerea bordului de fugă prin interpolare constituie, de asemenea, un element de aproximare.

În aceste condiții problema a fost redusă la optimizarea rețelei de la butuc din care, prin modificarea corespunzătoare a scheletului, a dis-

---

[1)] Prima parte a apărut în „Studii și cercetări de mecanică aplicată" tomul 48, nr. 3, 1989.

tribuţiei de grosimi şi a unghiului de instalare ale profilului rezultat, se obţin reţelele pentru celelalte secţiuni ale paletei. Modificarea geometriei reţelei generatoare trebuie astfel realizată încît proprietăţile optime ale stratului limită să nu fie afectate.

2. PARAMETRII REŢELEI ÎN PLANUL IMAGINE

Calculul hidrodinamic al unei palete [2] oferă în fiecare secţiune elementele cinematice şi unghiulare ale reţelei. De asemenea, se admit variaţiile în raport cu raza r ale pasului relativ t/l şi ale grosimii maxime adimensionale d/l. Optimizarea stratului limită în planul imagine [6,8], corespunzător distribuţiei de viteză pe extradosul profilului, implică următoarele mărimi :

i) valoarea turbulenţei în curgerea exterioară w'/W_e, care, pe baza unui criteriu corelat cu date experimentale, conduce la valoarea numărului Reynolds $Re_{\delta 2}$ la tranziţie, respectiv la abscisa X_T a punctului de tranziţie în planul imagine,

$$X_T = \ln (H_{32}\, Re_{\delta 2})_T + 2\, L_T\,; \tag{1}$$

ii) numărul Reynolds Re_{s_F} care rezultă din

$$Re_{s_F} = k_s^+\, Re_\infty, \tag{2}$$

unde $k_s^+ = 1{,}005 - 1{,}08$ pentru profile dispuse în reţea de turbină hidraulică [8]; valorile maxime corespund la butuc, iar cele minime la periferie;

iii) contribuţia extradosului la circulaţia pe profil, notată şi definită prin W_{med}^+. Valoarea acesteia se poate calcula aproximativ cu relaţia

$$W_{med}^+ = \frac{1}{k_s^+}\frac{C_{ar}}{2} + k_F \frac{W_\infty}{W_2} \tag{3}$$

în care prin k_F s-a notat viteza adimensională la bordul de fugă

$$k_F = \frac{W_F}{W_\infty} = k_v \frac{W_2}{W_\infty}, \tag{4}$$

unde k_v este un coeficient, $k_v = 0{,}87 - 0{,}91$.

Mărimile Re_{s_F} şi W_{med}^+ stabilesc coordonatele X_F şi L_F ale punctului final F al reprezentării distribuţiei de viteză pe extrados în planul imagine. Valorile acestor parametrii depind de k_F, care, din punct de vedere al metodei de dimensionare a geometriei reţelei, este un parametru important.

În scopul unei generalizări a optimizării reţelelor de turbină hidraulică în [6] a fost construit un plan imagine în care au fost reprezentate curbe universale pe baza cărora se obţin distribuţii de viteză independente de condiţiile de la intrare şi ieşire din reţea şi de geometria reţelei. Legă-

tura între mărimile calculate în acest plan, pentru o valoare unică $k_F = 1$ și o turbulență a curgerii exterioare $w'/W_e = 3\ \%$, și datele de proiectare ale rețelei este dată de

$$Re_F = k_F\ Re_{s_F}, \tag{5}$$

$$W_{med} = W^+_{med}/k_F. \tag{6}$$

Avînd cunoscute valorile lui Re_F și W_{med}, pentru rețeaua căutată, se poate construi configurația stratului limită pe care-l impunem în planul imagine. Distribuția de viteză se obține prin integrarea numerică a curbei stabilite, ținînd seama de cele două ecuații diferențiale (rel. (8) și (9) din ref. [6]) ale formulării stratului limită și de valorile parametrilor M și C_d [5,8]. În situația în care valoarea lui k_F nu satisface calculul de dimensionare al profilului din rețea, aceasta se modifică corespunzător și reprezentarea în planul imagine se reia cu noua valoare.

3. OPTIMIZAREA UNEI REȚELE DE TURBINĂ HIDRAULICĂ

În cele ce urmează se consideră, spre exemplificare, optimizarea unei rețele dispusă într-o secțiune de paletă destinată rotorului unui model de turbină bulb. Datele rețelei, rezultate din calculul hidrodinamic, sînt :

$$\frac{t}{l} 1{,}1062\ ;\ \beta_1 = 39^\circ\ ;\ \beta_2 = 31{,}78^\circ\ ;\ \beta_\infty = 35{,}071^\circ,$$

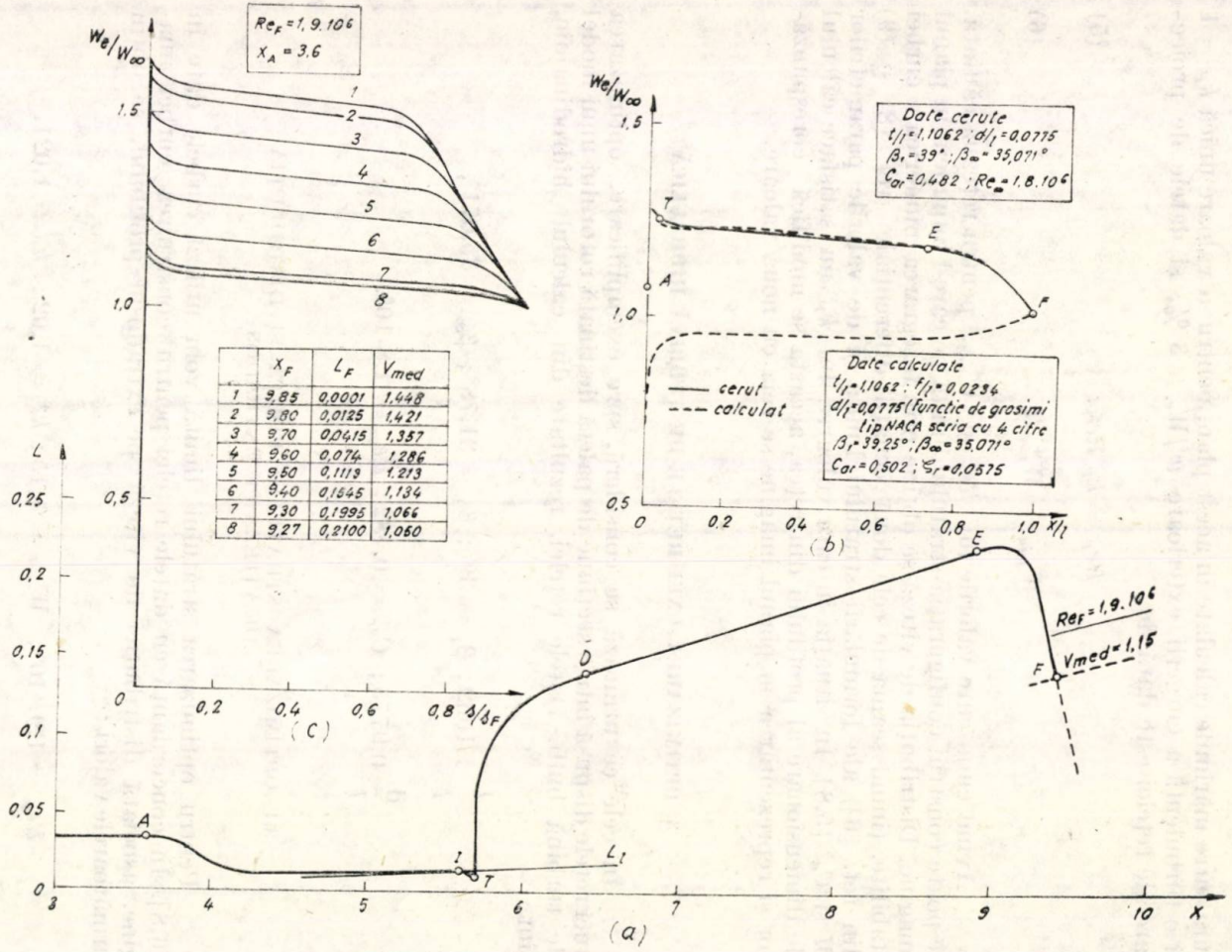
$$\frac{\mathrm{d}}{l} 0{,}0775\ ;\ C_{ar} = 0{,}482\ ;\ Re_\infty = 1{,}8 \cdot 10^6.$$

3.1. OPTIMIZAREA STRATULUI LIMITĂ ȘI DISTRIBUȚIA DE VITEZĂ PE EXTRADOS

Pentru optimizarea stratului limită vom utiliza curbele date în [6,8]. În concordanță cu datele rețelei pentru construirea curbei imagine, asociată distribuției de viteză pe extradosul profilului, se obțin următoarele valori :

$$Re_F = 1{,}9.\ 10^6\ ;\ W_{med} = 1{,}15\ ;\ k_s^+ = 1{,}02\ ;\ k_F = 1{,}021.$$

Curba imagine corespunzătoare mărimilor Re_F și W_{med} se trasează în conformitate cu [6] și este dată în figura 1*a*. Distribuția de viteză care rezultă pe baza acestei curbe, ținînd seama de valoarea lui k_F, este prezentată în figura 1*b* (linie continuă). În concordanță cu metoda de dimensionare a rețelei [16] abscisa curbilinie s/s_F se transformă în abscisa x/l în lungul coardei profilului. Distribuțiile de viteză (fig. 1*c*) calculate pentru diferite poziții ale punctului F, în lungul liniei de decelerare,



	X_F	L_F	V_{med}
1	9,85	0,0001	1,448
2	9,80	0,0125	1,421
3	9,70	0,0415	1,357
4	9,60	0,074	1,286
5	9,50	0,1113	1,213
6	9,40	0,1545	1,134
7	9,30	0,1995	1,066
8	9,27	0,2100	1,050

Fig. 1. — Optimizarea unei rețele de profile : a) reprezentarea în planul imagine a stratului limită pe extradosul profilului ; b) distribuția de viteză impusă și obținută la dimensionarea rețelei ; c) distribuții de viteză obținute pentru diferite poziții ale punctului F în lungul liniei de decelerare.

arată o îngustare a palierului vitezei, respectiv o creștere a decelerării cu creșterea lui W_{med}, respectiv cu deplasarea lui F la valori scăzute ale parametrului L.

3.2. DIMENSIONAREA REȚELEI

Geometria profilului și a rețelei se calculează cu metoda ecuațiilor integrale, adaptată problemelor de dimensionare de Wilkinson [16]. Metoda constă dintr-un calcul iterativ în care diferența dintre distribuția de viteză impusă și obținută pentru o configurație inițială este folosită să modifice scheletul profilului. Pentru configurația inițială se pornește, în general, cu un profil simetric.

Avantajul metodei constă în faptul că funcția de grosime și pasul rețelei se mențin aceleași în timpul analizei. Mărimea care se modifică este unghiul de instalare β_s. Metoda este deficitară în ceea ce privește forma profilului la bordul de fugă. În [8] s-a găsit că, pentru distribuțiile de viteză obținute prin planul imagine și pentru funcțiile de grosime acceptate la dimensionare, interpolarea primelor două puncte de la bordul de fugă al scheletului cu o parabolă cu originea în al doilea punct oferă rezultate mai bune decît recomandările date în [16].

La dimensionarea rețelei pentru distribuția de viteză (fig. 1*b*), impusă pe extrados, s-a folosit funcția de grosime a profilelor NACA seria cu 4 cifre [12],

$$y_d(x) = d(1{,}4845\sqrt{x} - 0{,}63\,x - 1{,}758\,x^2 + 1{,}4215\,x^3 - 0{,}5075x^4). \quad (7)$$

Profilul calculat (fig. 2) are scheletul aproximativ simetric cu săgeata maximă f/l dispusă la jumătatea coardei ($x_f = 0{,}5\,l$). Valoarea lui f/l este foarte apropiată de valorile frecvent obținute cu alte metode

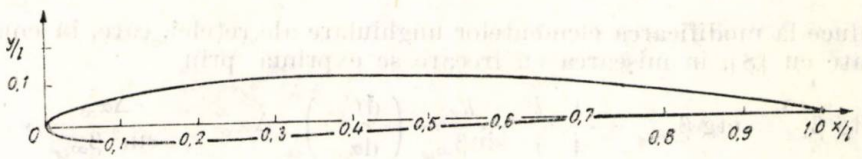


Fig. 2. — Profilul dimensionat

(de exemplu, metoda portanței sau metode potențiale). În figura 1*b* (linie întreruptă) este reprezentată distribuția de viteză pe care o realizează profilul dispus în rețea. Modul în care acesta aproximează distribuția de viteză impusă pe extrados poate fi considerat satisfăcător. De asemenea, satisfăcătoare poate fi considerată și valoarea coeficientului de portanță C_{ar}. Prin urmare, nu este necesar să mai repetăm calculele.

3.3. CARACTERISTICILE ENERGETICE ALE REȚELEI

Problema dimensionării fiind rezolvată se impune analiza curgerii reale în rețeaua obținută care, cu rezultate bune [8], poate fi abordată pe baza teoriei stratului limită. Cunoscînd dezvoltarea grosimii de depla-

sare δ_1, pe suprafața profilului, efectul stratului limită asupra curgerii potențiale se manifestă prin suma a trei efecte [4,8] : de coardă, de curbură și de grosime. Din acest punct de vedere este importantă modificarea circulației, echivalentă cu o reducere a incidenței cu $\Delta\alpha_\infty$. Micșorarea incidenței datorată efectului de coardă este dată de

$$\Delta\alpha_{\infty_1} = -\left(\frac{\delta_1^+ - \delta_1^-}{2l}\right)_F . \tag{8}$$

Modificarea circulației datorită efectelor de curbură și grosime este echivalentă [4] cu

$$\Delta\alpha_{\infty_2} = \frac{2\pi\left(A_1' + \frac{A_2'}{2}\right)\cos\alpha_{\infty_{id}}}{k_r\left(\frac{\mathrm{d}C_{as}}{\mathrm{d}\alpha_\infty}\right)_{id} + C_{ar_{id}}\operatorname{tg}\alpha_{\infty_{id}}}, \tag{9}$$

unde coeficienții A_1' și A_2' se calculează folosind raționamentul lui L. Speidel și N. Scholz [14], bazat pe metoda singularităților, dezvoltată de H. Schlichting [13]. O îmbunătățire a rezultatelor [8] se obține dacă la calculul acestor coeficienți se consideră cinci puncte pe suprafața profilului, astfel

$$\left(\frac{x}{l}\right)_n = 0{,}2 + 0{,}5\,(n-1),\quad n = \overline{1,5}. \tag{10}$$

Modificarea totală a unghiului de incidență,

$$\Delta\alpha_\infty = \Delta\alpha_{\infty_1} + \Delta\alpha_{\infty_2}, \tag{11}$$

conduce la modificarea elementelor unghiulare ale rețelei, care, în conformitate cu [8], în mișcarea cu frecare se exprimă prin

$$\operatorname{ctg}\beta_{1,2}' = \operatorname{ctg}\beta_{1,2_{id}} \pm \frac{1}{4}\frac{l}{t}\frac{k_r}{\sin\beta_{\infty_{id}}}\left(\frac{\mathrm{d}C_{as}}{\mathrm{d}\alpha_\infty}\right)_{id}|\Delta\alpha_\infty| - \frac{|\Delta\alpha_\infty|}{\sin^2\beta_{\infty_{id}}}, \tag{12}$$

în care indicele „s" se referă la profilul considerat singular.

Cu β_1' avem valoarea unghiului la intrare

$$\beta_1 = \beta_1'. \tag{13}$$

Unghiul la ieșire se mai modifică datorită curgerii în dîră. Raționamentul din [4, 8] conduce la

$$\sigma = \frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{\operatorname{ctg}\beta_2'} = \frac{1 - \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2}{(1 - \hat{\delta}_1)^2}, \tag{14}$$

unde $\hat{\delta}_1$ și $\hat{\delta}_2$ reprezintă grosimile adimensionale, de deplasare și de impuls, la bordul de fugă în direcția axei rețelei. Rezultate foarte bune

[8], îndeosebi pentru rețele de turbină, se obțin dacă acestea se calculează în raport cu unghiul de instalare β_s

$$\hat{\delta}_{1,2} = \left[\frac{\delta^+_{1,2} + \delta^-_{1,2}}{l}\right] \frac{l}{t \sin \beta_s}. \tag{15}$$

Evaluarea coeficientului de pierdere al rețelei rezultă din expresia stabilită în [4.8]

$$\zeta_r = \frac{\Delta p_{tot}}{\frac{1}{2}\rho V^2_m} = \frac{\sigma^2 + \operatorname{ctg}^2 \beta_2}{\sigma(1 - \hat{\delta}_1)^2} + 1 - 2\sigma - \operatorname{ctg}^2 \beta. \tag{16}$$

Pe baza ecuațiilor fundamentale ale rețelelor de profile [2] se pot calcula caracteristicile rețelei în curgerea reală

$$C_{ar} = 2\frac{t}{l}\delta_u \sin \beta_\infty + \frac{t}{l}\zeta_r \sin^2 \beta_\infty \cos\beta_\infty, \tag{17}$$

$$C_{wr} = \frac{t}{l}\zeta_r \sin^3 \beta_\infty. \tag{18}$$

Pentru a obține în curgerea reală aceeași portanță din curgerea potențială este necesară o rotire a profilului cu $\Delta\alpha_\infty$ în sensul creșterii incidenței

$$\alpha_{\infty_{cor}} = \alpha_{\infty_{id}} + |\Delta\alpha_\infty|. \tag{19}$$

În acest caz se modifică elementele unghiulare ale rețelei. Folosind un raționament analog deducerii expresiei (12), rezultă

$$\operatorname{ctg} \beta_{1,2_{cor}} = \operatorname{ctg} \beta_{1,2_{id}} + \frac{|\Delta\alpha_\infty|}{\sin^2 \beta_{\infty_{id}}}. \tag{20}$$

Acestea au ca efect modificarea caracteristicilor rețelei care se calculează cu relațiile (16) — (18) cu observația că în expresiile (13) — (14) mărimile efectuate de semnul „'" se înlocuiesc cu mărimile corespunzătoare afectate de indicele „cor".

Randamentul hidraulic al rețelei se poate evalua cu relația dată de Speidel și Scholz [14]

$$\eta_h = 1 - \frac{1}{2}\frac{\zeta_r}{\delta_u}\frac{v_m}{U}. \tag{21}$$

Pentru analiza curgerii cu frecare în rețeaua generată, parametrii stratului limită (fig. 3) s-au calculat cu metoda Thwaites [7], pentru stratul laminar, și metoda Head [7, 9], pentru stratul turbulent. Poziția punctului de tranziție s-a stabilit cu criteriul dat de Van Driest și Blumer [15]. Rezultatele s-au dovedit într-o bună concordanță, îndeosebi pentru grosimea de impuls δ_2, cu cele obținute cu relațiile folosite la stabilirea funcțiilor M și C_d din planul imagine. Calculele confirmă restrîngerea porțiunii laminare în apropierea bordului de atac care, fără a afecta rezul-

tatele, poate fi neglijată şi deci, stratul limită poate fi considerat în totalitate turbulent.

Evaluarea caracteristicilor energetice (fig. 4) în funcţie de unghiul de la intrare β_1 arată că, din punct de vedere al pierderilor, dimensionarea reţelei se realizează în domeniul optim de funcţionare. În punctul de calcul,

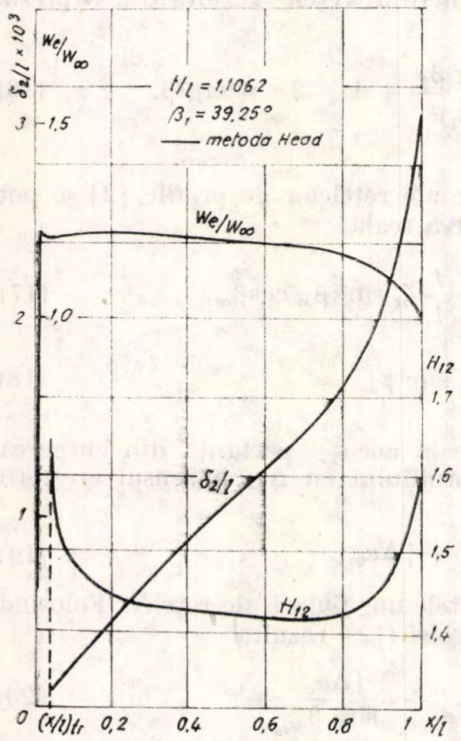


Fig. 3. — Distribuţia de viteză şi parametrii stratului limită turbulent pe extradosul profilului dimensionat

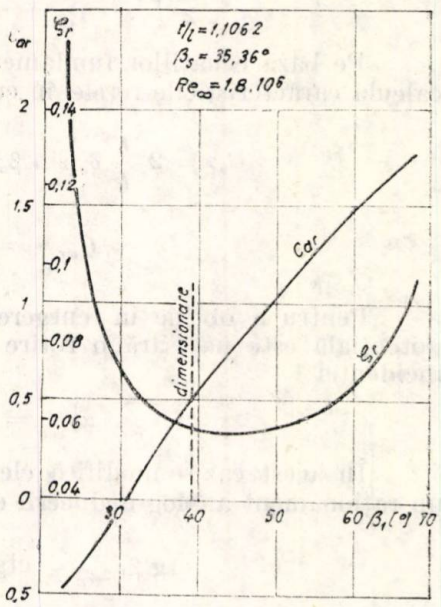


Fig. 4. — Variaţia coeficienţilor de portanţă C_{ar} şi de pierdere ξ_r calculaţi în raport cu unghiul de la intrare β_1.

valoarea coeficientului ζ_r este foarte aproape de valoarea minimă. Observînd relaţia (21) rezultă că eficienţa reţelei creşte la valori mai mari ale unghiului β_1 în raport cu valoarea rezultată din calculul hidrodinamic. Aceasta presupune însă ca viteza meridională v_m să fie menţinută la aceeaşi valoare.

4. PROIECTAREA UNEI PALETE

Din punct de vedere hidrodinamic şi constructiv [2] realizarea paletei din aceeaşi familie de profile constituie facilităţi importante. A fost arătat (secţ. 1) că rezolvarea problemei prin procedeul de optimizare prezentat este limitată de unele dificultăţi care apar în diferitele etape de calcul. Totuşi, problema poate fi abordată prin optimizarea unui

profil generator care, prin modificarea corespunzătoare a geometriei, să conducă la dimensionarea rețelelor în toate secțiunile de calcul ale paletei. Ca profil generator se consideră profilul rezultat din optimizarea rețelei în secțiunea de la butuc. Avantajul pe care îl prezintă această secțiune a paletei constă în coeficientul de portanță C_{ar} mult mai ridicat comparativ cu celelalte secțiuni. Pentru valori mai mari ale lui C_{ar} sînt necesare valori mari pentru W_{med} care, în concordanță cu figura 1*c*, implică o decelerare mare a distribuției de viteză. S-a constatat [8] că în cazul unor decelerații mari, pînă în apropierea desprinderii stratului limită ($L = 0$), panta liniei de declerare și raza curbei de racordare din E influențează atît valoarea coeficientului de pierdere ζ_r, cît și extinderea domeniului optim de funcționare al rețelei care, prin modificarea profilului, afectează și caracteristicile rețelelor din celelalte secțiuni. Prin urmare, în cazul unor decelerații mari este necesar să fie analizate mai multe variante de curbă imagine la care să se modifice segmentul EF corespunzător decelerării. Calculele vor fi conduse pînă la evaluarea pierderilor.

În continuare se va expune procedeul de proiectare și rezultatele obținute pentru o paletă de turbină axială de tip Kaplan. Parametrii turbinei industriale sînt:

$$H = 6{,}72 \text{ m}; \quad Q = 174{,}69 \text{ m}^3/\text{s}; \quad n = 75 \text{ rot/min}; \quad n_s = 820 \text{ rot/min}.$$

4.1. CALCULUL HIDRODINAMIC AL PALETEI TURBINEI MODEL

La calculul hidrodinamic al unei palete se acceptă, în general, o valoare constantă a randamentului hidraulic ($\eta_h = 95\%$). Evaluarea performanțelor rețelelor dispuse în secțiunile de calcul ale unor palete au arătat însă că η_h scade de la butuc la periferie. Reconsiderarea problemei sub această formă a condus sistematic, în urma verificărilor experimentale, la îmbunătățirea eficienței unor rotori. Din aceste considerente, la calculul elementelor asimptotice, cinematice și unghiulare, ale paletei s-a presupus o variație liniară a lui η_h de la butuc ($\eta_h = 98\%$) la periferie ($\eta_h = 88\%$). Valoarea medie este $\eta_{hmed} = 93\%$. Mărimile de interes a paletei turbinei model sînt date în tabelul 1. Calculele s-au efectuat pentru $z = 3$ palete în șase secțiuni.

Tabelul 1

Secț.	01	02	03	04	05	06
r/R	0,374	0,50	0,623	0,745	0,868	0,99
t/l	0,8	0,904	0,982	1,041	1,089	1,128
d/l	0,120	0,0899	0,0674	0,0501	0,0363	0,025
η_h [%]	98	96	94	92	90	88
β_1 [°]	71,20	44,54	32,12	25,26	20,91	17,90
β_∞ [°]	50,52	36,05	28,08	23,06	19,59	17,04
$Re_\infty 10^{-6}$	1,59	2,44	3,50	4,74	6,17	7,77
C_{ar}	1,194	0,761	0,520	0,375	0,282	0,219

4.2. OPTIMIZAREA REŢELEI GENERATOARE

Optimizarea stratului limită pentru reţeaua generatoare s-a făcut pe baza concluziilor desprinse în [8]. Comparativ cu varianta din figura 1*a*, panta liniei de decelerare a curbei imagine (fig. 5) este foarte apropiată de valoarea maximă posibilă. O astfel de decelerare, precedată de o creştere a

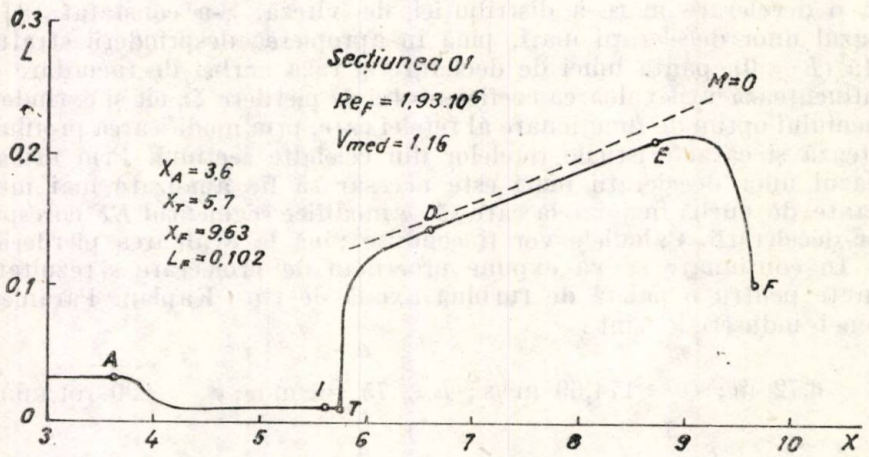


Fig. 5. — Optimizarea stratului limită pentru reţeaua generatoare

razei curbei de racordare din E, conduce la reducerea palierului distribuţiei de viteză (fig. 6) şi determină creşterea decelerării vitezei în apropierea bordului de fugă. Prin aceasta se realizează o micşorare a pierderilor în reţea şi de asemenea o îmbunătăţire a domeniului de funcţionare al reţelei.

Pentru calculul de dimensionare s-a folosit o funcţie de grosime a profilelor NACA seria modificată cu 4—5 cifre [1], care, spre deosebire de funcţia (7), are avantajul că raza bordului de atac şi poziţia grosimii maxime pot fi modificate. Prin alegerea convenabilă a celor doi parametrii este posibilă dimensionarea unui profil care aproximează cu abateri minime distribuţia de viteză calculată din planul imagine. În cazul considerat, rezultate foarte bune (fig. 6) s-au obţinut cu funcţia de grosime exprimată prin relaţiile

$$y_d = d(0{,}98968\sqrt{x} + 1{,}21349x - 6.48077\ x^2 + 6{,}5612\ x^3),$$

$$0 \leqslant x \leqslant 0{,}3\ l,$$

$$y_d = d[0{,}01 + 1{,}17(1 - x) - 0{,}34286(1 - x)^2 - 0{,}46939(1 - x)^3], \tag{22}$$

$$0{,}3l \leqslant x \leqslant l.$$

Geometria profilului (fig. 7) se caracterizează printr-un schelet (fig. 8) cu poziţia curburii maxime situată la aproximativ 40% din coardă. Săgeata maximă se încadrează în valorile frecvent folosite în proiectarea maşinilor hidraulice axiale.

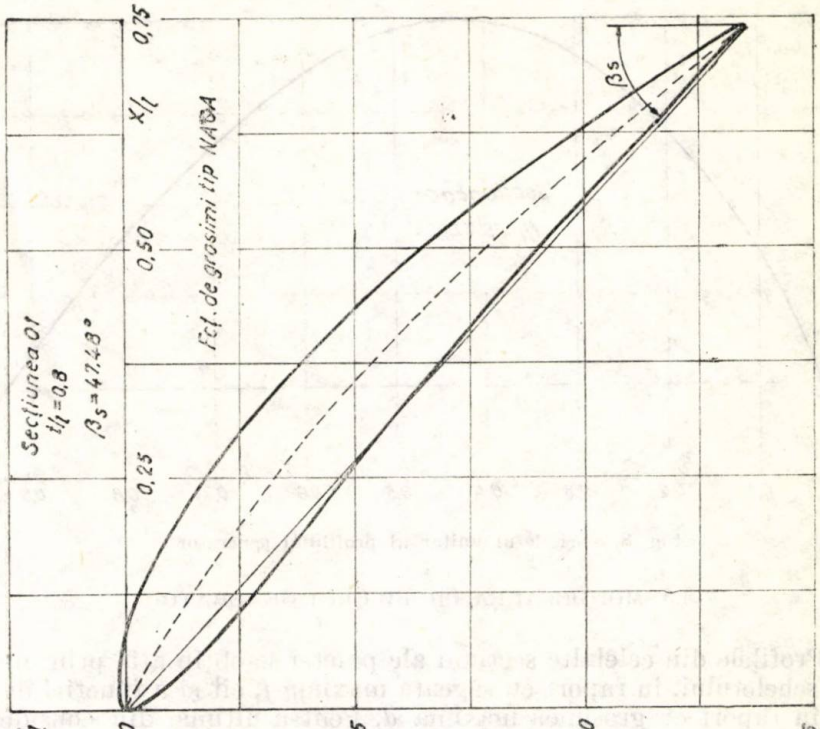


Fig. 7.— Geometria rețelei generatoare

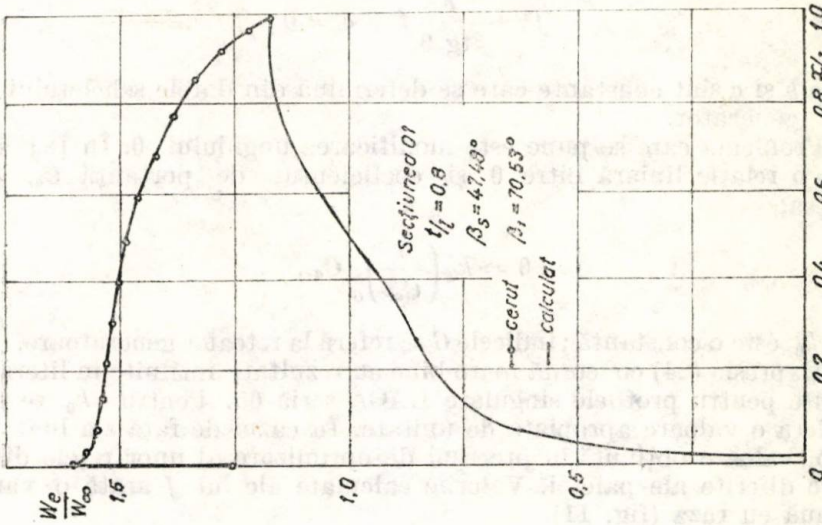


Fig. 6.— Distribuția de viteză în rețeaua generatoare

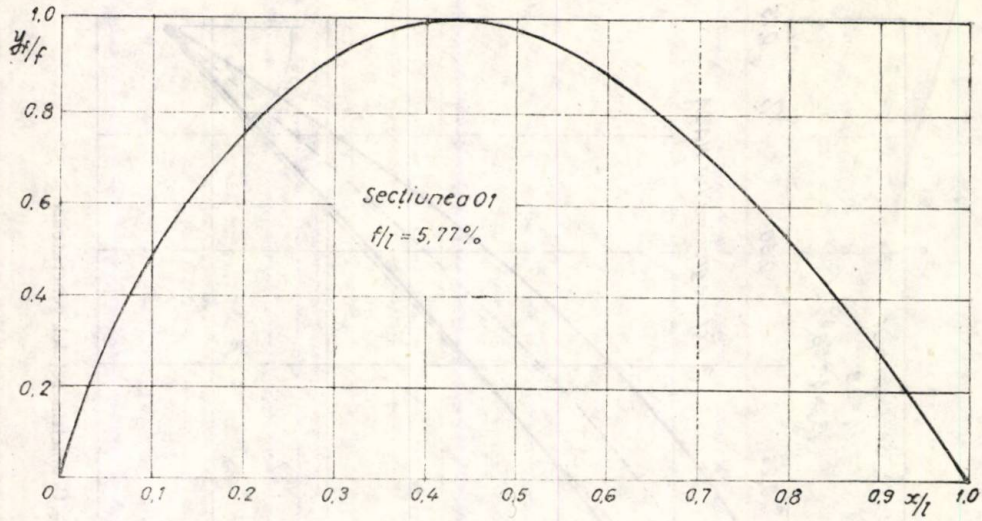


Fig. 8.—Scheletul unitar al profilului generator

4.3. MODIFICAREA PROFILULUI GENERATOR

Profilele din celelalte secțiuni ale paletei se obțin atît prin modificarea scheletului, în raport cu săgeata maximă f, cît și a funcției de grosime, în raport cu grosimea maximă d. Pentru ultima, din considerente de rezistență, se cunoaște variația cu raza (tabelul 1). Pentru f se admite că scheletul este format din două curbe care se racordează în punctul de curbură maximă x_f. În acest caz există o legătură între f și unghiul θ, închis de tangentele duse la schelet în bordul de atac și de fugă. Ecuația este de forma

$$f^2 + \frac{b}{\operatorname{tg}\,\theta} f + c = 0 \tag{23}$$

în care b și c sînt constante care se determină din datele scheletului profilului generator.

Problema care se pune este modificarea unghiului θ. În [8] a fost găsită o relație liniară între θ și coeficientul de portanță C_{ar} cerut de rețea,

$$\theta = k_\theta \left(\frac{\theta}{C_{ar}}\right)_G C_{ar}, \tag{24}$$

unde k_θ este o constantă; indicele G se referă la rețeaua generatoare.

Expresia (24) concordă foare bine cu rezultate întîlnite în literatură, obținute pentru profilele singulare NACA seria 65. Pentru k_θ se poate considera o valoare apropiată de unitate. În cazul de față s-a luat $k_\theta = 0{,}95$, valoare obținută în procesul de optimizare al unor rețele dispuse la raze diferite ale paletei. Valorile calculate ale lui f arată o variație continuă cu raza (fig. 11).

4.4. DETERMINAREA GEOMETRIEI REȚELEI ÎN SECȚIUNILE PALETEI

Odată rezolvată geometria profilului generator, urmează stabilirea geometriei rețelei. Aceasta trebuie să asigure portanța cerută de rețea. Deoarece variația pasului relativ t/l este cunoscută, rămîne de stabilit unghiul de instalare β_s. Calculul lui β_s este posibil numai printr-un

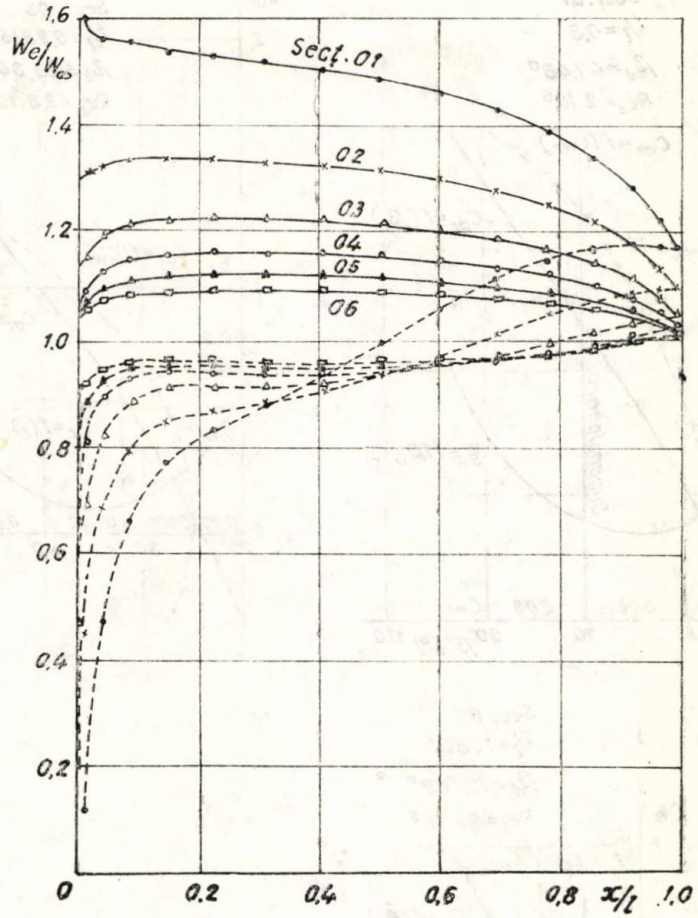


Fig. 9.—Distribuțiile de viteză în secțiunile de calcul ale paletei

procedeu de modificare succesivă care în final să conducă la valoarea căutată a lui C_{ar}. Aceasta se datorează metodei [16] de calcul a curgerii potențiale din rețea, care, prin modul de reprezentare a profilului, nu asigură o legătură directă între circulație și parametrii t/l și β_s.

În figura 11 este reprezentată variația lui β_s cu raza, iar în figura 9 sînt date distribuțiile de viteză din secțiunile paletei. Continuitatea săgeții maxime și a unghiului de instalare arată că asamblarea rețelelor conduc la o paletă continuă din punct de vedere al suprafeței.

4.5. PERFORMANȚELE PALETEI

Calculul caracteristicilor energetice, prin considerarea efectelor viscozității, în trei secțiuni ale paletei (fig. 10) demonstrează că dimensionarea are loc în domeniul optim de funcționare ale rețelei, asemănător

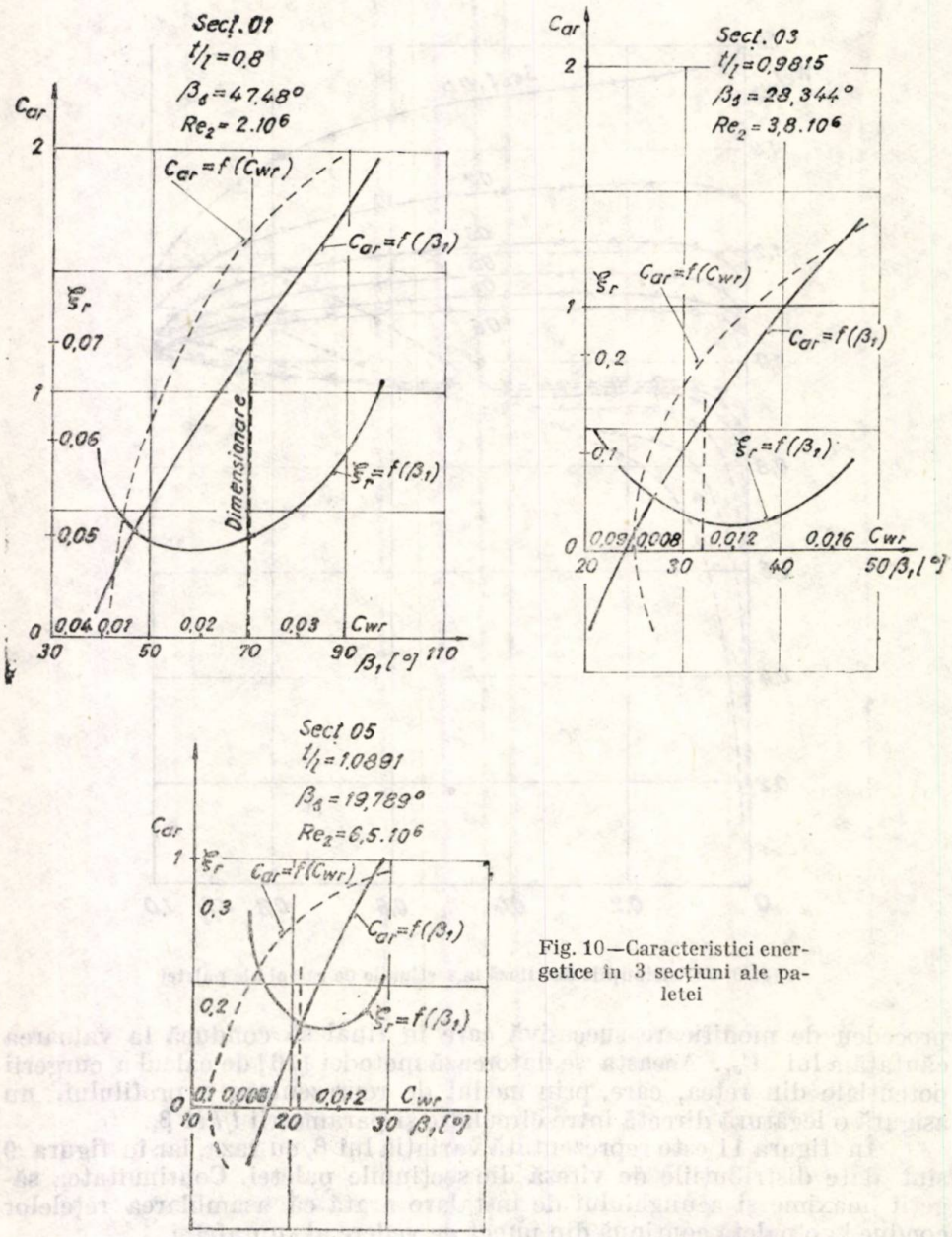


Fig. 10—Caracteristici energetice în 3 secțiuni ale paletei

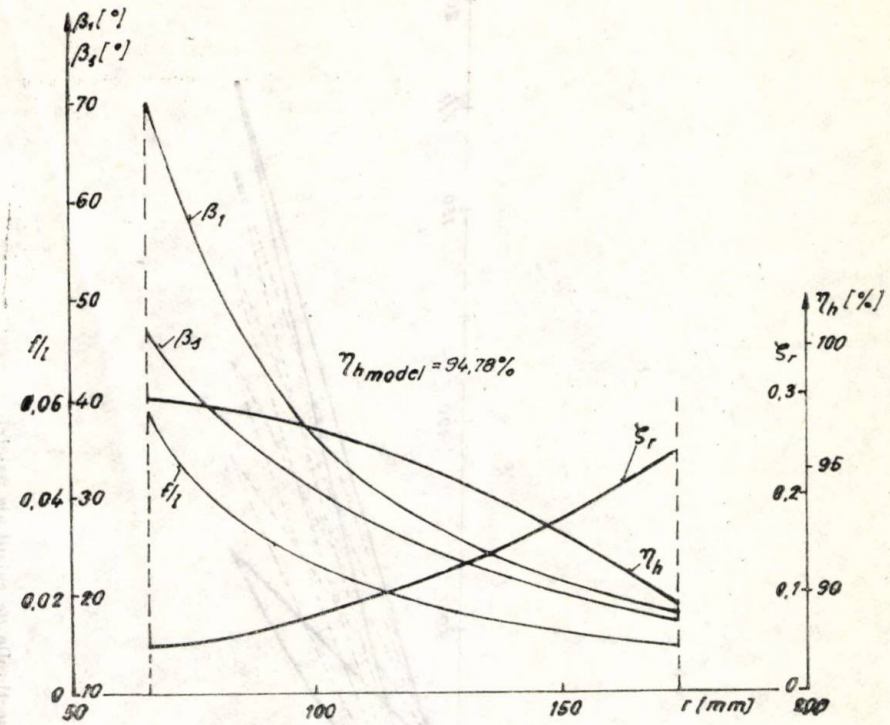


Fig. 11. — Variația unor parametrii geometrici și energetici cu raza paletei

celei realizate prin procedeul de optimizare (secț. 3). În ceea ce privește comportarea paletei la curgerea reală a fluidului rezultă că disipația energiei crește de la butuc la periferie în concordanță cu scăderea eficienței. Valorile lui η_h (fig. 11) la butuc și la periferie sînt aproximativ aceleași cu cele admise la calculul hidrodinamic. În restul paletei variația randamentului se abate de la legea liniară admisă inițial. Variația rezultată este mult mai acceptabilă. Valoarea medie pentru rotorul turbinei model este $\eta_{hmod} \simeq 95\%$, care poate fi considerată o valoare foarte bună.

4.6. PALETA TURBINEI MODEL

Asamblarea profilelor (fig. 12) s-a făcut în conformitate cu recomandările din literatură [2]. Muchia de ieșire s-a luat o dreaptă în proiecție meridională, dispusă normal la axa mașinii. Liniile de nivel în desenul paletei (fig. 13) confirmă continuitatea suprafeței.

Rotorul turbinei model este în curs de execuție și urmează să fie investigat experimental.

Primit în redacție la 8 octombrie 1988

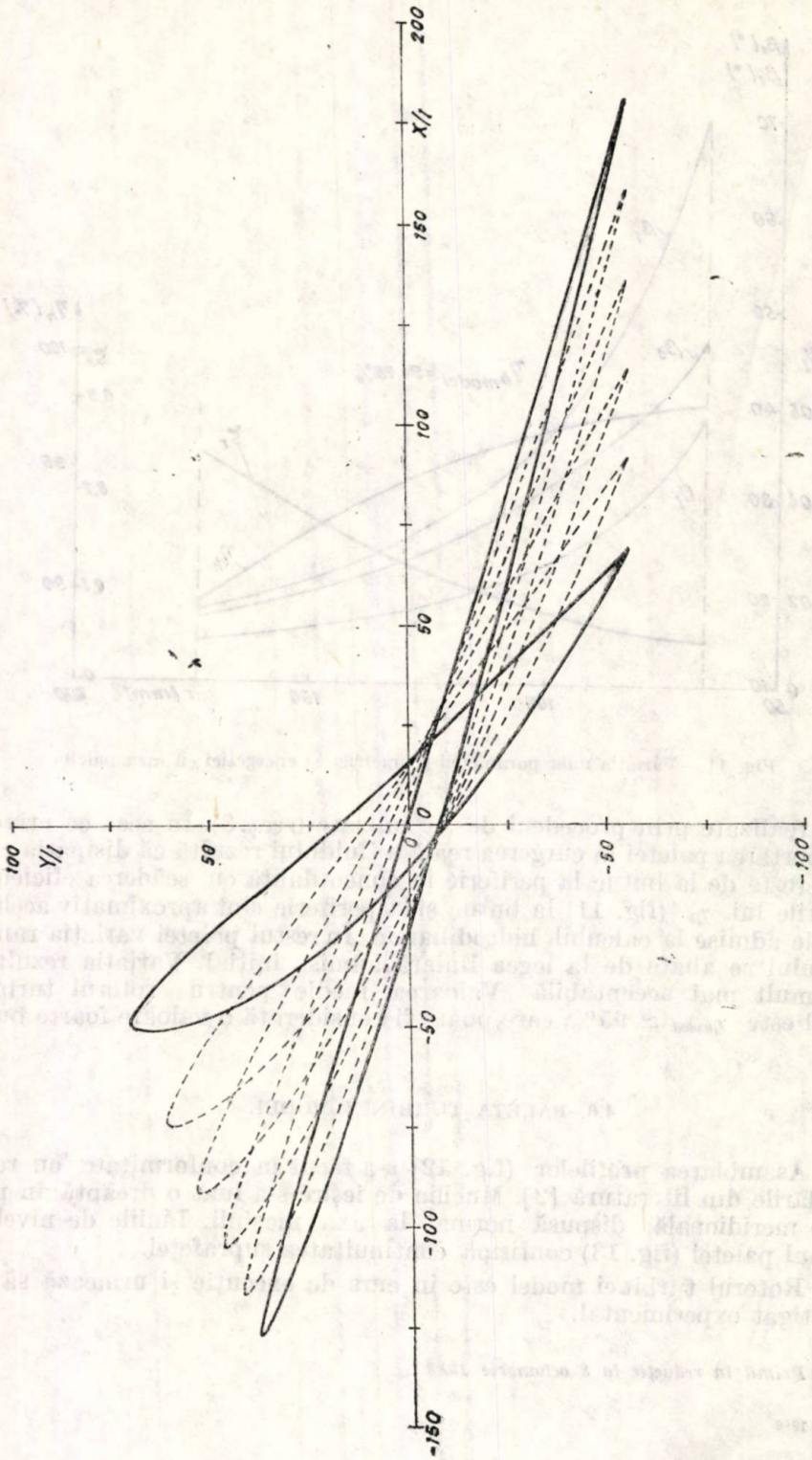


Fig. 12. — Geometria reţelelor din secţiunile de calcul ale paletei

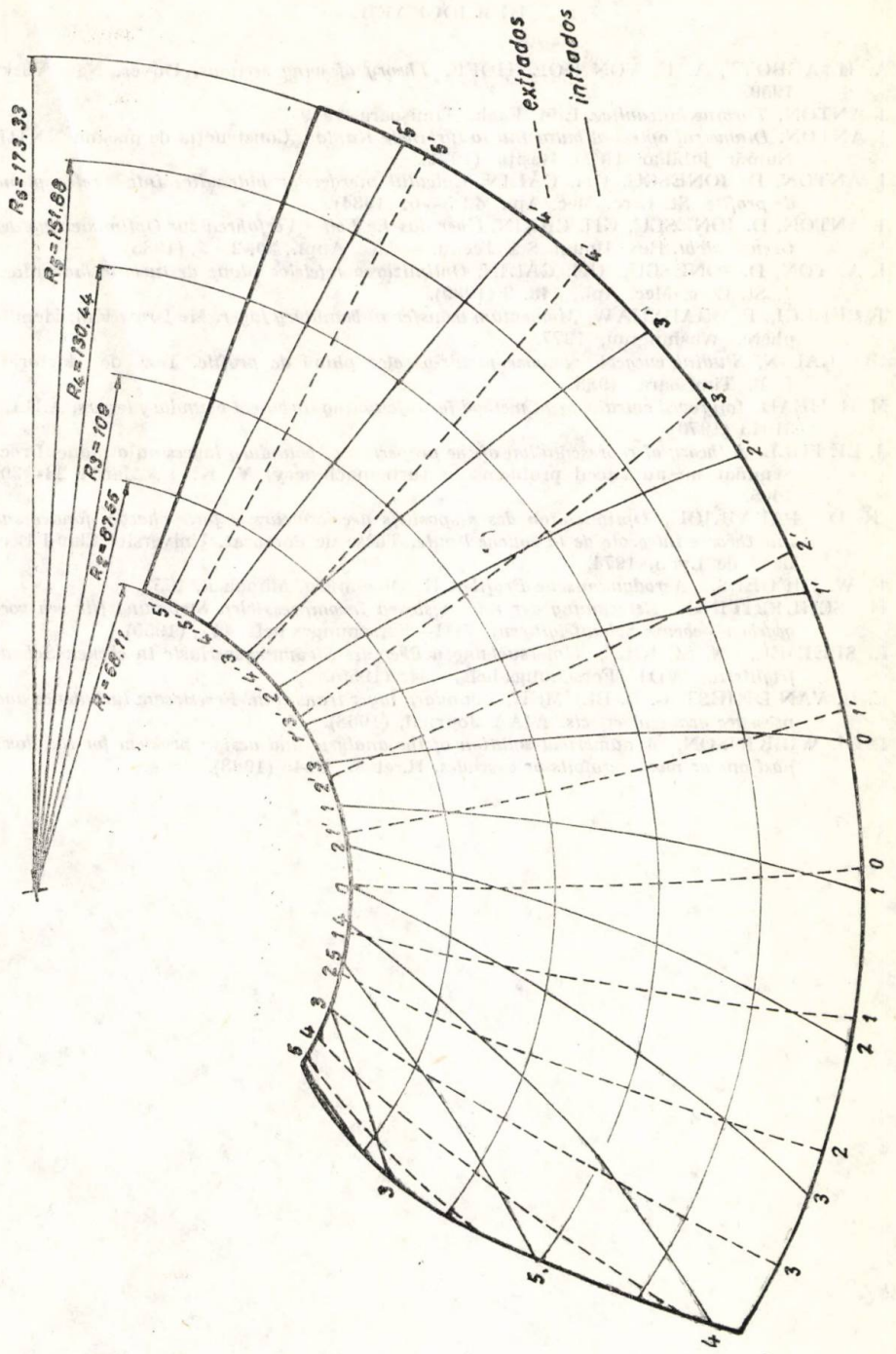


Fig. 13. — Paleta turbinei model

BIBLIOGRAFIE

1. A. H. ABBOTT, A. E. VON DOENHOFF, *Theory of wing sections*, Dover, New York, 1959.
2. I. ANTON, *Turbine hidraulice*, Edit. Facla, Timişoara, 1979.
3. I. ANTON, *Diametrul optim al butucului la turbinele Kaplan*, Construcţia de maşini, XXIII, Număr jubiliar UCM Reşiţa (1971).
4. I. ANTON, D. IONESCU, GH. CĂLIN, *Calculul pierderilor hidraulice într-o reţea plană de profile*, St. Cerc. Mec. Apl., **43** 5—6, (1984).
5. I. ANTON, D. IONESCU, GH. CĂLIN, *Über das Le Foll— Verfahren zur Optimisierung der Grenzschicht*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **30**, 2—3, (1985).
6. I. ANTON, D. IONESCU, GH. CĂLIN, *Optimizarea reţelelor plane de turbine hidraulice, I*, St. Cerc. Mec. Apl., **48**, 3 (1989).
7. T. CEBECI, P. BRADSHAW, *Momentum transfer in boundary layer*, Mc Graw Hill, Hemisphere, Washington, 1977.
8. GH. CĂLIN, *Studiul curgerii vîscoase printr-o reţea plană de profile*, Teză de doctorat, I. P. Timişoara, 1988.
9. M. R. HEAD, *Improved entrainement method for calculating turbulent boundary layers*, A.R.C., 31043 (1970).
10. J. LE FOLL, *A theory of representation of the properties of boundary layers on a plane*, Proc. Seminar on advanced problems in turbomachinery, V. K. I., March 23—30, 1965.
11. K. D. PAPAILIOU, *Optimisation des dispositifs décelerateurs à forte charge, fondée sur une théorie integrale de la couche limite*, Thèse de doctorat, Université Claud Bernard de Lyon, 1974.
12. F. W. RIEGELS, *Aerodynamische Profile*, R. Oldenburg, München, 1958.
13. H. SCHLICHTING, *Berechnung der reibungslosen incompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgittern*, VDI—Forschunges heft, 447, (1955).
14. L. SPEIDEL, N. SCHOLZ, *Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern*, VDI—Forschungs-heft, 464, (1955).
15. E. R. VAN DRIEST, C. B. BLUMER, *Boundary layer transition. Freestream turbulence and pressure gradient effects*. AIAA Journal, (1968).
16. D. H. WILKINSON, *A numerical solution of the analysis and design problem for the flows past one or more aerofoils or cascades*, R. et M., 3545 (1968).

VIBRAȚIILE SISTEMELOR SPAȚIALE

de ȘT. STAICU

Institutul Politehnic București

Lucrarea tratează problema vibrațiilor unui sistem spațial de rigide sub acțiunea unor forțe periodice de excitație, ținînd seama de influența factorilor disipativi. Se stabilesc relații matriceale restrînse care simplifică analiza răspunsului dinamic în regim staționar.

1. INTRODUCERE

Fie un sistem de n solide de mase m_s aflat în repaus față de un reper fix. Dacă rigidele sînt legate elastic între ele prin resorturi, atunci sistemul mecanic considerat poate avea $6n$ grade de libertate.

Lucrarea studiază vibrațiile sistemului spațial sub acțiunea unor forțe exterioare cu variație periodică în timp, luînd în considerație și rezistențele care apar între elementele componente. În acest scop vom considera triedrul fix $O_0x_0y_0x_0(T_0)$ și triedrele mobile $O_\sigma x_\sigma y_\sigma z_\sigma$ $(T_\sigma, \sigma = 1,2,\ldots, s-1)$ în raport cu care efectuează mișcări oscilatorii rigidul solidar cu sistemul $O_s x_s y_s z_s$ (T_s) (fig. 1).

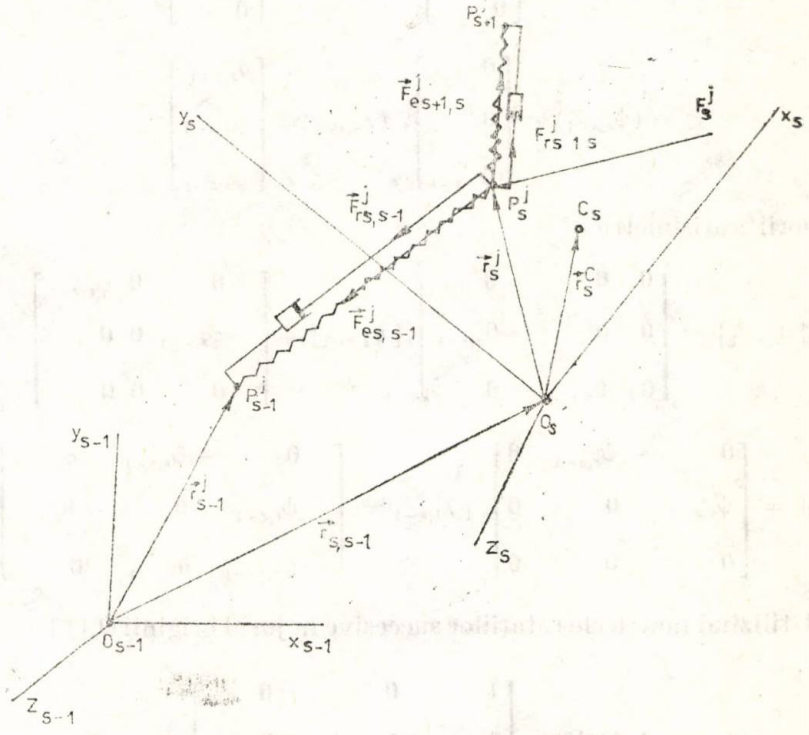


Fig. 1

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 4, 1989, P. 367—378

În numeroase aplicaţii este necesar să se determine solicitarea elementelor care leagă părţile componente ale unui sistem. De aceea este utilă poziţionarea relativă a corpurilor în timpul mişcărilor oscilatorii.

Parametrii de poziţie ai rigidului T_s, în raport cu reperul mobil T_{s-1}, vor fi coordonatele relative $x_{s,s-1}$, $y_{s,s-1}$, $z_{s,s-1}$ ale originii O_s şi unghiurile relative ale lui Euler $\theta_{s,s-1}$, $\varphi_{s,s-1}$, $\psi_{s,s-1}$, formate de axele O_sx_s, O_sy_s, O_sz_s cu axele $O_{s-1}x_{s-1}$, $O_{s-1}y_{s-1}$, $O_{s-1}z_{s-1}$. Aceşti parametri definesc vectorii polari $\vec{r}_{s,s-1}$ prin matricele coloane

$$(r_{s,s-1}) = \begin{bmatrix} x_{s,s-1} \\ y_{s,s-1} \\ z_{s,s-1} \end{bmatrix} (s = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

şi vectorii axiali [6] $\vec{\theta}_{s,s-1}$, $\vec{\varphi}_{s,s-1}$, $\vec{\psi}_{s,s-1}$, $\vec{\lambda}_{s,s-1}$ care determină matricele coloane

$$(\theta_{s,s-1}) = \begin{bmatrix} \theta_{s,s-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\varphi_{s,s-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_{s,s-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\psi_{s,s-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{s,s-1} \end{bmatrix}, \quad (\lambda_{s,s-1}) = \begin{bmatrix} \theta_{s,s-1} \\ \varphi_{s,s-1} \\ \psi_{s,s-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

şi tensorii antisimetrici

$$[\theta_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_{s,s-1} \\ 0 & \theta_{s,s-1} & 0 \end{bmatrix}, [\varphi_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_{s,s-1} \\ -\varphi_{s,s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\psi_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_{s,s-1} & 0 \\ \psi_{s,s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\lambda_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_{s,s-1} & \varphi_{s,s-1} \\ \psi_{s,s-1} & 0 & -\theta_{s,s-1} \\ -\varphi_{s,s,-1} & \theta_{s,s-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Utilizînd matricele rotaţiilor succesive în jurul originii O_s[1]:

$$[a_0^{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{s,s-1} & \sin\theta_{s,s-1} \\ 0 & -\sin\theta_{s,s-1} & \cos\theta_{s,s-1} \end{bmatrix},$$

$$[a_{\varphi}^{s,s-1}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{s,s-1} & 0 & -\sin\varphi_{s,s-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_{s,s-1} & 0 & \cos\varphi_{s,s-1} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$[a_{\psi}^{s,s-1}] = \begin{bmatrix} \cos\psi_{s,s-1} & \sin\psi_{s,s-1} & 0 \\ -\sin\psi_{s,s-1} & \cos\psi_{s,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se construiește matricea ortogonală $[a_{s,s-1}]$ de trecere din sistemul mobil T_{s-1} în cel alăturat T_s :

$$[a_{s,s-1}] = [a_{\psi}^{s,s-1}][a_{\varphi}^{s,s-1}]\,[a_{\theta}^{s,s-1}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{s,s-1} & \alpha_{12}^{s,s-1} & \alpha_{13}^{s,s-1} \\ \alpha_{21}^{s,s-1} & \alpha_{22}^{s,s-1} & \alpha_{23}^{s,s-1} \\ \alpha_{31}^{s,s-1} & \alpha_{32}^{s,s-1} & \alpha_{33}^{s,s-1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

ale cărei elemente sînt

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{s,s-1} &= \cos\varphi_{s,s-1}\cos\psi_{s,s-1},\\
\alpha_{12}^{s,s-1} &= -\sin\varphi_{s,s-1}\sin\theta_{s,s-1}\cos\psi_{s,s-1} + \cos\theta_{s,s-1}\sin\psi_{s,s-1},\\
\alpha_{13}^{s,s-1} &= -\sin\varphi_{s,s-1}\cos\theta_{s,s-1}\cos\psi_{s,s-1} + \sin\theta_{s,s-1}\sin\psi_{s,s-1},\\
\alpha_{21}^{s,s-1} &= -\cos\varphi_{s,s-1}\sin\psi_{s,s-1}\\
\alpha_{22}^{s,s-1} &= -\sin\varphi_{s,s-1}\sin\theta_{s,s-1}\sin\psi_{s,s-1} + \cos\theta_{s,s-1}\cos\psi_{s,s-1},\\
\alpha_{23}^{s,s-1} &= -\sin\varphi_{s,s-1}\cos\theta_{s,s-1}\sin\psi_{s,s-1} + \sin\theta_{s,s-1}\cos\psi_{s,s-1},\\
\alpha_{31}^{s,s-1} &= \sin\varphi_{s,s-1},\\
\alpha_{32}^{s,s-1} &= -\sin\theta_{s,s-1}\cos\varphi_{s,s-1},\\
\alpha_{33}^{s,s-1} &= \cos\theta_{s,s-1}\cos\varphi_{s,s-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Coordonatele și viteza absolută ale originii O_s a triedrului T_s formează în sistemul cartezian fix $O_0\,x_0\,y_0\,z_0$ matricele coloane [2] :

$$(r_{s0}) = (r_{10}) + \sum_{\sigma=1}^{s-1} [a_{\sigma 0}]^T (r_{\sigma+1,\sigma}), \tag{7}$$

$$(\dot{r}_{s0}) = (\dot{r}_{10}) + \sum_{\sigma=1}^{s-1} [a_{\sigma 0}]^T (\dot{r}_{\sigma+1,\sigma}), \tag{8}$$

unde s-a notat

$$[a_{\sigma 0}]^T = \prod_{\tau=1}^{s} [a_{\tau,\tau-1}]^T. \tag{9}$$

2. FORŢE ŞI DEPLASĂRI

Vom presupune că rigidul T_s este conectat la corpurile alăturate T_{s-1} şi T_{s+1} prin elemente elastice şi prin elemente disipative fixate la capete în punctele P^j_{s-1}, P^j_s şi P^j_{s+1}, ale căror coordonate formează matricele

$$(r^j_\sigma) = \begin{bmatrix} x^j_\sigma \\ y^j_\sigma \\ z^j_\sigma \end{bmatrix}, \quad [r^j_\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & -z^j_\sigma & y^j_\sigma \\ z^j_\sigma & 0 & -x^j_\sigma \\ -y^j_\sigma & x^j_\sigma & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\sigma = s-1, s, s+1\}. \tag{10}$$

Poziţia relativă a punctului P^j_s, faţă de triedrul T_{s-1}, poate fi fixată prin relaţia de recurenţă

$$(r^j_{s-1}) = (r_{s,s-1}) + [a_{s,s-1}]^T (r^j_s). \tag{11}$$

Fie $k^{1j}_{s,s-1}$, $k^{2j}_{s,s-1}$, $k^{3j}_{s,s-1}$ constantele elastice şi repectiv $h^{1j}_{s,s-1}$, $h^{2j}_{s,s-1}$, $h^{3j}_{s,s-1}$ coeficienţii de amortizare, de-a lungul axelor $O_{s-1}x_{s-1}$, $O_{s-1}y_{s-1}$, $O_{s-1}z_{s-1}$, pentru elementele care leagă corpurile T_{s-1} şi T_s[5], [7]. Aceşti coeficienţi pot forma matricele diagonale

$$[k^j_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} k^{1j}_{s,s-1} & 0 & 0 \\ 0 & k^{2j}_{s,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & k^{3j}_{s,s-1} \end{bmatrix},$$

$$[h^j_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} h^{1j}_{s,s-1} & 0 & 0 \\ 0 & h^{2j}_{s,s-1} & 0 \\ 0 & 0 & h^{3j}_{s,s-1} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

De asemenea, coeficienţii elementelor de legătură dintre rigidele T_s şi T_{s+1}, corespunzător axelor O_sx_s, O_sy_s, O_sz_s, formează matricele $[k^j_{s+1,s}]$ şi $[h^j_{s+1,s}]$.

Forţele elastice şi cele disipative, aplicate pe rigidul T_s, se calculează uşor dacă vom determina mai întîi deplasarea relativă şi viteza relativă a punctului de fixare din poziţia iniţială P^j_{s0} în poziţia momentană P^j_s, adică vectorii

$$(P^j_{s0}P^j_s) = (r_{s,s-1}) + \{[a_{s,s-1}]^T - [e]\} (r^j_s),$$

$$(\dot{r}^j_{s-1}) = (\dot{r}_{s,s-1}) + [\dot{a}_{s,s-1}]^T (r^j_s), \tag{13}$$

unde $[e]$ este matricea diagonală unitate.

Într-adevăr, componentele forței elastice $\vec{F}^j_{es,s-1}$ și ale rezistenței $\vec{F}^j_{rs,s-1}$, pe axele triedrului $O_s x_s y_s z_s$ sînt date de matricele coloane

$$(F^j_{es,s-1}) = -[a_{s,s-1}]\,[k^j_{s,s-1}](P^j_{s0}P^j_s),$$
$$(F^j_{rs,s-1}) = -[a_{s,s-1}]\,[h^j_{s,s-1}]\,(\dot{r}^j_{s-1}). \tag{14}$$

Situînd mișcările în cazul micilor oscilații în jurul pozițiilor de echilibru, matricea de transformare $[a_{s,s-1}]$ devine

$$[a_{s,s-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \psi_{s,s-1} & -\varphi_{s,s-1} \\ -\psi_{s,s-1} & 1 & \theta_{s,s-1} \\ \varphi_{s,s-1} & -\theta_{s,s-1} & 1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

iar expresiile forțelor (14), capătă forma

$$(F^j_{es,s-1}) = \begin{bmatrix} -k^{1j}_{s,s-1}\{x_{s,s-1} - y^j_s\ \psi_{s,s-1} + z^j_s\ \varphi_{s,s-1}\} \\ -k^{2j}_{s,s-1}\{y_{s,s-1} - z^j_s\ \theta_{s,s-1} + x^j_s\ \psi_{s,s-1}\} \\ -k^{3j}_{s,s-1}\{z_{s,s-1} - x^j_s\ \varphi_{s,s-1} + y^j_s\ \theta_{s,s-1}\} \end{bmatrix},$$
$$(F^j_{rs,s-1}) = \begin{bmatrix} -h^{1j}_{s,s-1}\{\dot{x}_{s,s-1} - y^j_s\ \dot{\psi}_{s,s-1} + z^j_s\ \dot{\varphi}_{s,s-1}\} \\ -h^{2j}_{s,s-1}\{\dot{y}_{s,s-1} - z^j_s\ \dot{\theta}_{s,s-1} + x^j_s\ \dot{\psi}_{s,s-1}\} \\ -h^{3j}_{s,s-1}\{\dot{z}_{s,s-1} - x^j_s\ \dot{\varphi}_{s,s-1} + y^j_s\ \dot{\theta}_{s,s-1}\} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

Forțele aplicate de rigidul T_{s+1} asupra aceluiași solid T_s, se obțin asemănător pornind de la relațiile

$$(F^j_{es+1,s}) = [k^j_{s+1,s}]\,\{(r_{s+1,s}) + \{[a_{s+1,s}]^T - [e]\}\,(r^j_{s+1})\},$$
$$(F^j_{rs+1,s}) = [h^j_{s+1,s}]\,\{(\dot{r}_{s+1,s}) + [\dot{a}_{s+1,s}]^T\,(r^j_{s+1})\}. \tag{17}$$

Aceste formule de calcul se aplică pentru $s = 1,2,\ldots, n-1$, adică pentru lanțuri deschise de corpuri.

Dacă însă linia corpurilor reprezintă un lanț cinematic închis, în sensul conectării oricărui element component la reperul fix, atunci

forțele elastice și de rezistență suplimentare aplicate rigidului T_s se calculează cu relațiile (14) astfel

$$(F^j_{es0}) = -[a_{s0}]\,[k^j_{s0}]\{(r_{s0}) + \\ + \{[a_{s0}]^T - [e]\}(r^j_s)\},$$

$$(F^j_{rs0}) = -[a_{s0}]\,[h^j_{s0}]\,\{(\dot{r}_{s0}) + \\ + [\dot{a}_{s0}]^T\,(r^j_s)\}\quad (s = 2,\ldots, n), \tag{18}$$

unde k^j_{s0}, h^j_{s0} sînt constante caracteristice care pot fi determinate experimental.

Relativ la forțele perturbatoare exterioare exercitate pe rigidul T_s, vom presupune că proiecțiile acestora pe axele O_sx_s, O_sy_s, O_sz_s sînt funcții periodice de timp avînd pulsația p și faza $pt - \delta_s$; ele pot forma matricele

$$(F^j_s) = (F^{0j}_s)\cos\{pt - \delta_s\}$$

$$(F^{0j}_s)^T = [X^{0j}_s\ Y^{0j}_s\ Z^{0j}_s]. \tag{19}$$

3. ECUAȚII DE MIȘCARE

Pentru studiul mișcării oscilatorii a rigidului T_s în raport cu reperul fix $O_0x_0y_0z_0$ se aplică mai întîi teorema cantității de mișcare [2]:

$$[m_s](\gamma^C_s) = \sum_{j=1}^{\nu_s} (R^j_s), \tag{20}$$

unde

$$(R^j_s) = (F^j_{es,s-1}) + (F^j_{es+1,s}) + (F^j_{es0}) + \\ + (F^j_{rs,s-1}) + (F^j_{rs+1,s}) + (F^j_{rs0}) + (F^j_s),$$

$$(s = 1,2,\ldots, n). \tag{21}$$

În această relație

$$[m_s] = \begin{bmatrix} m_s & & \\ & m_s & \\ & & m_s \end{bmatrix} \tag{22}$$

este matricea masei m_s, iar

$$(\gamma^C_s) = \sum_{\sigma=1}^{s} (\ddot{r}_{\sigma,\sigma-1}) + \sum_{\sigma=1}^{s} [\ddot{\lambda}_{\sigma,\sigma-1}](r^C_s) \tag{23}$$

este accelerația absolută, în cazul micilor oscilații, a centrului de masă C_s poziționat prin vectorul $\bar{r}_s^C$ ale cărui matrice sînt

$$(r_s^C) = \begin{bmatrix} x_s^C \\ y_s^C \\ z_s^C \end{bmatrix}, \quad [r_s^C] = \begin{bmatrix} 0 & -z_s^C & y_s^C \\ z_s^C & 0 & -x_s^C \\ -y_s^C & x_s^C & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Teorema momentului cinetic, exprimată față de punctul O_s, va fi :

$$[J_s] \sum_{\sigma=1}^{s} (\ddot{\lambda}_{\sigma,\sigma-1}) + [m_s][r_s^C] \sum_{\sigma=1}^{s} (\ddot{r}_{\sigma,\sigma-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu_s} [r_s^j](R_s^j) \qquad (s = 1,2,\ldots,n), \tag{25}$$

unde

$$[J_s] = \begin{bmatrix} J_{sx} & -J_{sxy} & -J_{sxz} \\ -J_{syx} & J_{sy} & -J_{syz} \\ -J_{szx} & -J_{szy} & J_{sz} \end{bmatrix} \tag{26}$$

reprezintă matricea tensorului de inerție al solidului considerat, relativ la reperul $O_s x_s y_s z_s$.

Relațiile (20), (25) pot fi scrise concentrat sub forma unui sistem liniar

$$[M_s] \sum_{\sigma=1}^{s} (\ddot{q}_{\sigma,\sigma-1}) + [H_{s0}] \sum_{\sigma=1}^{s} (\dot{q}_{\sigma,\sigma-1}) + [H_{s,s-1}](\dot{q}_{s,s-1}) -$$

$$- [\bar{H}_{s+1,s}](\dot{q}_{s+1,s}) + [K_{s0}] \sum_{\sigma=1}^{s} (q_{\sigma,\sigma-1}) + [K_{s,s-1}](q_{s,s-1}) -$$

$$- [\bar{K}_{s+1,s}](q_{s+1,s}) = (M_s^0) \cos\{pt - \delta_s\}, \tag{27}$$

unde

$$(M_s^0) = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [r_s^j] & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (F_s^j) \\ \hline 0 \end{array}\right], \tag{28}$$

$$(q_{s,s-1})^T = [x_{s,s-1} \; y_{s,s-1} \; z_{s,s-1} \; \theta_{s,s-1} \; \varphi_{s,s-1} \; \psi_{s,s-1}].$$

În ecuația (27)

$$[M_s] = \left[\begin{array}{c|c} [m_s] & [m_s][r_s^C]^T \\ \hline [m_s][r_s^C] & [J_s] \end{array}\right] \tag{29}$$

reprezintă matricea generală de inerție a rigidului T_s în raport cu axele proprii.

Matricele de elasticitate [5] $[K_{s,s-1}]$ și $[\bar{K}_{s+1,s}]$ au următoarele expresii

$$[K_{s,s-1}] = \sum_{j=1}^{\nu_s} \left[\begin{array}{c|c} [k_{s,s-1}^j] & [k_{s,s-1}^j][r_s^j]^T \\ \hline [r_s^j][k_{s,s-1}^j] & [r_s^j][k_{s,s-1}^j][r_s^j]^T \end{array}\right],$$

$$[\bar{K}_{s+1,s}] = \sum_{j=1}^{\nu_s} \left[\begin{array}{c|c} [k_{s+1,s}^j] & [k_{s+1,s}^j][r_{s+1}^j]^T \\ \hline [r_s^j][k_{s+1,s}^j] & [r_s^j][k_{s,s-1}^j][r_{s+1}^j]^T \end{array}\right]. \tag{30}$$

Matricele amortizărilor $[H_{s,s-1}]$, $[\bar{H}_{s+1,s}]$ se obțin ușor din matricele simetrice $[K_{s,s-1}]$, $[\bar{K}_{s+1,s}]$ dacă în locul notației k se introduce notația h.

Să remarcăm mai departe, că relațiile (27) pot fi scrise sub forma unei singure ecuații matriceale diferențiale de ordinul doi :

$$[M](\ddot{q}) + [H](\dot{q}) + [K](q) = (F), \tag{31}$$

unde

$$[M] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} [M_1] & & & & \\ \hline [M_2] & [M_2] & & & \\ \hline [M_s] & [M_s] & & [M_s] & \\ \hline [M_n] & [M_n] & & & [M_n] \end{array}\right] \tag{32}$$

este *matricea triunghiulară generală de inerție* a sistemului de corpuri, exprimată în funcție de blocurile de matrice simetrice și inversabile $[M_1]$, $[M_2], \ldots, [M_n]$.

Matricea generală de elasticitate a sistemului $[K]$ poate fi exprimată cu ajutorul blocurilor de matrice $[K_{s0}]$, $[K_{s,s-1}]$, $[\bar{K}_{s+1,s}]$ sub forma unei

matrice cvasidiagonale.

$$[\mathrm{K}] = \begin{bmatrix} [K_{10}] & -[\bar{K}_{21}] & & \\ [K_{20}] & [K_{20}]+[K_{21}] & -[\bar{K}_{32}] & \\ [K_{s0}] & [K_{s0}] & [K_{s0}]+[K_{s,s-1}] & -[\bar{K}_{s+1,s}] \\ [K_{n-1,0}] & [K_{n-1,0}] & [K_{n-1,0}]+[K_{n-1,n-2}] & -[\bar{K}_{n,n-1}] \\ [K_{n0}] & [K_{n0}] & & [K_{n0}]+[K_{n,n-1}] \end{bmatrix} \tag{33}$$

Matricea generală a amortizărilor $[H]$ are aceeași formă cu (33), unde se vor înlocui celulele $[K_{\sigma,\sigma-1}]$ prin $[H_{\sigma,\sigma-1}]$. De asemenea, momentele duale $(M_s^0)\cos\{pt-\delta_s\}$ și vectorii duali de poziție $(q_{s,s-1})$ formează matricea coloană a forțelor perturbatoare (F) și respectiv *matricea generală de poziție* a sistemului (q), adică

$$(F) = \begin{bmatrix} (M_1^0)\cos\{pt-\delta_1\} \\ (M_2^0)\cos\{pt-\delta_2\} \\ \vdots \\ (M_s^0)\cos\{pt-\delta_s\} \\ \vdots \\ (M_n^0)\cos\{pt-\delta_n\} \end{bmatrix}, \quad (q) = \begin{bmatrix} (q_{10}) \\ (q_{21}) \\ \vdots \\ (q_{s,s-1}) \\ \vdots \\ q_{n,n-1}) \end{bmatrix}. \tag{34}$$

4. ANALIZA RĂSPUNSULUI DINAMIC ÎN REGIM STAȚIONAR

Soluția sistemului (31) se compune dintr-o vibrație liberă amortizată care se suprapune unei vibrații forțate armonice de pulsație p [5]. Pentru a simplifica studiul, în locul coordonatelor (q) se utilizează planul complex al variabilelor (ξ) care formează matricea

$$(\xi)^T = [(\xi_{10})^T\ (\xi_{21})^T\ \ldots\ (\xi_{n,n-1})^T]. \tag{35}$$

Așadar, admițând soluțiile staționare sub forma complexă

$$(\xi_{\sigma,\sigma-1}) = (q^0_{\sigma,\sigma-1})\,\mathrm{e}^{\{pt-\alpha_{\sigma,\sigma-1}\}}, \tag{36}$$

ecuația diferențială (31) conduce la sistemul algebric neomogen

$$\{[K]-p^2[M]+ip[H]\}(\xi) = (\Phi_0)\,\mathrm{e}^{ipt}, \tag{37}$$

unde

$$(\Phi_0)^T = [(F_1^0)^T\,\mathrm{e}^{-i\delta_1}\ \ldots\ (F_s^0)^T\,\mathrm{e}^{-i\delta_s}\ \ldots\ (F_n^0)^T\,\mathrm{e}^{-i\delta_n}]. \tag{38}$$

Dacă se notează cu

$$[\zeta] = [K]-p^2[M]+ip[H],\ \det[\zeta]\neq 0 \tag{39}$$

matricea pătratică nesingulară a *constantelor elastice complexe*, corespunzătoare pulsaţiei p, ecuaţiile (37) se pot scrie sub forma restrînsă

$$[\zeta](\xi) = (\Phi_0)\, e^{ipt}. \tag{40}$$

Rezolvînd sistemul (40) se obţine matricea complexă a elongaţiilor relative

$$(\xi) = [Z](\Phi_0)\, e^{ipt}, \tag{41}$$

în funcţie de matricea inversă

$$[Z] = \{[\zeta^R] + i\,[\zeta^I]\}^{-1}. \tag{42}$$

Pornind de aici rezultă soluţiile

$$(q) = Re(\xi) \tag{43}$$

şi matricea amplitudinilor

$$(q_0) = (|\xi|) = [|Z|](|\Phi_0|) =$$
$$= [(q^0_{10})^T \dots (q^0_{\sigma,\sigma-1})^T \dots (q^0_{n,n-1})^T]^T. \tag{44}$$

Notînd cu

$$(E) = [(e)^T \dots (e)^T \dots (e)^T]^T, \tag{45}$$

matricea coloană unitate şi cu

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \delta_\sigma & \\ & & & \dots \\ & & & \delta_n \end{bmatrix} \tag{46}$$

matricea defazajelor forţelor de excitaţie, rezultă următoarea matrice coloană

$$(\alpha) = \{[\delta] - [\arg Z]\}\,(E) = [\alpha_{10} \dots \alpha_{\sigma,\sigma-1} \dots \alpha_{n,n-1}]^T \tag{47}$$

pentru defazajul mişcărilor oscilatorii relative.

6. STUDIUL VIBRAŢIILOR ABSOLUTE

Vibraţiile sistemului de rigide pot fi studiate şi cu ajutorul parametrilor de poziţie raportaţi la referenţialul fix $O_0x_0y_0z_0$. Astfel, poziţia momentană a rigidului T_s va fi fixată de vectorul de poziţie (7) al originii O_s

$$(r_{s0}) = \begin{bmatrix} x_{s0} \\ y_{s0} \\ z_{s0} \end{bmatrix} \tag{48}$$

și de unghiurile absolute de rotație θ_{s0}, φ_{s0}, ψ_{s0} care pot determina matricea de trecere

$$[a_{s0}] = [a_{\psi}^{s0}]\,[a_{\varphi}^{s0}]\,[a_{\theta}^{s0}]. \tag{49}$$

Pentru a obține noua formă a ecuațiilor de mișcare se reiau ecuațiile (20) și (25) în care se va introduce

$$\begin{aligned}
(r_{s,s-1}) &= [a_{s-1,0}]\,\{(r_{s0}) - (r_{s-1,0})\},\\
[a_{s,s-1}] &= [a_{s0}]\,[a_{s-1,0}]^T,\\
(\dot{r}_{s,s-1}) &= [a_{s-1,0}]^T\,[\omega_{s-1,0}]\,\{(r_{s0}) - (r_{s-1,0})\} + \\
&+ [a_{s-1,0}]\,\{(\dot{r}_{s0}) - (\dot{r}_{s-1,0})\},\\
[\dot{a}_{s,s-1}] &= [\dot{a}_{s0}]\,[a_{s-1,0}]^T + [a_{s0}]\,[\dot{a}_{s-1,0}].
\end{aligned} \tag{50}$$

Punînd în evidență noile variabile

$$(q_{s0})^T = [x_{s0}\ y_{s0}\ z_{s0}\ \theta_{s0}\ \varphi_{s0}\ \psi_{s0}], \tag{51}$$

relațiile (20), (25) se scriu sub aceeași formă fundamentală (31), însă matricea generală de inerție $[M]$ capătă forma unei matrice diagonale nesingulare :

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_1] & & & \\ & [M_1] & & \\ & & [M_s] & \\ & & & [M_n] \end{bmatrix}. \tag{52}$$

De asemenea, matricea generală de elasticitate $[H]$ devine o matrice cvasidiagonală

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_{10}] + [\bar{H}_{21}] & -[\bar{H}_{21}] & & \\ -[H_{21}] & [H_{20}] + [H_{21}] + [\bar{H}_{32}] & -[\bar{H}_{32}] & \\ & -[H_{s,s-1}] & [H_{s0}] + [H_{s,s-1}] + [\bar{H}_{s+1,s}] & -[\bar{H}_{s+1,s}] \\ & & -[H_{n,n-1}] & [H_{n0}] + [H_{n,n-1}] \end{bmatrix} \tag{53}$$

Să observăm că matricea de elasticitate va avea aceeași formă cu (43) și că matricea de poziție absolută a sistemului este

$$(q)^T = [(q_{10})^T\ (q_{20})^T\ \ldots\ (q_{s0})^T\ \ldots\ (q_{n0})^T]. \tag{54}$$

Primit în redacție la 26 septembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. STAICU, *Aplicații ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1986.
2. ȘT. STAICU, *Forma matricială a ecuațiilor de mișcare a sistemelor*, St. Cerc. Mec. Apl., **45**, 4 (1986).
3. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1971.
4. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, vol. **III**, Edit. Tehnică, București, 1981.
5. M. MUNTEANU, *Dynamics of single-mass vibrating machines mounted on elastic supports. General case*, Bulet. Instit. Polithnic București, seria Mecanică, XLVI—XLVII, 1984—1985.
6. R. VOINEA, D. VOICULESCU, *Vibrații mecanice*, Litografia Institutului Politehnic București, 1979.
7. C. ISPAS, F. R. SIMION, *Vibrațiile mașinilor unelte. Teorie și aplicații*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1986.
8. GH. SILAȘ, *Mecanica. Vibrații mecanice*, Edit. Didactică și pedagogică, București, 1968.
9. G. E. ȘILOV., *Analiză matematică. Spații finit-dimensionale*, Edit. Științifică și enciclopedică, București, 1983.
10. J. WITTENBURG, *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart, 1977, Mir, Moskva, 1980.

AXELE ELASTICITĂȚII ÎN CAZUL UNUI SOLID RIGID CU LEGĂTURI ELASTICE TRIAXIALE

de M. MUNTEANU

Institutul Politehnic București

În lucrare se stabilesc axele momentelor de ordinul unu ale constantelor elastice, centrele elastice corespunzătoare, axele momentelor de ordinul doi și axele principale ale momentelor de ordinul doi.
Se pun în evidență proprietățile acestor axe și se determină condițiile necesare pentru ca o axă oarecare să fie axă a elasticității în raport cu un punct sau în raport cu o axă, în legătură cu problema de sinteză a unui sistem elastic.

1. INTRODUCERE

Se consideră un solid rigid legat de mediul exterior prin n elemente elastice liniare triaxiale, astfel încît direcțiile principale triortogonale ale elasticității fiecărui element să fie paralele cu axele unui sistem de referință fix $O'x'y'z'$ [1], [4].

Pentru deformații mici ale elementelor elastice în cazul solidului rigid cu șase grade de libertate, vectorul forță elastică generalizată pentru ansamblul elementelor elastice este [2] [3]:

$$\mathbf{Q}_e = -\mathbf{K}\mathbf{q}, \tag{1}$$

unde

$$\mathbf{q} = [q_1\, q_2 \cdots q_6]^T \tag{2}$$

reprezintă vectorul de poziție al solidului, iar $\mathbf{K}$ matricea de elasticitate de forma [2] [3]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^T & \mathbf{J} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Notînd cu k_{ix}, k_{iy}, k_{iz} $(i = 1,2,\ldots, n)$ constantele elastice după axele sistemului de referință fix și cu x_i, y_i, z_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ coordonatele punctelor de montaj ale elementelor elastice în raport cu un sistem mobil $Oxyz$ legat de solid, matricele momentelor de ordinul 0,1 și 2 sînt [2],[3]:

$$\mathbf{k} = \Sigma \begin{bmatrix} k_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & k_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{iz} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{S}_k = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & k_{ix}z_i & -k_{ix}y_i \\ -k_{iy}z_i & 0 & k_{iy}x_i \\ -k_{iz}y_i & -k_{iz}x_i & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 4, 1989, P. 379—397

$$\mathbf{J}_k = -\begin{bmatrix} J^{k_y}_z + J^{k_z}_y & -J^{k_z}_{xy} & -J^{k_y}_{xz} \\ -J^{k_z}_{yx} & J^{k_x}_z + J^{k_z}_y & -J^{k_x}_{yz} \\ -J^{k_y}_{zy} & -J^{k_x}_{zy} & J^{k_x}_y + J^{k_y}_x \end{bmatrix} \tag{6}$$

cu notațiile

$$\begin{aligned} &J^{k_z}_x = \Sigma\, k_{iz} x_i^2\,;\; J^{k_y}_x = \Sigma\, k_{iy} x_i^2\,;\; J^{k_x}_{yz} = \Sigma\, k_{ix} y_i z_i, \\ &J^{k_x}_y = \Sigma\, k_{ix} y_i^2\,;\; J^{k_z}_y = \Sigma\, k_{iz} y_i^2\,;\; J^{k_y}_{xz} = \Sigma\, k_{iy} x_i z_i, \\ &J^{k_y}_z = \Sigma\, k_{iy} z_i^2\,;\; J^{k_x}_z = \Sigma\, k_{ix} z_i^2\,;\; J^{k_x}_{yz} = \Sigma\, k_{ix} y_i z_i. \end{aligned} \tag{7}$$

În cele ce urmează se pun în evidență unele proprietăți ale mișcărilor posibile ale solidului rigid în legătură cu configurația sistemului elastic caracterizat prin matricile $\mathbf{k}$, $\mathbf{S}_u$, $\mathbf{J}_u$ și axele corespunzătoare ale elasticității.

2. AXELE ELASTICITĂȚII DE ORDINUL UNU

În legătură cu matricea $\mathbf{S}_k$ se definesc *axele momentelor de ordinul unu* sau *axele elasticității de ordinul unu* notate cu $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ și $\overline{\zeta}$ paralele cu axele sistemului mobil, date prin ecuațiile [3]

$$\overline{\xi}: \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\Sigma\, k_{ix} y_i}{\Sigma\, k_{ix}}\,; \\ \zeta_1 = \dfrac{\Sigma\, k_{ix} z_i}{\Sigma\, k_{ix}}\,; \end{cases} \quad \overline{\eta}: \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{\Sigma\, k_{iy} x_i}{\Sigma\, k_{iy}}\,; \\ \zeta_2 = \dfrac{\Sigma\, k_{iy} z_i}{\Sigma\, k_{iy}}\,; \end{cases} \quad \overline{\zeta}: \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{\Sigma\, k_{iz} x_i}{\Sigma\, k_{iz}}, \\ \eta_3 = \dfrac{\Sigma\, k_{iz} y_i}{\Sigma\, k_{iz}} \end{cases} \tag{8}$$

și reprezentate în figura 1.

Considerînd k_{ix}, k_{iy}, k_{iz} mărimi orientate în sensul unor forțe unitare, axele $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ reprezintă axe centrale ale acestor trei grupe de vectori. Efectuînd translația sistemului $Oxyz$ în punctul $A_1\,(0 \to A_1)$ adică $\eta_1 = 0$; $\zeta_1 = 0$ matricea $\mathbf{S}_k$ devine

$$\mathbf{S}_k = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_{iy} z_{1i} & 0 & k_{iy} x_{1i} \\ k_{iz} y_{1i} & -k_{iz} x_{1i} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

adică mișcarea după axa $A_1 x_1$ este decuplată.

Analog, translația $(O \to A_2)$ decuplează mișcarea după axa $A_2 y_2$, iar translația $(O \to A_3)$ decuplează mișcarea după axa $A_3 z_3$. În consecință, dacă solidul va fi perturbat după una din aceste axe, va realiza numai o mișcare de translație după acea axă. Punctele A_1, A_2, sau A_3 pot fi puncte oarecare ale dreptelor $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ sau $\overline{\zeta}$.

Punctul de intersecție (dacă există) a două axe de elasticitate poartă numele de *centru de elasticitate* sau *centru elastic*.

În figura 2 este reprezentat centrul de elasticitate E' al axelor $\overline{\xi}$ și $\overline{\eta}$. Condiția necesară de existență a acestui punct este

$$\zeta_1 = \zeta_2 \Rightarrow \frac{\sum k_{ix} z_i}{\sum k_{ix}} = \frac{\sum k_{iy} z_i}{\sum k_{iy}}. \tag{10}$$

Fig. 1

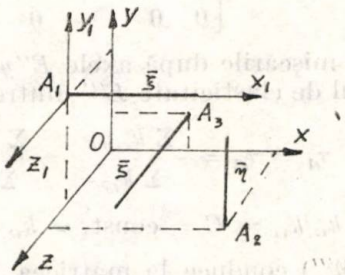
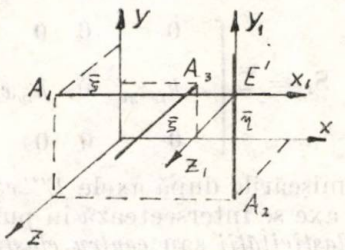


Fig. 2



Egalitatea (10) este îndeplinită dacă

$$\frac{k_{1y}}{k_{1x}} = a = \text{const.} \Rightarrow k_{1y} = a k_{1x}. \tag{11}$$

Prin translația $(O \to E')$ avem $\xi_2 = \eta_1 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$ și matricea $\mathbf{S}_k$ devine

$$\mathbf{S}_k = \sum \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{iz} y_{1i} & -k_{iz} x_{1i} & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

adică se decuplează mișcările după axele $E'x_1$ și $E'y_1$.

Centrul de elasticitate al axelor $\overline{\eta}$ și ζ implică condiția

$$\xi_2 = \xi_3 \Rightarrow \frac{\sum k_{iy} x_i}{\sum k_{iy}} = \frac{\sum k_{iz} x_i}{\sum k_{iz}} \tag{13}$$

îndeplinită pentru

$$k_{iz}/k_{iy} = b = \text{const.} \Rightarrow k_{iz} = bk_{iy}. \tag{13'}$$

Translația $(O \to E'')$ cu implicația $\xi_2 = \xi_3 = \eta_3 = \zeta_2 = 0$ aduce matricea la forma

$$\mathbf{S}_k = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & k_{ix}z_{2i} & -k_{ix}y_{2i} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

adică se decuplează mișcările după axele $E''y_2$ și $E''z_2$.

Analog, centrul de elasticitate E''' dintre $\overline{\xi}$ și $\overline{\zeta}$, presupune

$$\eta_1 = \eta_3 \Rightarrow \frac{\Sigma\, k_{ix}y_i}{\Sigma\, k_{ix}} = \frac{\Sigma\, k_{iz}y_i}{\Sigma\, k_{iz}} \tag{15}$$

$$k_{iz}/k_{ix} = C = \text{const.} \Rightarrow k_{iz} = Ck_{ix}, \tag{16}$$

iar translația $(O \to E''')$ conduce la matricea

$$\mathbf{S}_k = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_{iy}z_{3i} & 0 & k_{iy}x_{3i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

adică se decuplează mișcările după axele $E'''x_3$ și $E'''z_3$.

Dacă celei trei axe se intersectează în punctul E, acesta se numește *centru principal al elasticității* sau *centru elastic principal*. Condițiile necesare sînt

$$\zeta_1 = \zeta_2\,;\ \eta_1 = \eta_3\,;\quad \xi_2 = \xi_3\,;$$

ce conduc la

$$k_{iy} = ak_{ix}\,;\quad k_{iz} = bk_{iy}\,;\quad k_{iz} = ck_{ix}. \tag{18}$$

Se observă că cele trei constante nu sînt independente. Între ele există relația $a \cdot b = c$. Translația $(O \to E)$ conduce la matricea nulă $\mathbf{S}_k = \mathbf{0}$, adică toate mișcările de translație sînt decuplate.

Existența centrelor elasticității nu depinde de configurația geometrică a sistemului elastic numai de rapoartele menționate. Dacă centrul elastic principal coincide cu centrul de masă, axele elasticității devin *axe centrale ale elasticității*.

3. AXELE ELASTICITĂȚII DE ORDINUL DOI

Matricea $\mathbf{J}_k$ cuprinde elementele unui tensor simetric de ordinul 2, denumit *tensor de elasticitate*. Axele în raport cu care se anulează unele dintre momentele mixte de ordinul 2, se numesc *axele momentelor de*

ordinul 2 sau *axele elasticității de ordinul 2*. Pot fi determinate trei direcții ortogonale principale și trei valori proprii corespunzătoare pentru orice punct al solidului astfel încît să se anuleze toate momentele mixte din matricea $\mathbf{J}_k$. Axele corespunzătoare după aceste direcții sînt *axe principale ale elasticității*.

Valorile proprii λ_1, λ_2, λ_3 sînt soluțiile ecuației

$$\det [\mathbf{J}_k - \lambda \mathbf{I}_3] = 0, \tag{19}$$

unde $\mathbf{I}_3$ reprezintă matricea unitate de ordinul 3.

Forma explicită a ecuației (19) este

$$\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0, \tag{20}$$

unde

$$A = J^k_x + J^k_y + J^k_z + J^k_y + J^k_x + J^k_y \tag{21}$$

$$B = \begin{vmatrix} J^k_x + J^k_y & -J^k_{xy} \\ -J^k_{xy} & J^k_z + J^k_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J^k_z + J^k_x & -J^k_{yz} \\ -J^k_{yz} & J^k_y + J^k_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J^k_y + J^k_x & -J^k_{xz} \\ -J^k_{xz} & J^k_z + J^k_y \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$C = \det \mathbf{J}_k. \tag{23}$$

Cosinușii directori α_1, $\beta_1 \ldots \beta_3$, γ_3 se obțin înlocuind soluțiile ecuației (20) în sistemul

$$[\mathbf{J}_k - \lambda \mathbf{I}_3]\,\boldsymbol{\delta} = 0 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\delta} = [\alpha\ \beta\ \gamma]^T. \tag{25}$$

Dacă în expresia momentului de ordinul doi J^k_Δ în raport cu o axă oarecare Δ ce trece prin O, poziționată prin cosinușii directori α, β și γ se face substituția

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{J^k_\Delta}};\ y = \frac{\beta}{\sqrt{J^k_\Delta}};\ z = \frac{\gamma}{\sqrt{I^k_\Delta}}, \tag{26}$$

se obține ecuația elipsoidului de elasticitate

$$(J^k_{xy} + J^k_y)\,x^2 + (J^k_z + J^k_x)\,y^2 + (J^k_y + J^k_{xy})\,z^2 - 2yz\,J^k_{yz} -$$

$$- 2z\,x\,J^k_{zx} - 2xy\,J^k_{xy} = 1.$$

Efectuînd rotația $Oxyz \to Ox_1y_1z_1$, noul sistem de axe fiind orientat după direcțiile principale, se obține

$$x_1^2 J^k_1 + y_1^2\,J^k_2 + z_1 J^k_3 = 1 \tag{28}$$

Tensorul de elasticitate devine în acest caz

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & 0 \\ 0 & J_2^k & 0 \\ 0 & 0 & J_3^k \end{bmatrix},$$

adică cele trei mișcări de rotație sînt decuplate între ele.

Există posibilitatea decuplării uneia sau alteia dintre rotații dacă $\mathbf{J}_k$ se descompune într-o sumă de doi tensori : un tensor planar și un tensor spațial particular.

Putem avea astfel

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k &= \mathbf{J}_{k_x} + \mathbf{J}'_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{J}'_k = \mathbf{J}_{k_y} + \mathbf{J}_{k_z}, \\ \mathbf{J}_k &= \mathbf{J}_{k_y} + \mathbf{J}''_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{J}''_k = \mathbf{J}_{k_x} + \mathbf{J}_{k_z}, \\ \mathbf{J}_k &= \mathbf{J}_{k_z} + \mathbf{J}'''_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{J}'''_k = \mathbf{J}_{k_y} + \mathbf{J}_{k_x}, \end{aligned} \tag{30}$$

unde $\mathbf{J}_{k_x}\mathbf{J}_{k_y}\mathbf{J}_{k_z}$ sînt tensorii planari simetrici de ordinul 2

$$\mathbf{J}_{k_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_z^{k_x} & -J_{yz}^{k_x} \\ 0 & J_{zy}^{k_x} & J_y^{k_x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{k_y} = \begin{bmatrix} J_z^{k_y} & 0 & -J_{xz}^{k_y} \\ 0 & 0 & 0 \\ -J_{zx}^{k_y} & 0 & J_x^{k_y} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_{k_z} = \begin{bmatrix} J_y^{k_z} & -J_{xy}^{k_z} & 0 \\ -J_{xy}^{k_z} & J_x^{k_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Considerînd tensorul $\mathbf{J}'_k$ momentele sale principale $J_1'^k, J_2'^k J_3'^k$ sînt soluțiile ecuației

$$\lambda^3 - A'\lambda^2 + B'\lambda - C' = 0 \tag{32}$$

unde A', B', C' se obțin din A, B, C, anulînd termenii ce conțin k_{ix}

$$A' = J_x^{k_y} + J_y^{k_z} + J_x^{k_z} + J_x^{k_y}$$

$$B' = \begin{vmatrix} J_z^{k_y} + J_y^{k_z} & -J_{xy}^{k_z} \\ -J_{yx}^{k_z} & J_x^{k_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_x^{k_z} & 0 \\ 0 & J_x^{k_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_x^{k_y} & -J_{xz}^{k_y} \\ -J_{zx}^{k_y} & J_x^{k_z} \end{vmatrix} \tag{33}$$

$$C' = \begin{vmatrix} J_z^{k_y} + J_y^{k_z} & -J_{xy}^{k_z} & -J_{xz}^{k_y} \\ -J_{xy}^{k_z} & J_x^{k_z} & 0 \\ -J_{zx}^{k_y} & 0 & J_x^{k_y} \end{vmatrix}$$

Rotind axele sistemului de referință după direcțiile principale ale tensorului J_k, acesta va avea o formă diagonală în schimb J_{k_x} va rămîne cu aceeași structură. Înlocuind J_{k_x} și J'_k în prima relație (30) se observă că prima linie a lui J_k va avea numai primul element diferit de zero, deci axa de elasticitate corespunzătoare primei rotații este o axă de elasticitate principală. Acest rezultat sugerează obținerea soluțiilor ecuației (20) pe o cale indirectă mai simplă. Soluțiile ecuației (20) fiind reale, înseamnă că fiecărui punct 0 îi corespund trei axe principale unice. Rezultă că $J_1^k = J_1'^k$.

Din condiția ca ecuațiile (20) și (32) să aibă un divizor comun de gradul întîi se obține

$$D_1\lambda + D'_1 = 0 \tag{34}$$

unde

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & B & -C & 0 \\ 0 & -A & B & -C \\ 1 & B' & C' & 0 \\ 0 & -A' & B' & -C' \end{vmatrix}; \quad D'_1 = \begin{vmatrix} -A & B & -C & 0 \\ 1 & -A & B & -C \\ -A' & B' & -C' & 0 \\ 1 & -A' & B' & -C' \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Rezultă

$$\lambda_1 = J_1^k = -\frac{D'_1}{D_1}. \tag{36}$$

Utilizînd următoarele două descompuneri (30), prin același raționament, se obține

$$\lambda_2 = J_2^k = -\frac{D'_2}{D_2}; \quad \lambda_3 = J_3^k = -\frac{D'_3}{D_3}, \tag{37}$$

unde D_2, D'_2, D_3, D'_3 au forma determinanților (35) în care se introduc A'', B'', C'' și A''', B''', C'''

$$A'' = J_y^{k_z} + J_z^{k_x} + J_x^{k_z} + J_x^{k_x},$$

$$B'' = \begin{vmatrix} J_y^{k_z} & -J_{xy}^{k_z} \\ -J_{xy}^{k_z} & J_z^{k_x} + J_x^{k_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_z^{k_x} + J_x^{k_z} - J_{yz}^{k_x} \\ -J_{xy}^{k_x} \quad J_y^{k_x} + J_z^{k_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_y^{k_x} & 0 \\ 0 & J_y^{k_z} \end{vmatrix},$$

$$C'' = \begin{vmatrix} J_y^{k_z} & -J_{xy}^{k_x} & 0 \\ -J_{yx}^{k_z} & J_z^{k_x} + J_x^{k_z} & -J_{yz}^{k_x} \\ 0 & -J_{zy}^{k_x} & J_y^{k_x} \end{vmatrix},$$

$$A''' = J_z^{k_y} + J_z^{k_x} + J_y^{k_x} + J_x^{k_y}, \tag{38}$$

$$B''' = \begin{vmatrix} J^{k_y}_{z} & 0 \\ 0 & J^{k_x}_{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J^{k_x}_{z} & -J^{k_x}_{yz} \\ -J^{k_x}_{zy} & J^{k_x}_{y} + J^{k_y}_{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J^{k_x}_{y} + J^{k_y}_{x} & -J^{k_y}_{xz} \\ -J^{k_y}_{zx} & J^{k_y}_{z} \end{vmatrix},$$

$$C''' = \begin{vmatrix} J^{k_y}_{z} & 0 & -J^{k_y}_{xz} \\ 0 & J^{k_x}_{z} & -J^{k_x}_{yz} \\ -J^{k_y}_{zx} & -J^{k_x}_{zy} & J^{k_x}_{y} + J^{k_y}_{x} \end{vmatrix}$$

În cazul tensorilor particulari planari (31) relațiile obținute se particularizează în consecință. Astfel, pentru tensorul J_{kz} ecuația (28) devine

$$J^{k_z}_{x_1} x_1^2 + J^{k_z}_{y_1} y_1^2 = 1, \tag{39}$$

unde

$$J^{k_z}_{x_1} = \frac{J^{k_z}_{x} + J^{k_z}_{y}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(J^{k_z}_{x} - J^{k_z}_{y})^2 + 4J^{k_z^2}_{xy}},$$

$$J^{k_z}_{y_1} = \frac{J^{k_z}_{x} + J^{k_z}_{y}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(J^{k_z}_{x} - J^{k_z}_{y})^2 + 4J^{k_z^2}_{xy}}, \tag{40}$$

iar direcțiile principale Ox_1 și Oy_1 sînt poziționate prin unghiurile β_1 și respectiv β_1'

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{2J^{k_z}_{xy}}{J^{k_z}_{y} - J^{k_z}_{x}}; \quad \beta_1' = \beta_1 + \frac{\pi}{2}. \tag{41}$$

Deoarece relațiile (39) — (41) sînt valabile pentru orice z_i ecuația (39) reprezintă un cilindru eliptic drept paralel cu Oz, astfel toate axele paralele cu Ox_1 și Oy_1 situate în orice plan normal la Oz, reprezintă axe principale pentru tensorul $\mathbf{J}_{kz}$. Rotația $Oxy \to Ox_1y_1$ conduce la tensorul diagonal

$$\mathbf{J}_{k_z} = \begin{vmatrix} J^{k_z}_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{k_z}_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pentru tensorii $\mathbf{J}_{k_y}$ și $\mathbf{J}_{k_y}$ se obțin relații analoge.

4. ELEMENTE DE SINTEZĂ A SISTEMELOR ELASTICE

Unele aspecte ale proiectării și sintezei sistemelor de suporți izolatori sau suporți pentru mașini vibratoare, presupun formularea și rezolvarea unor probleme inverse. Astfel, urmează să stabilim dacă o axă luată la întîmplare este sau nu axă principală de elasticitate pentru unu

din punctele ei. Deoarece, așa cum s-a arătat, distribuția axelor principale depinde de configurația sistemului de elemente elastice și nu depinde de sistemul de referință mobil se alege un sistem de referință mobil astfel una din axele sale să coincidă cu axa Δ. Fie această axă Oy, O fiind un punct arbitrar de pe Δ. Dacă Δ este axă principală de elasticitate pentru punctul O, adică axă de simetrie pentru elipsoidul de elasticitate corespunzător, atunci ecuația acestuia raportată la sistemul de referință considerat nu trebuie să conțină termeni de gradul unu în raport cu coordonatele x și z.

Introducînd coordonatele unui punct $M(x_0, y_0, z_0)$ și a simetricului său $M'(-x_0, y_0, -z_0)$ aflate pe elipsoid în ecuația (27), rezultă condiția

$$J^{k_x}_{yz} y_0 z_0 + J^{k_z}_{xy} x_0 y_0 = 0, \tag{42}$$

care poate fi satisfăcută numai dacă

$$J^{k_z}_{xy} = J^{k_x}_{yz} = 0. \tag{43}$$

Orientînd axa Ox după axa Δ, se obține condiția

$$J^{k_z}_{xy} = J^{k_y}_{xz} = 0, \tag{43'}$$

iar dacă se orientează axa Oz după axa Δ se obține condiția

$$J^{k_x}_{yz} = J^{k_y}_{xz} = 0. \tag{43''}$$

Indiferent care dintre cele trei grupuri de condiții este îndeplinită, axa Δ este o axă principală de elasticitate pentru punctul O.

Se poate pune problema existenței și determinării unui punct O_1 de pe dreapta Δ în raport cu care aceasta este o axă principală de elasticitate. Alegînd un sistem mobil $O_1x_1y_1z_1$ obținut din primul printr-o translație h de-a lungul axei Oy și o rotație θ în jurul acesteia. Între coordonatele punctului de montaj al unui element elastic există relațiile (fig. 3)

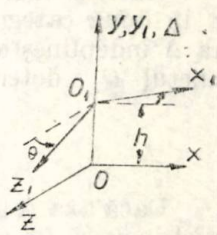


Fig. 3

$$x_{1i} = -z_i \sin\theta + x_i \cos\theta,$$

$$y_{1i} = y_i - h,$$

$$z_{1i} = z_i \cos\theta + x_i \sin\theta.$$

Introducînd (44) în (43) și ținînd seama de (7), se obține

$$(-J^{k_z}_{xy} + h \Sigma k_{iz} x_i) \sin\theta + (J^{k_z}_{yz} - h \Sigma k_{iz} z_i) \cos\theta = 0,$$

$$(J^{k_x}_{yz} - h \Sigma k_{ix} z_i) \cos\theta + (J^{k_x}_{yz} - h \Sigma k_{ix} x_i) \sin\theta = 0. \tag{45}$$

Așa cum s-a arătat, considerînd k_{ix} și k_{iz} mărimi orientate în sensul unor vectori alunecători, coordonatele x_i și z_i pot lua orice valori deci și $x_i = 0$, $z_i = 0$ astfel că $\Sigma k_{ix}x_i = \Sigma k_{iz}z_i = 0$; $\Sigma k_{ix}x_iy_i = \Sigma k_{iz}z_iy_i = 0$. În aceste condiții, identitățile (45) sînt îndeplinite pentru orice θ numai dacă

$$J^{k_z}_{xy} - h\xi_3 K_z = 0\,;\; J^{k_x}_{yz} - h\,\zeta_1\, K_x = 0, \tag{46}$$

unde ξ_3, ζ_1 reprezintă coordonatele centrului elasticității E''', iar $K_x = \Sigma k_{ix}$, $K_z = \Sigma k_{iz}$ constante elastice echivalente.

Distingem două cazuri posibile:

1) axele Δ trec prin centrul elastic E''' ($\xi_3 = \zeta_1 = 0$) și ca urmare condiția (46) devine pentru orice h

$$J^{k_z}_{xy} = J^{k_x}_{yz} = 0, \tag{47}$$

deci axa Oy, adică axa Δ este axă principală a elasticității pentru oricare dintre punctele ei, deci și pentru E''', adică este o axă principală centrală a elasticității;

2) axele nu trec prin centrul elastic E''' și ca să poată fi axe principale pentru punctul O_1 trebuie îndeplinită condiția

$$\frac{J^{k_z}_{xy}}{\xi_3 K_z} = \frac{J^{k_x}_{yz}}{\zeta_1 K_x}. \tag{48}$$

Axele Δ ce nu trec prin centrul elastic E''' pot fi împărțite la rîndul lor în două categorii după cum îndeplinesc sau nu condiția (48). Dacă axa Δ îndeplinește condiția (48) atunci este axă principală în raport cu punctul O_1 determinat prin cota sa

$$h = \frac{J^{k_z}_{xy}}{\xi_3 K_z}. \tag{49}$$

Dacă axa Δ nu îndeplinește condiția (48), h nu poate fi determinat astfel încît să fie îndeplinită condiția (43) deci pe axa Δ nu există nici un punct pentru care această dreaptă este axă principală a elasticității. În concluzie, dacă o axă Δ ce nu trece prin centrul de elasticitate E''' îndeplinește condiția (48) există un singur punct pe axă pentru care aceasta este axă principală a elasticității, iar în caz contrar axa Δ nu este axă principală pentru nici unul din punctele ei.

Ținînd seama de relația de condiție (16) condiția (48) devine

$$\Sigma k_{ix}y_i(\zeta_1 x_i - \xi_3 z_i) = 0. \tag{50}$$

Această condiție este satisfăcută și pentru următoarele cazuri particulare:

a) $y_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, deci toate coordonatele y_i se află în planul Oxz, adică toate punctele de prindere ale arcurilor se află în acest plan;

b) pentru $y_i > 0$ sau $y_i < 0$ $(i = 1,2,\ldots, n)$ condiția (50) devine

$$\frac{x_i}{z_i} = \frac{\xi_3}{\zeta_1} \quad (i = 1,2,\ldots, n);$$

c) pentru $y_i > 0$ sau $y_i < 0$ $(i = 1,2, \ldots, m < n)$ și $y_i = 0$, $(i = m + 1, \ldots, n)$ condiția (50) devine

$$\frac{x_i}{z_i} = \frac{\xi_3}{\zeta_1} \quad (i = 1,2,\ldots, m)$$

adică raportul coordonatelor x_i și z_i trebuie să fie constant, dar constanta nu mai poate fi arbitrară ci egală cu raportul coordonatelor centrului elastic E'''.

Un raționament analog se face și pentru axele paralele cu Ox. Astfel, dacă centrul elastic E'' se află pe axa Ox, respectiv Δ, adică $\eta_3 = \zeta_2 = 0$, condiția ca axa Δ să fie axă principală de elasticitate este

$$J^{k_z}_{xy} = J^{k_y}_{zx} = 0. \tag{51}$$

Dacă axa Δ nu trece prin centrul E'', atunci pentru a fi axă principală de elasticitate trebuie să se îndeplinească condiția

$$\frac{J^{k_z}_{xy}}{\eta_3 K_z} = \frac{J^{k_y}_{zx}}{\zeta_2 K_y}, \tag{52}$$

unde $K_y = \Sigma k_{iy}$.

În acest caz, punctul pentru care axa Δ este axă principală a elasticității este determinat prin abscisa

$$d = \frac{J^{k_z}_{xy}}{\eta_3 K_z}. \tag{53}$$

Dacă axa Δ nu îndeplinește condițiile (52), d nu poate fi determinat, astfel că Δ nu este axă principală pentru nici unul din punctele sale. Ținînd seama de relația (13'), relația (52) devine

$$\Sigma k_{iy} x_i (y_i \zeta_2 - z_i \eta_3) = 0 \tag{54}$$

satisfăcută și pentru cazurile particulare:

a) $x_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots, n)$;

b) pentru $x_i > 0$ sau $x_i < 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ condiția (54) devine

$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{\eta_3}{\zeta_2} \quad (i = 1,2,\ldots, n);$$

c) pentru $x_i > 0$ sau $x_i < 0$ $(i = 1,2,\ldots, m)$ și $x_i = 0$ $(i = m + 1, \ldots, n)$ condiția (54) devine

$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{\eta_3}{\zeta_2} \quad (i = 1,2,\ldots, m).$$

Considerînd axele Δ suprapuse cu Oz, în situația în care centrul elastic E' se află pe această axă adică $\xi_2 = \eta_1 = 0$, condiția ca axa Δ, respectiv Oz, să fie axă principală a elasticității este

$$J^{k_y}_{zx} = J^{k_x}_{yx} = 0. \tag{55}$$

Cînd axa Δ nu trece prin E', condiția ca să fie axă principală a elasticității este

$$\frac{J^{k_y}_{zx}}{\xi_2 K_y} = \frac{J^{k_x}_{zy}}{\eta_1 K_x}. \tag{56}$$

Punctul pentru care axa Δ este axă principală a elasticității este determinat prin abscisa

$$l = \frac{J^{k_y}_{zx}}{\xi_2 K_y}. \tag{57}$$

Dacă axa Δ nu îndeplinește condițiile (56), l nu poate fi determinat, astfel că Δ nu este axă principală pentru nici unul din punctele sale. Ținînd seama de relația (11), condiția (56) devine

$$\Sigma\, k_{ix} z_i (x_i \eta_i - y_i \xi_2) = 0 \tag{58}$$

satisfăcută și pentru cazurile particulare :

a) $z_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

b) pentru $z_i > 0$ sau $z_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ condiția (57) devine

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\xi_2}{\eta_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

c) pentru $z_i > 0$ sau $z_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m + n)$ și $z_i = 0$ $(i = m + n, \ldots, n)$ condiția (57) devine

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\xi_2}{\eta_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

5. APLICAȚII

1. *Sistem de arcuri elicoidale dispuse circular.* Se consideră un suport cu un număr n par de arcuri elicoidale identice dispuse circular în punctele $A_i(x_i, y_i, z_i)$ (fig. 4) :

$$x_i = b \cos i\varphi; \quad y_i = -h; \quad z_i = b \sin i\varphi; \quad \varphi = \frac{2\pi}{n}. \tag{59}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Pentru arcurile elicoidale cilindrice $k_{ix} = k_{iz} = k_t$ — constanta elastică transversală și $k_{iy} = k$ — constanta elastică longitudinală.

Deoarece $\frac{k_{xi}}{k_{zi}} = 1$; $\frac{k_{xi}}{k_{yi}} = \frac{k_{zi}}{k_{yi}} = c$, sistemul are centru principal al elasticității. Expresiile momentelor de ordinul unu și a constantelor elastice echivalente sînt

$$\Sigma k_{ix} y_i = -nhk_t\,;\ \Sigma k_{ix} z_i = \Sigma k_{iy} z_i = \Sigma k_{iy} x_i = \Sigma k_{iz} x_i = 0,$$
$$\Sigma k_{iz} y_i = -nhk_t\,;\ \Sigma k_{ix} = \Sigma k_{iz} = nk_t\,;\ \Sigma k_{iy} = nk. \tag{60}$$

Ecuațiile axelor principale de ordinul unu ale elasticității sînt

$$\bar{\xi}\begin{cases}\eta_1 = -k,\\ \zeta_1 = 0;\end{cases}\quad \bar{\eta}\begin{cases}\xi_2 = 0,\\ \zeta_2 = 0;\end{cases}\quad \bar{\zeta}\begin{cases}\xi_3 = 0,\\ \eta_3 = -h.\end{cases} \tag{61}$$

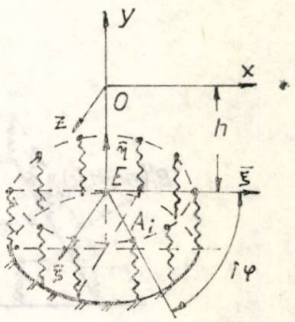


Fig. 4

Datorită simetriei, în planul xOy există n axe principale $\bar{\xi}$ și respectiv $\bar{\eta}$. Pentru sistemul de referință $Oxyz$ matricea S_k este

$$S_k = nhk_t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{62}$$

adică numai axa Oy ce coincide cu $\bar{\eta}$ este axă principală.

Expresiile momentelor de ordinul doi sînt

$$\Sigma (k_{ix} z_i^2 + k_{iz} x_i^2) = nk_t b^2\,;\quad \Sigma k_{iz} x_i y_i = 0,$$
$$\Sigma (k_{iy} z_i^2 + k_{iz} y_i^2) = \frac{nkb^2}{2} + nk_t h^2\,;\quad \Sigma k_{ix} z_i y_i = 0, \tag{63}$$
$$\Sigma (k_{ix} y_i^2 + k_{iy} x_i^2) = nk_t h^2 + \frac{nkb^2}{2}\,;\quad \Sigma k_{iy} x_i z_i = 0.$$

Matricea $\mathbf{J}_k$ este

$$\mathbf{J}_k = n \begin{bmatrix} \frac{kb^2}{2} + k_t h^2 & 0 & 0\\ 0 & k_t b^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{kb^2}{2} + k_t h^2\end{bmatrix}, \tag{64}$$

deci axele Ox, Oy, Oz sînt axe principale de ordinul doi ale elasticității de ordinul doi în raport cu punctul O.

Matricea $\mathbf{J}_k$ corespunzătoare centrului elastic E este

$$\mathbf{J}_k = \frac{nb^2}{2} \begin{bmatrix} k & 0 & 0\\ 0 & k_t & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}. \tag{65}$$

Dacă punctele O și E coincid, matricea $S_k = 0$, astfel că matricea **K** devine diagonală, deci toate mișcările sînt decuplate.

2. *Sistem de arcuri elicoidale dispuse dreptunghiular.* Pe laturile mari se află montate $4n + 2$ arcuri elicoidale, iar pe laturile mici $4m-2$ arcuri elicoidale (fig. 3). Punctele de montaj sînt $A_r(rc, -h, mc)$, $A'_r(rc, -h, -mc)$, $B_j(nc, -h, jc)$, $B'_r(nc, -h, jc)$, unde $r = -n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots n-1, n$; $j = -(m-1), -(m-2), \ldots, -1, 0, 1, \ldots m-2, m-1$, iar punctele de capăt aparțin laturilor mari.

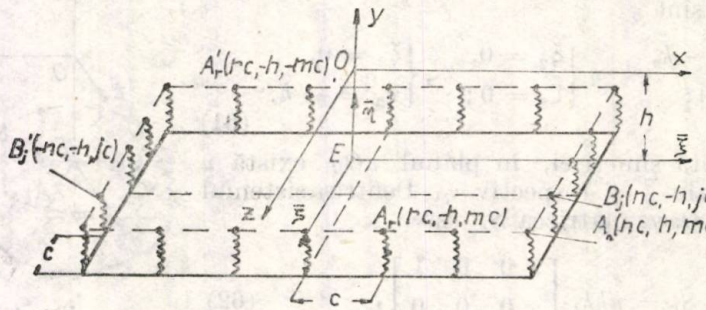


Fig. 5

Expresiile momentelor de ordinul unu sînt

$$\Sigma k_{ix} y_i = \Sigma k_{iz} y_i = -4hk_i(m+n), \tag{66}$$

$$\Sigma k_{ix} z_i = \Sigma k_{iz} x_i = \Sigma k_{iy} x_i = \Sigma k_{iy} z_i = 0,$$

iar constantele elastice echivalente

$$\Sigma k_{ix} = \Sigma k_{iz} = 4k_i(m+n); \; \Sigma k_{iy} = 4k(m+n).$$

unde $i = r + j$

Ecuațiile axelor principale de ordinul unu ale elasticității sînt

$$\bar{\xi}\begin{cases}\eta_1 = -h,\\ \zeta_1 = 0;\end{cases} \quad \bar{\eta}\begin{cases}\xi_1 = 0,\\ \zeta_2 = 0;\end{cases} \quad \bar{\zeta}\begin{cases}\xi_3 = 0,\\ \eta_3 = -h,\end{cases} \tag{67}$$

ce converg în punctul E fiind unice pentru sistemul considerat.

Pentru sistemul de referință $Oxyz$, matricea S_k este

$$S_k = 4hk_i(m+n)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{68}$$

deci numai Oy ce coincide cu $\bar{n}$ este axă principală. Dacă O coincide cu E, atunci $S_k = 0$.

Expresiile momentelor de ordinul doi sînt

$$\Sigma k_{iy}x_iz_i = \Sigma k_{ix}z_iy_i = \Sigma k_{iz}x_iy_i = 0,$$

$$\Sigma k_{ix}z_i^2 = 2k_ic^2m\left[(2n+1)m + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right],$$

$$\Sigma k_{iy}z_i^2 = 2kc^2\,m\left[(2n+1)m + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right], \tag{69}$$

$$\Sigma k_{iz}x_i^2 = 2k_ic^2n\left[n(2m-1) + \frac{(n+1)(2n+1)}{3}\right],$$

$$\Sigma k_{iy}x_i^2 = 2kc^2n\left[n(2m-1) + \frac{(n+1)(2n+1)}{3}\right],$$

$$\Sigma k_{ix}y_i^2 = 4k_ih\,(m+n).$$

Matricea $\mathbf{J}_k$ are forma diagonală

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & 0 \\ 0 & J_2^k & 0 \\ 0 & 0 & J_3^k \end{bmatrix}, \tag{70}$$

unde

$$J_1^k = 4k_ih(m+n) + 2kc^2m\left[(n+1)m + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right],$$

$$J_2^k = 2k_ic^2\left\{m\left[(2n+1)m + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right] + \right.$$

$$\left. + n\left[(2m-1)n + \frac{(n+1)(2n+1)}{3}\right]\right\}, \tag{71}$$

$$J_3^k = 4k_ih(m+n) + 2kc^2n\left[(2m-1)n + \frac{(n+1)(2n+1)}{3}\right].$$

Se observă că axele tuturor sistemelor de referință obținute prin translația sistemului $Oxyz$ de-a lungul axei Oy sînt axe principale de ordinul doi ale elasticității.

Pentru a modifica poziția centrului elastic E astfel încît să coincidă cu O se poate folosi un montaj ca în figura 6. Cele $4n+2$ arcuri au cota $y_i = -h$, iar cele $4m-2$ arcuri cota $y_i = h'$.

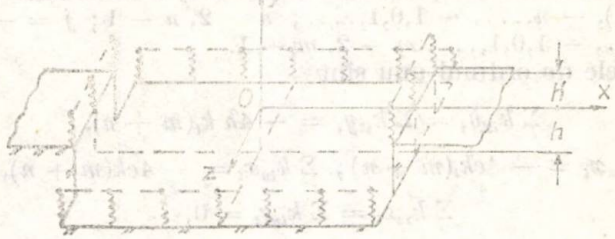


Fig. 6

În acest caz

$$\Sigma k_{ix}y_i = \Sigma k_{iz}y_i = 2k_t[(2m-1)h' - (2n+1)h], \tag{72}$$
$$\Sigma k_{ix}y_i^2 = \Sigma k_{iz}y_i^2 = 2k_t[(2m-1)h'^2 + (2n+1)h^2],$$

iar restul momentelor de ordinul unu și doi rămîn aceleași.

Ecuațiile axelor principale de ordinul unu ale elasticității sînt

$$\bar{\xi}\begin{cases}\eta_1 = \dfrac{(2m-1)h' - (2n+1)h}{4(m+n)},\\ \zeta_1 = 0;\end{cases} \qquad \bar{\eta}\begin{cases}\xi_2 = 0,\\ \zeta_2 = 0;\end{cases}$$

$$\bar{\zeta}\begin{cases}\xi_3 = 0,\\ \eta_3 = \dfrac{(2m-1)h' - (2n+1)h}{4(m+n)}.\end{cases} \tag{73}$$

Condiția ca punctul E să coincidă cu O este $\eta_1 = \eta_3 = 0$, de unde rezultă

$$\frac{h'}{h} = \frac{2n+1}{2m-1}, \tag{74}$$

adică raportul cotelor trebuie să fie egal cu raportul numărului de arcuri de pe cele două laturi ale dreptunghiului.

Pentru $h = h'$ se obține

$$n = m - 1. \tag{75}$$

Să considerăm cazul aceluiași sistem elastic, dar cu sistemul de referință translatat în planul de simetrie Oxy, de-a lungul axei Ox cu distanța c (fig. 7).

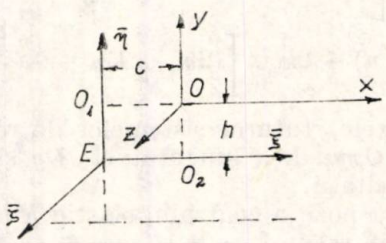


Fig. 7

Indicii coordonatelor punctelor de montaj ale arcurilor iau valorile: $r = -(n+1), -n, \ldots -1, 0, 1, \ldots;\ n-2, n-1;\ j = -(m-1), -(m-2), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m-2, m-1$.

Momentele de ordinul unu sînt

$$\Sigma k_{ix}y_i = \Sigma k_{iz}y_i = -4h\,k_t(m+n),$$
$$\Sigma k_{iz}x_i = -4ck_t(m+n);\ \Sigma k_{iy}x_i = -4ck(m+n), \tag{76}$$
$$\Sigma k_{ix}z_i = \Sigma k_{iy}z_i = 0,$$

unde $i = r + j$.

Ecuațiile axelor principale de ordinul unu sînt

$$\overline{\xi}\begin{cases}\eta_1 = -h,\\ \zeta_1 = 0;\end{cases}\quad \overline{\eta}\begin{cases}\xi_2 = -c,\\ \zeta_2 = 0;\end{cases}\quad \overline{\zeta}\begin{cases}\xi_3 = -c,\\ \eta_3 = -h,\end{cases} \tag{77}$$

adică axele găsite anterior.

Matricea $\mathbf{S}_k$ corespunzătoare sistemului $Oxyz$ este corespunzătoare sistemului $Oxyz$ este

$$\mathbf{S}_k = 4c(m+n)\begin{bmatrix} 0 & 0 & k_t \\ 0 & 0 & -k \\ -k_t & k & 0 \end{bmatrix}. \tag{78}$$

Momentele de ordinul doi sînt

$$\Sigma k_{ix} y_i z_i = \Sigma k_{iy} x_i z_i = 0,$$

$$\Sigma k_{iz} y_i x_i = 4\,ch\,k_t(m+n),$$

$$\Sigma k_{ix} z_i^2 = 2k_t c^2 m\left[m(2n+1) + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right], \tag{79}$$

$$\Sigma k_{iz} x_i^2 = k_t c^2\left[2(2m-1)(n^2+1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)n(2n-1) + (n+1)(n+2)(2n+3)}{3}\right],$$

$$\Sigma k_{ix} y_i^2 = \Sigma k_{iz} y_i^2 = 4h^2 k_t(m+n).$$

Matricea momentelor de ordinul doi este

$$J_k = \begin{bmatrix} J_z^{k_y} + J_y^{k_z} & -J_{xy}^{k_z} & 0 \\ -J_{yx}^{k_z} & J_z^{k_x} + J_x^{k_z} & 0 \\ 0 & 0 & J_y^{k_x} + J_x^{k_y} \end{bmatrix}, \tag{80}$$

unde

$$J_z^{k_y} + J_y^{k_z} = 4h^2 k_t(m+n) + 2kc^2 m\left[(2n+1)m + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right],$$

$$J_z^{k_x} + J_x^{k_z} = 2k_t c^2 m\left[(2n+1)m + \frac{(m-1)(2m-1)}{3}\right] +$$

$$+ k_t c^2\left[2(2m-1)(n^2+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)+(n+1)(n+2)(2n+3)}{3}\right],$$

$$J_y^{k_x} + J_x^{k_y} = 4hk^2(m+n) + kc^2[2(2m-1)(m^2+1) +$$

$$+ \frac{(n-1)n(2n-1) + (n+1)(n+2)(2n+3)}{3},$$

$$J_{xy}^{k_z} = 4chk_t(m+n).$$

Axa Oz este axă principală a momentelor de ordinul doi în raport cu punctul O. Se observă că translatînd sistemul de referință în punctele de abscisă cr ($r = -(n+1), -n, \ldots, n-1$), axa Oz rămîne axă principală.

Axele Ox și Oy nu sînt axe principale în raport cu punctul O. Pentru a verifica dacă Ox este axă principală în raport cu un alt punct punct trebuie cercetat dacă condiția (43) este verificată. Această condiție este verificată pentru punctul de abscisă

$$d = -c, \tag{82}$$

adică la intersecția axelor Ox și $\bar{\eta}$.

Pentru axa Oy condiția (43′) este verificată pentru un punct aflat la cota

$$h^* = -h \tag{83}$$

adică la intersecția axelor Oy și $\bar{\xi}$.

Pentru ca axele principale $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ și $\bar{\zeta}$ să coincidă cu axele sistemului $Oxyz$, cu alte cuvinte să realizăm coincidența punctelor E și O, este necesară o altă configurație a sistemului elastic. O strategie posibilă constă în modificarea punctelor de montaj cu păstrarea configurației geometrice de bază și a caracteristicilor arcurilor. Astfel, dacă se păstrează ca și în cazul precedent cele $4n+2$ arcuri laterale la cotele $y_i = -h$ și cele $4m-2$ arcuri frontale la cotele $y_i = h'$, din condițiile de anulare $\eta_1 = \eta_3 = 0$ se obține ca și în cazul precedent relația (74). Arcurile dispuse de-a lungul semiaxei Ox pozitive se montează echidistant la distanța c, iar cele de-a lungul semiaxei Ox negative la distanța $c' < c$, astfel încît (fig. 8)

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= c \text{ pentru } 2n-2 \text{ arcuri}, \\ x_i - x_{i-1} &= c' \text{ pentru } 2n+2 \text{ arcuri}. \end{aligned} \tag{84}$$

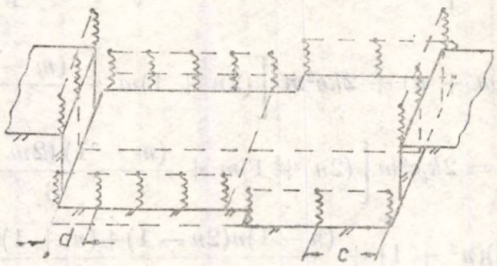


Fig. 8

În acest caz

$$\begin{aligned} \Sigma k_{iz} x_i &= kl\,\{c(n-1)(2m+n) - c'[(n+1)(2m+n) + 2n]\}, \\ \Sigma k_{ixz} x_i &= k\{c(n-1)(2m+n) - c'[(n+1)(2m+n) + 2n]\}. \end{aligned} \tag{85}$$

Din condiția $\xi_1 = \xi_3 = 0$ rezultă

$$\frac{c}{c'} = \frac{(n+1)(2m+n)+2n}{(n-1)(2m+n)}. \tag{86}$$

Pentru ca axele η și ζ să coincidă cu Oy și respectiv Oz trebuie ca egalitățile (74) și (86) să fie îndeplinite simultan. Ele pot fi considerate ca un sistem de ecuații algebrice cu două necunoscute, considerînd date celelalte două. Dacă este dat numărul de arcuri, se calculează rapoartele $\frac{k}{h'}$ și $\frac{c}{c'}$ necesare.

De exemplu pentru $n = m = 3$ se obține $h/h' = 7/5$ și $c/c' = 7/3$. Dacă sînt date rapoartele h/h' și c/c' se obține un sistem algebric nelinear în m și n pentru care urmează să se afle soluții în N_+.

Pentru ca axele sistemului de referință să fie axe principale de ordinul doi este suficient ca $J^{k_z}_{y_x} = 0$, ce conduce la relația de condiție

$$\frac{h}{h'} \cdot \frac{c}{c'}(n-1)n - \frac{h}{h'}(n+1)(n+2) - \frac{c}{c'}(n-1)(2m-1) + \\ + (n+1)(2m-1) = 0. \tag{87}$$

Pentru ca axele sistemului de referință să fie axe principale ale momentelor unu și doi, trebuie să fie satisfăcute simultan egalitățile (74), (86) și (87), ce formează un sistem de trei ecuații cu patru necunoscute. Evident, pot exista numeroase strategii posibile pentru obținerea acestui deziderat.

Primit în redacție la 9 mai 1988

BIBLIOGRAFIE

1. M. MUNTEANU, *Caracteristicile elementelor elastice liniare triaxiale*, Bul. Inst. Polit. București, seria Mecanică **L** 1988.
2. M. MUNTEANU, *Asupra echilibrului solidului rigid cu legături elastice triaxiale*, St. cerc. mec. apl., **48**, 2 (1989).
3. M. MUNTEANU, *Dynamics of single vibrating machines mounted on elastic supports. General case.*, Bul. Inst. Polit. București, seria Mecanică, **XLVI—XLVII**, (1984—1985).
4. C. M. HARRIS, C. E. CREDE, *Șocuri și vibrații.*, vol. **II**, Edit. Tehnică București, 1968.

COMPRESOR CU MEMBRANĂ METALICĂ CU PROFIL DE DEFORMARE LINIARIZAT

de M. PECULEA și ANISIA MOȘTEANU

Uzina G, Rîmnicu Vîlcea

Se arată trecerea de la profilul cu deformare naturală a membranei la cel liniarizat, care prezintă avantajul unei prelucrări mecanice mai simple. Sînt determinate ecuațiile dreptelor și curbelor de racordare care definesc profilul liniarizat, din care se deduc volumul dezlocuit prin pompare și efortul din membrană. Ca aplicație sînt prezentate modelul de proiectare, schema logică de calcul și comparativ curbele de deformare și variația efortului din membranele cu profil de deformare naturală și liniarizat.

Compresoarele cu membrană metalică se caracterizează prin vehicularea unui gaz în perfectă stare de puritate, completă etanșeitate și cu o comprimare apropiată de o izotermă, la care dacă se asociază prin construcție un volum mort redus, permite și obținerea unor rapoarte ridicate de comprimare pe cilindru. Aceste avantaje se pot aplica doar pentru cilindree mici, care practic nu depășesc un debit unitar de 200 m^3/ora.

Comprimarea gazului de către membrana metalică *1*, cum rezultă din figura 1, se realizează prin deformarea ei, limitată de două suprafețe curbe *2* și *3*, membrana fiind acționată de un mecanism cu piston *4* prin intermediul unui lichid *5*.

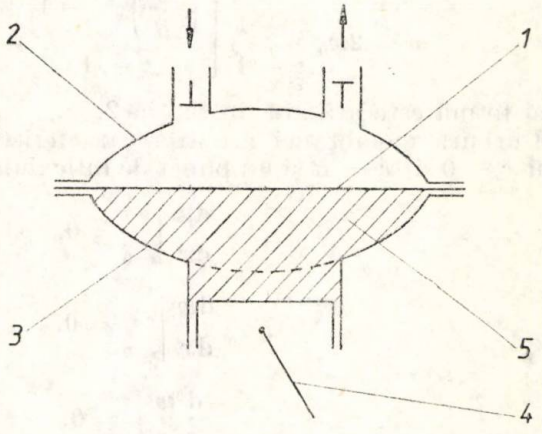


Fig. 1. — Schema de funcționare a compresorului cu membrană metalică: *1* — membrană metalică; *2* — capac superior; *3* — capac inferior; *4* — mecanism de acționare cu piston; *5* — lichid de acționare a membranei.

Curbura suprafețelor *2* și *3* este dată de deformarea naturală a unei plăci subțiri de formă circulară, încastrată pe periferie, sub acțiunea unei presiuni uniform distribuită pe suprafața ei.

PROFILUL DE DEFORMARE NATURALĂ

Membranele pentru compresoare se caracterizează printr-o grosime δ mult mai mică decît săgeata maximă de deformare w_0. Deoarece $\delta \ll w_0$

se poate considera că în membrană se dezvoltă doar eforturi normale pe secțiune, după două direcții perpendiculare, respectiv una în direcție radială și una tangențială. În aceste condiții Nadai definește funcția de deformare a membranei $f(x, w) = 0$ [1] prin integrarea ecuației

$$\frac{dw}{dx} = C\left[\frac{x}{R} - \left(\frac{x}{R}\right)^n\right] \tag{1}$$

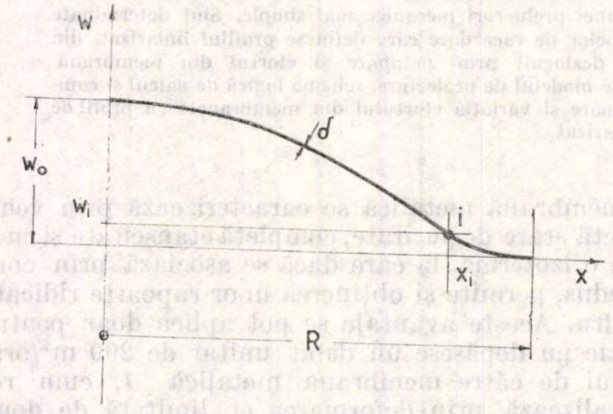


Fig. 2. — Profilul de deformare normală a membranei : i — punct de inflexiune.

și obține

$$w = 2w_0 \frac{z+1}{z-1}\left[\frac{\left(\frac{x}{R}\right)^{z+1} - 1}{z+1} - \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 1}{2}\right] \tag{2}$$

a cărei formă este arătată în figura 2.

Curbura membranei are trei caracteristici : două tangente nule pentru $x = 0$ și $x = R$ și un punct de inflexiune i, definite de

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=R} = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{i} = 0.$$

Volumul dezlocuit prin deformarea simetrică a membranei (pompare) este

$$V_h = \pi R^2 w_0 \frac{z+1}{z+3}, \tag{4}$$

unde

$$z = 4{,}56\,\frac{w_0}{\delta} + 0{,}545. \tag{5}$$

Compresoarele cu membrană metalică construite cu suprafețe limită (figura 1, pozițiile 2 și 3) după curba definită de ecuația (2) [2], au dat satisfacție completă. Prelucrarea suprafețelor care limitează deformarea membranei reclamă fie mașini unelte cu program, fie dispozitive speciale. Pentru simplificarea prelucrării acestor suprafețe profilul de deformare trebuie liniarizat.

LINIARIZAREA PROFILULUI DE DEFORMARE

S-au luat în considerare următoarele:

1 — profilul de deformare să fie format din două drepte cu două racorduri;

2 — cele două racordări să aibă razele egale și ca mărime, razele de racordare să fie egale sau mai mari decît raza echivalentă la punctul de inflexiune pentru profilul cu deformare naturală;

3 — panta dreptei înclinate să corespundă solicitării maxime în membrană [3], respectiv să fie egală sau mai mică decît panta din punctul de inflexiune pentru profilul cu deformare naturală.

Profilul liniarizat de deformare poate fi urmărit în figura 3.

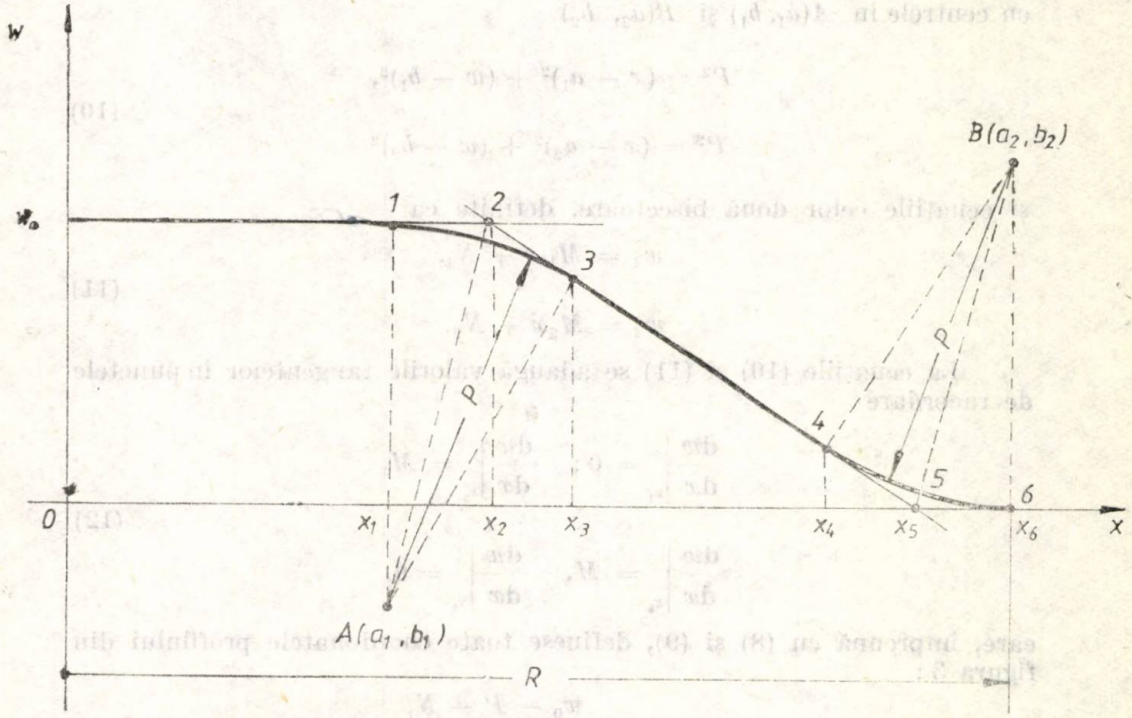


Fig. 3. — Profilul de deformare liniarizat, reprezentat în diagrama (w, x).

Profilul este format din două drepte (w_0 — 2) și (2 — 5) racordate în punctele 1—3 și 4—6, raza de racordare fiind P, cu centrele de racordare A și B plasate pe bisectoarea unghiurilor din 2 și 5. Pentru pro-

filul liniarizat se admit aceleași valori ale lui w_0, R și δ ca și pentru profilul cu deformare naturală.

Panta dreptei (2—5) va fi

$$M = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x_i} \tag{6}$$

cu abscisa punctului de inflexiune (fig. 2)

$$x_i = R\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z-1}}, \tag{7}$$

respectiv

$$M = 2\frac{w_0}{R}\cdot\frac{z+1}{z-1}\left[\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{z}{z-1}} - \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z-1}}\right] \tag{8}$$

și deci ecuația dreptei (2—5) este

$$w = Mx + N. \tag{9}$$

Raza de racordare P se determină din ecuațiile celor două cercuri cu centrele în $A(a_1, b_1)$ și $B(a_2, b_2)$

$$\begin{aligned} P^2 &= (x - a_1)^2 + (w - b_1)^2, \\ P^2 &= (x - a_2)^2 + (w - b_2)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

și ecuațiile celor două bisectoare, definite ca

$$\begin{aligned} w_A &= M_1 x + N_1, \\ w_B &= M_2 x + N_2. \end{aligned} \tag{11}$$

La ecuațiile (10) și (11) se adaugă valorile tangentelor în punctele de racordare

$$\begin{aligned} \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x_1} &= 0\,; \quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x_3} = M, \\ \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x_4} &= M, \quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x_6} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

care, împreună cu (8) și (9), definesc toate coordonatele profilului din figura 3 :

$$x_1 = a_1 = \frac{w_0 - P - N_1}{M_1},$$

$$x_2 = \frac{w_0 - N}{M},$$

$$x_3 = \frac{w_0 - P - N_1}{M_1} - \frac{M \cdot P}{\sqrt{1 + M^2}},$$

$$x_4 = R + \frac{M \cdot P}{\sqrt{1 + M^2}},$$

$$x_5 = -\frac{N}{M}, \tag{13}$$

$$x_6 = a_2 = R,$$

$$b_1 = w_0 - P,$$

$$b_2 = P$$

și parametrii dreptelor

$$N = P - Mx_4 - \sqrt{P^2 - \left[x_4 - \frac{P - N_2}{M_2}\right]^2},$$

$$M_1 = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{M}{2}\right)\right],$$

$$N_1 = w_0 - M_1 \cdot x_2, \tag{14}$$

$$M_2 = M_1,$$

$$N_2 = P - M_2 . x_6.$$

Soluția univocă pentru datele sistemului (13) și (14) impune alegerea valorii pentru raza de racordare P. Luînd în considerare punctul 2 de mai sus, se poate determina raza de racordare echivalentă punctului de inflexiune, introducînd în (13) pentru x_4 valoarea x_i din (7), de unde rezultă

$$P_i = R\left[\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{z-1}} - 1\right]\frac{\sqrt{1 + M^2}}{M}. \tag{15}$$

Deci P se alege în condiția

$$P \geqslant P_i, \tag{16}$$

ceea ce echivalează cu $x_4 \leqslant x_i$.

Efortul în membrană se determină cu relația [3]

$$\sigma = E\left[\sqrt{1 + \left(-\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1\right] \tag{17}$$

și are valoarea maximă în domeniul $x \in (x_3, x_4)$

$$\sigma_{max} = E[\sqrt{1 + (-M)^2} - 1] \tag{18}$$

cu M din relația (8).

Volumul dezlocuit de membrană prin pompare este

$$V_h^* = 2(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \tag{19}$$

și reprezintă volumul descris de rotația curbei (w_0 1 3 4 6) în jurul axei Ow

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi x_1^2 w_0, \\ V_2 &= 2\pi \int_{x_1}^{x_3} w\, x\, \mathrm{d}x, \\ V_3 &= \pi (x_4^2 w_4 - x_3^2 w_3) + \\ &+ \frac{\pi}{3} (w_3 - w_4)(x_4^2 + x_4 x_3 + x_3^2), \\ V_4 &= 2\pi \int_{x_4}^{x_6} w\, x\, \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{20}$$

cu V_2 și V_4 după integrare

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2}{3} \pi P^3 + \pi (w_0 - P)(x_3^2 - x_1^2) + \pi x_1 P^2 \arcsin \frac{x_3 - x_1}{P} + \\ &+ 2\pi \left(\frac{x_3^2}{3} - \frac{x_1 x_3}{6} - \frac{x_1^2 + 2P^2}{6} \right) \sqrt{P^2 - (x_3 - x_1)^2}, \\ V_4 &= \frac{2}{3} \pi P^3 + \pi P (x_6^2 - x_4^2) + \pi x_6 P^2 \arcsin \frac{x_4 - x_6}{P} + \\ &+ 2\pi \left(\frac{x_4^2}{3} - \frac{x_4 x_6}{6} - \frac{x_6^2 + 2P^2}{6} \right) \sqrt{P^2 - (x_4 - x_6)^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

MODEL DE PROIECTARE

Datele inițiale de proiectare sînt : volumul dezlocuit prin deformarea membranei, respectiv volumul de pompare V_h și calitatea materialului membranei caracterizat de rezistența mecanică admisibilă σ și modulul de elasticitate E. Ca prim pas se determină dimensiunile principale ale volumului de pompare R și w_0 pentru profilul de deformare naturală [2]. Cu suficientă precizie și acoperitor se determină raza membranei R din

$$V_h = 2{,}25\, R^3 \sqrt{\frac{\sigma}{E}}. \tag{22}$$

Pentru deducerea relației (22) s-a apelat la relația (17), unde termenul

$$\sqrt{1+\left(-\frac{dw}{dx}\right)^2}$$

a fost dezvoltat în serie și deoarece $\left|\frac{dw}{dx}\right| < 0{,}1$ se pot lua în considerare doar primii doi termeni, deci

$$\sqrt{1+\left(-\frac{dw}{dx}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{dw}{dx}\right)^2. \tag{23}$$

Valoarea maximă a lui $\frac{dw}{dx}$ este (8), care, pentru valorile uzuale ale lui z din (5) cînd $\frac{w_0}{\delta} > 5$, se poate aproxima

$$M = -1{,}85\,\frac{w_0}{R} \tag{24}$$

și care cu (17) și (23) dă

$$\frac{w_0}{R} = 0{,}76\sqrt{\frac{\sigma}{E}}. \tag{25}$$

Din combinarea relațiilor (4), (5) și (25) cu z în domeniul uzual de construcție al membranelor metalice, a rezultat (22). În continuare w_0 se deduce din (25). Dacă se dorește o corecție a dimensiunilor lui R și w_0 (rotunjiri sau valori normate), după alegerea grosimii membranei δ verificările se fac prin sistemul (4), (5) cu menținerea lui σ din (25) sub valoarea maximă admisibilă.

Liniarizarea profilului de deformare se face prin egalizarea celor două volume dezlocuite prin deformare pentru profil natural și liniarizat, egalizare obținută prin alegerea corespunzătoare a razei de racordare P, cu respectarea inegalității (16), respectiv

$$V_h^* = V_h, \quad P \geqslant P_i. \tag{26}$$

Mersul calculului pentru liniarizarea profilului de deformare este arătat în schema logică din figura 4, unde Δ este pasul de creștere a lui P_i, în determinarea lui P pentru satisfacerea egalității $V_h^* = V_h$.

În continuare se prezintă aplicarea metodei de liniarizare a profilului de deformare la proiectarea unui compresor cu membrană metalică pentru un debit de $V = 10$ m³/h. Cu turația aleasă de $n = 300$ rot/min, pentru care rezultă un randament volumetric $\eta_V = 0{,}82$, se determină volumul de pompaj $V_h' = 677{,}51$ cm³. Membrana din oțel are $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² și rezistența admisibilă $\sigma_a = 1450$ daN/cm², de unde $\sqrt{\frac{\sigma}{E}} = 0{,}0263$. Din (22) rezultă $R = 225{,}38$ mm, alegîndu-se $R = 225$ mm; din (25) $w_0 = 4{,}505$ mm și se alege $w_0 = 4{,}5$ mm. Se ia

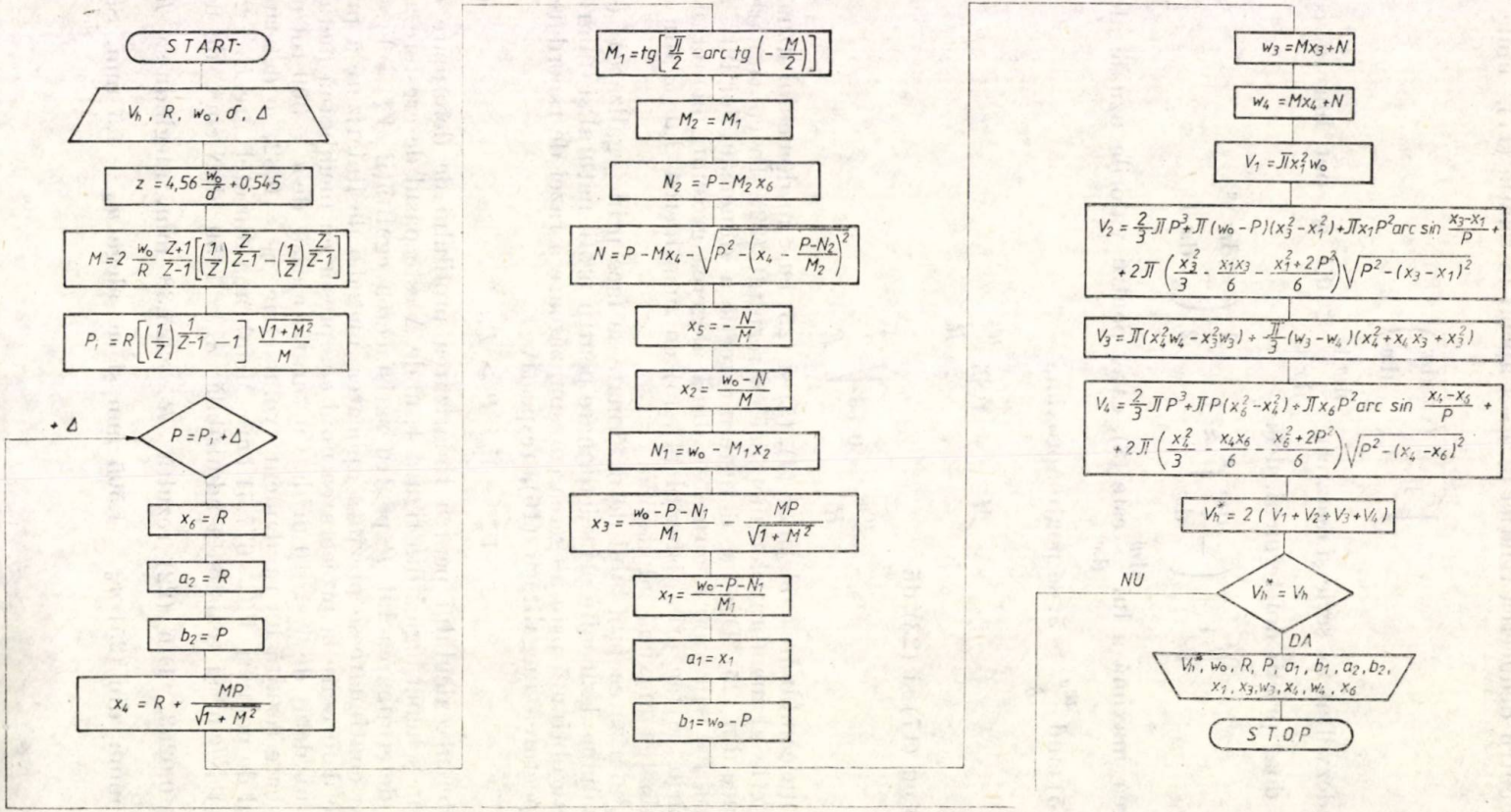


Fig. 4. — Schema logică de calcul pentru liniarizarea profilului de deformare a membranei.

$\delta = 0{,}6$ mm și rezultă din (5) $z = 34{,}745$, cu care se verifică și stabilește volumul de pompaj $V_h = 677{,}77$ cm^3.

Valorile de mai sus, determinate pentru profilul de deformare naturală, se introduc ca date de intrare în modelul de calcul din figura 4, care determină dimensiunile profilului de deformare liniarizat, în condițiile sistemului (26). Rezultatele afișate de model sînt :

$$V_h^* = 677774{,}7 \text{ mm}^3; \quad P = 735{,}107 \text{ mm},$$

$$w_0 = 4{,}5 \text{ mm}; \quad R = 225 \text{ mm},$$

$$x_1 = a_1 = 76{,}261 \text{ mm}; \quad x_2 = 89{,}911 \text{ mm}; \quad x_3 = 103{,}474 \text{ mm},$$

$$x_4 = 197{,}787 \text{ mm},$$

$$x_5 = 211{,}388 \text{ mm}; \quad x_6 = a_2 = 225{,}000 \text{ mm},$$

$$b_1 = -730{,}607 \text{ mm}; \quad b_2 = 735{,}107 \text{ mm},$$

cu valori intermediare pentru următoarele mărimi :

$$P_i = 606{,}607 \text{ mm},$$

$$M = -0{,}03704; \qquad N = 7{,}83069,$$

$$M_1 = 53{,}85477; \qquad N_1 = -4837{,}64844,$$

$$M_2 = 53{,}85477; \qquad N_2 = -11382,\ 21680.$$

Diferența relativă, nesemnificativă, între cele două volume

$$\left| \frac{V_h - V_h^*}{V_h} \right| = 0{,}000005$$

(cu valoarea exactă pentru $V_h = 677771{,}5$ mm^3) s-a obținut pentru un $\Delta = 0{,}5$ mm respectiv 0,0008242 din valoarea lui P_i.

În figura 5 sînt prezentate cele două profile de deformare natural, calculat din (2) și liniarizat după modelul din figura 4 și eforturile din cele două membrane după (17).

ANEXĂ

Integrarea ecuației

$$V = 2\pi \int wx \, dx \tag{27}$$

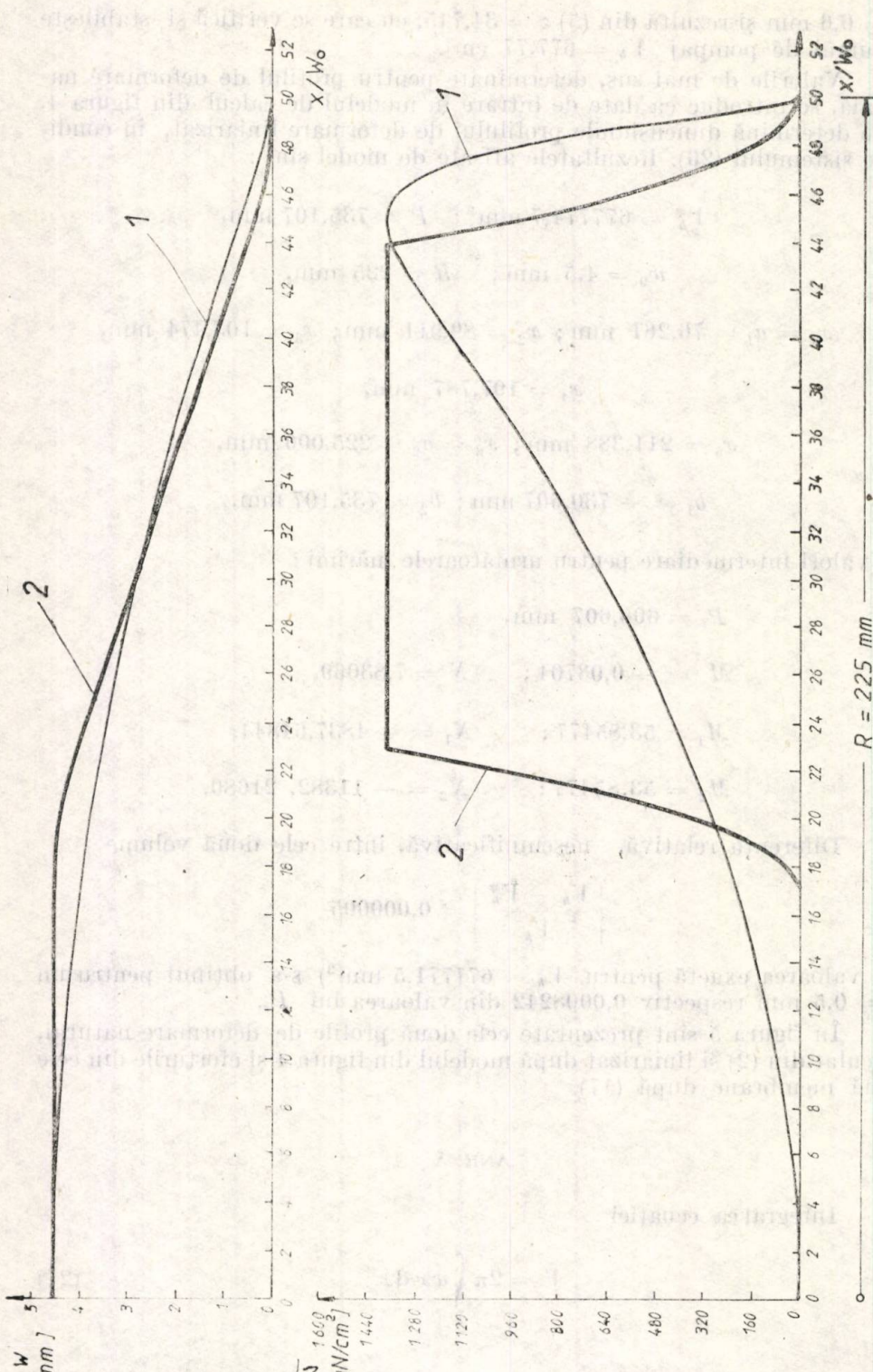


Fig. 5. — Diagrama de deformare $w = f(x)$ și a eforturilui din membrană $\sigma = f(x)$, pentru profilul de deformare naturală (1) și profilul de deformare liniarizat (2).

se face după explicitarea lui w din ecuația

$$P^2 = (x - a)^2 + (w - b)^2 \tag{28}$$

cînd (27) devine

$$V = 2\pi \int [b + \sqrt{P^2 - (x - a)^2}]\, x\, \mathrm{d}x \tag{29}$$

urmînd să se rezolve integrala [4]

$$I = \int x \sqrt{P^2 (x - a)^2}\, \mathrm{d}x \tag{30}$$

care se scrie

$$I = \int \frac{P^2 - (x - a)^2}{\sqrt{P^2 - (x - a)^2}}\, x\, \mathrm{d}x \tag{31}$$

și care se poate pune sub forma

$$I = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{P^2 - (x - a)^2} + D \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P^2 - (x - a)^2}}. \tag{32}$$

Prin egalarea expresiilor (31) cu (32) se identifică coeficienții și se obține sistemul

$$\begin{aligned} -3A &= 1, \\ -2B + 5Aa &= 2a, \\ 3aB + 2AP^2 - 2Aa^2 - C &= P^2 - a^2, \\ BP^2 - Ba^2 + Ca + D &= 0, \end{aligned} \tag{33}$$

din care rezultă

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{a}{6}, \quad C = -\frac{a^2 + 2P^2}{6}, \quad D = \frac{a P^2}{2}. \tag{34}$$

Primit în redacție la 28 septembrie, 1988

BIBLIOGRAFIE

1. S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, 1940.
2. M. PECULEA, *Studiul și determinarea principiilor de proiectare ale compresoarelor și pompelor cu membrane metalice*, St. cerc. mec. apl., Anul XII, 3 (1961), pag. 681—091.
3. M. PECULEA, *Metodă aproximativă pentru determinarea efortului în membranele metalice ale compresoarelor*, Revista de Chimie, **26**, 3 (1975).
4. B. și A. DEMIDOVITCH, *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique* Mir, Moscova, 1974.

ASUPRA CURGERII LICHIDELOR CALDE PRIN CONDUCTE

de T. OROVEANU

Institutul de Petrol și Gaze
Ploiești

I. SPULBER

Institutul Politehnic
București

Se consideră problema consumului de energie la transportul prin conducte al lichidelor încălzite în prealabil. Sînt stabilite condițiile în care consumul de energie în cazul transportului la cald nu depășește pe acela corespunzător transportului izotermic, la temperatura pe care a avut-o lichidul înainte de încălzire.

1. INTRODUCERE

În general, atunci cînd se proiectează o conductă pentru transportul unui lichid, de obicei petrol brut sau un produs petrolier, se caută să se optimizeze valorile unor parametri constructivi și funcționali ai acesteia, în vederea asigurării unei eficiențe maxime, respectiv al unui cost cît mai redus al transportului.

În cadrul acestor calcule, energia consumată pentru transportul lichidului prezintă o importanță deosebită deoarece este determinantă pentru valoarea cheltuielilor de exploatare a conductei. La rîndul ei, această energie depinde de presiunea necesară pentru pompare și prin urmare aceasta din urmă nu trebuie să aibă valori prea ridicate.

Pe de altă parte însă, în cazul transportului unor lichide cu viscozitate mare, se ajunge la presiuni de pompare mari. Ca urmare se recurge la unele procedee de micșorare a viscozității, dintre care cel mai cunoscut este transportul la cald.

Încălzirea prealabilă a lichidului transportat reprezintă însă un consum suplimentar de energie. Pentru a se realiza o exploatare rațională a conductei este deci necesar să se aleagă varianta care conduce la cel mai mic consum de energie pentru transportul lichidului.

În cele ce urmează, ne propunem să studiem această problemă și anume să considerăm o conductă cu diametrul interior și lungimea cunoscute, prin care se transportă un lichid cu caracteristici date. În aceste condiții, urmează să stabilim care este varianta de transport care conduce la cel mai mic consum de energie.

2. EXPRESIA PUTERII NECESARE PENTRU TRANSPORT

Pentru un element de lungime $\mathrm{d}x$ al unei conducte, transportul cu un debit Q necesită o cădere de presiune $\mathrm{d}p$; prin urmare, consumul de energie necesară pentru transport, raportată la unitatea de timp (puterea) este

$$\mathrm{d}P = -Q\,\mathrm{d}p - \rho Q\, c\,\mathrm{d}T, \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 4, 1989, P. 411—417

dacă presupunem că se produce și o scădere $\mathrm{d}T$ a temperaturii. În formula precedentă, ρ reprezintă masa specifică a lichidului, iar c căldura specifică masică a acestuia.

Pe de altă parte, avem însă [1]

$$\mathrm{d}p = -\rho\, g(i\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) \tag{2}$$

g fiind accelerația gravitațională, i—panta hidraulică a conductei și $\mathrm{d}z$—diferența de nivel elementară. Formula (1) devine deci

$$\mathrm{d}P = \rho Q\, g(i\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) - \rho\, Qc\mathrm{d}\,T \tag{3}$$

și după integrarea între secțiunea de intrare în conductă ($x = 0$), unde temperatura lichidului este T_1 și secțiunea de ieșire ($x = l$) unde temperatura este T_2, rezultă

$$P = \rho Qg\int_0^l i\mathrm{d}x + \rho Qg(z_2 - z_1) + \rho Q\int_{T_2}^{T_1} c\mathrm{d}\,T, \tag{4}$$

z_1 și z_2 fiind, respectiv, cotele centrelor secțiunilor de intrare și de ieșire din conductă. La integrare, am ținut seama de faptul că debitul masic ρQ este constant, chiar dacă temperatura variază, în timp ce panta hidraulică

$$i = \frac{8Q^2\lambda}{\pi^2 g\, d^5} \tag{5}$$

este o funcție de temperatură.

În expresia (5) a pantei hidraulice, d reprezintă diametrul interior al conductei, iar λ este coeficientul de rezistență. Se observă că panta hidraulică depinde de temperatură atît prin intermediul acestui coeficient, cît și datorită faptului că debitul este, la rîndul său, funcție de temperatură.

De asemenea, în scrierea expresiei (4) a puterii necesare pentru transport am ținut seama și de faptul că, într-un calcul mai riguros, căldura specifică masică c trebuie considerată ca funcție de temperatură.

Mai menționăm și faptul că expresia (4) este utilizabilă atunci cînd în lungul conductei temperatura are o variație apreciabilă.

Acesta este de altfel cazul de care ne vom ocupa în continuare, lichidul transportat prin conductă fiind supus unei încălziri prealabile.

3. CAZUL TRANSPORTULUI LA CALD

Atunci cînd prin conductă se transportă petrol brut cu viscozitate mare, produse foarte vîscoase sau petrol brut congelabil, se poate recurge la încălzirea prealabilă pentru a se reduce căderea de presiune sau pentru a se evita congelarea.

Dacă presupunem că lichidul ce urmează a fi transportat prin conductă are, înainte de încălzire, temperatura $T_0 < T_2$ expresia (4) a puterii se scrie

$$P = \rho Qg \int_0^l i \, dx + \rho Qg(z_2 - z_1) + \rho Q \int_{T_0}^{T_1} c \, dT. \tag{6}$$

În cazul transportului izotermic, acesta se efectuează la temperatura T_0, iar panta hidraulică are valoarea constantă i_0. Din formula precedentă, obținem, în acest caz,

$$P_0 = \rho Qg \, i_0 l + \rho Qg(z_2 - z_1) \tag{7}$$

și pentru a se evita un consum suplimentar de energie în cazul transportului la cald, trebuie îndeplinită condiția $P \leqslant P_0$ care se mai scrie

$$i_0 l - \int_0^l i \, dx \geqslant \frac{1}{g} \int_{T_0}^{T_1} c \, dT \tag{8}$$

sau, dacă admitem pentru căldura specifică masică o valoare medie constantă

$$i_0 l - \int_0^l i \, dx \geqslant \frac{c}{g} (T_1 - T_0). \tag{9}$$

Această aproximație este bine justificată deoarece intervalul de temperaturi $[T_0, T_1]$ este, în general, destul de mic și anume de cîteva zeci de grade.

În cazul în care inegalitatea (8) sau (9) este respectată, eficiența economică a transportului la cald este asigurată și din acest punct de vedere.

Dacă utilizăm expresia (5) a pantei hidraulice și efectuăm unele calcule simple, obținem, în loc de (9)

$$l - \int_0^l \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_0} \, dx \geqslant \frac{\pi^2 c d^5}{8 Q_0^2 \lambda_0} (T_1 - T_0), \tag{10}$$

ρ_0, λ_0 și Q_0 fiind masa specifică, respectiv coeficientul de rezistență și debitul, corespunzător transportului izotermic la temperatura T_0. Pentru a ajunge la acest rezultat, am ținut seama de faptul că debitul masic este constant ($\rho_0 Q_0 = \rho Q$).

Deoarece ρ și λ sînt funcții de temperatură, recurgem la relația [1]

$$dx = -\frac{\rho Qc}{\pi kd} \frac{dT}{T - T_s}, \tag{11}$$

în care k este coeficientul global de transfer de căldură de la lichid la mediul în care se află conducta și T_s temperatura acestui mediu. După înlocuirea în (10) rezultă

$$l - \frac{\rho Qc}{\pi kd}\int_{T_2}^{T_1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{\mathrm{d}T}{T - T_s} \geqslant \frac{\pi^2 cd^5}{8Q_0^2\lambda_0}(T_1 - T_0) \tag{12}$$

îdacă acceptăm și pentru k o valoare medie constantă, intervalul de temperaturi $[T_2, T_1]$ fiind, așa cum am amintit mai înainte pentru intervalul $[T_0, T_1]$, relativ mic din motive de ordin practic.

Din (10) se observă imediat că, în cazul regimului turbulent în conducte rugoase această inegalitate nu poate fi respectată deoarece coeficientul de rezistență este independent de temperatură ($\lambda = \lambda_0$) și prin urmare

$$\int_0^l \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \mathrm{d}x > l, \tag{13}$$

masa specifică scăzînd atunci cînd temperatura crește ($\rho_0 > \rho$).

Acest rezultat era de așteptat deoarece în regim turbulent în conducte rugoase panta hidraulică este independentă de temperatură și ca urmare încălzirea lichidului nu conduce la scăderea pierderii de presiune Bine înțeles, această observație este valabilă numai atunci cînd transportul izotermic se realizează tot în regim turbulent în conducte rugoase.

Din cauza scăderii temperaturii, viscozitatea lichidului crește în lungul conductei și prin urmare numărul lui Reynolds este variabil și anume descrescător. Din acest motiv, se poate întîmpla ca regimul de curgere să se schimbe. Astfel, dacă regimul rămîne turbulent pe toată lungimea conductei, se poate trece de la un domeniu la altul; de asemenea, este posibil ca regimul să treacă din turbulent în laminar.

Temperatura T_t la care se produce o tranziție de felul celor semnalate se poate determina dacă utilizăm legea de variație a temperaturii lichidului în lungul conductei, cunoscută din literatura de specialitate[1] și calculăm apoi valorile numărului lui Reynolds la diferite temperaturi. Odată determinată valoarea T_t a temperaturii, formula (12) devine

$$l - \frac{\rho Qc}{\pi kd}\left[\int_{T_t}^{T_1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{\mathrm{d}T}{T - T_s} + \int_{T_2}^{T_t}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{\lambda'}{\lambda_0}\frac{\mathrm{d}T}{T - T_s}\right] \geqslant \frac{\pi^2 cd^5}{8Q_0^2\lambda_0}(T_1 - T_0), \tag{14}$$

λ' fiind coeficientul de rezistență care corespunde noului regim.

3.1. *Cîteva cazuri particulare.* Pentru curgerea laminară, curgerea turbulentă în conducte hidraulic netede cu numărul lui Reynolds $Re < 10^5$ și pentru curgerea turbulentă în conducte rugoase, coeficientul de rezistență λ se poate scrie sub forma [1]

$$\lambda = \frac{A}{Re^m} \tag{15}$$

formulă în care $m = 1$ și $A = 64$ pentru regimul laminar (formula lui Stokes), $m = 0{,}25$ și $A = 0{,}3164$ pentru regimul turbulent în conducte hidraulic netede cu $Re < 10^5$ (formula lui Blasius) și $m = 0$, respectiv $A = \lambda$ pentru regimul turbulent în conducte rugoase (formula lui Nikuradse).

În oricare din aceste situații, avem

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{Q_0}{Q}\right)^m \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^m = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^m \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^m, \tag{16}$$

unde, pe lîngă notațiile cunoscute, ν reprezintă viscozitatea cinematică a lichidului, iar ν_0 este valoarea acesteia la temperatura T_0. Prin urmare, formula (12) devine

$$l - \frac{\rho Qc}{\pi k d} \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2-m} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^m \frac{\mathrm{d}T}{T - T_s} \geqslant \frac{\pi^2 c d^{5-m}}{8\alpha Q_0^{2-m} \nu_0^m} (T_1 - T_0), \tag{17}$$

unde

$$\alpha = A\left(\frac{\pi}{4}\right)^m \tag{18}$$

așa cum se poate constata cu ușurință.

Precizăm însă că formula (17) este valabilă numai dacă regimul de curgere din conductă nu suferă o schimbare în sensul precizat mai înainte și este același cu regimul corespunzător temperaturii T_0. În cele ce urmează, considerăm numai cazul în care regimul de curgere din conductă, corespunzător intervalului de temperaturi $[T_2, T_1]$ nu se schimbă pe parcurs, dar este diferit de regimul care corespunde temperaturii T_0. Notînd cu m, respectiv cu m_0 valorile exponentului din formula (15), pentru situațiile precizate, găsim cu ușurință, în loc de (17),

$$l - \frac{\alpha}{\alpha_0}\left(\frac{\rho Q}{d}\right)^{1+m_0-m} \frac{c}{\pi k} \int_{T_2}^{T_1} \frac{\rho_0^{2-m_0}}{\rho^{2-m}} \frac{\nu^m}{\nu_0^{m_0}} \frac{\mathrm{d}T}{T - T_s} \geqslant \frac{\pi^2 c d^{5-m_0}}{8\alpha_0 Q_0^{2-m_0} \nu_0^{m_0}} (T_1 - T_0) \tag{19}$$

cu

$$\alpha_0 = A_0\left(\frac{\pi}{4}\right)^{m_0}. \tag{20}$$

Pentru $m_0 = m$, această inegalitate se reduce la (17).

Putem scrie, de asemenea, o formulă corespunzătoare cu (14) dar nu credem că este necesar.

În anexă, dăm cîteva formule cunoscute din literatura de specialitate [1], necesare pentru efectuarea calculelor numerice în aplicații.

4. CONCLUZII

Din considerațiile precedente asupra transportului la cald al lichidelor prin conducte, rezultă că un consum suplimentar de energie,

față de transportul izotermic, se poate evita numai dacă este satisfăcută inegalitatea (9), respectiv (12) sau (14). În general este dificil și în anumite situații chiar imposibil ca această inegalitate să fie respectată, dar studiul întreprins permite să se stabilească în ce condiții transportul la cald nu conduce la un consum suplimentar de energie exagerat.

ANEXĂ

Variația cu temperatura masei specifice a petrolului brut sau a produselor petroliere rezultă din formula

$$\rho = \rho_{293,15} - \xi(T - 293,15), \tag{A.1}$$

în care

$$\xi = 1,825 - 0,001315\rho_{293,15}, \tag{A.2}$$

iar $\rho_{293,15}$ este masa specifică la temperatura 293,15 K determinată experimental.

Viscozitatea cinematică în funcție de temperatură se poate determina cu ajutorul formulei

$$\lg \lg (10^{-6} \nu + 0,8) = A + B \lg T, \tag{A.3}$$

în care A și B sînt două constante ale căror valori rezultă dacă sînt cunoscute viscozitățile cinematice la două temperaturi diferite.

Coeficientul global de transfer de căldură are expresia

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{2\lambda_i} \ln \frac{D_i}{D_{i-1}} + \frac{d}{\alpha_2 D_n} \tag{A.4}$$

în care α_1 este coeficientul de transfer de căldură de la lichid la peretele interior al conductei, λ_i—conductivitatea termică a stratului cilindric i (stratul interior de protecție, metalul conductei, izolația exterioară), d—diametrul interior al conductei, D_i—diametrul exterior al stratului i, $D_0 = d$, α_2—coeficientul de transfer de căldură de la suprafața exterioară a conductei la mediul înconjurător și D_n—diametrul exterior al conductei.

După datele indicate de diferiți autori, coeficientul k are valori cuprinse între 0,06978 kJ/m²sK și 0,20934 kJ/m²sK. Este preferabil să se utilizeze însă formula (A.4) în care pentru calculul lui α_1, recomandăm formula lui Sieder și Tate, iar pentru calculul lui α_2 formula lui Forchheimer.

Menționăm că formulele (A.1) și (A.3) sînt scrise de asemenea pentru calculul în SI.

Legea de variație a temperaturii în lungul conductei rezultă din formula

$$x = \int_{T}^{T_1} \frac{1}{a} \frac{dT}{T - T_s}, \tag{A.5}$$

în care

$$a = \frac{\pi kd}{\rho Qc}. \tag{A.6}$$

Dacă se consideră, așa cum de fapt am procedat, valori constante pentru k și c, din (A.5) rezultă

$$T = T_s + (T_1 - T_s)\, e^{-ax}, \tag{A.7}$$

formulă care se poate utiliza cu ușurință.

Primit în redacție la 22 martie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, AL. STAN, V. TALLE, *Transportul petrolului*. Edit. Tehnică, București, 1985, p. 11, 13, 51, 106, 107, 120.

MŰSZAKI EGYETEM 1956 BUDAPEST

ASUPRA PERFORMANȚELOR ACUSTICE ALE AVIONULUI ROMBAC 1—11—560 ȘI COMPATIBILIZĂRII ACESTORA CU CERINȚELE CAPITOLULUI 3 DIN ANEXA 16—ICAO

de CONSTANTIN TEODORESCU

În lucrare se analizează caracteristicile acustice ale avionului ROMBAC 1—11 în contextul general al restricțiilor impuse de noile standarde internaționale de zgomot și se evidențiază posibilitatea menținerii în serviciu pe liniile externe, chiar în acest context, a avionului cu actuala configurație pentru o perioadă de încă 15—20 ani. În ultima parte a lucrării se fundamentează soluțiile de compatibilizare a avionului cu cerințele Capitolului 3 din Anexa 16 adoptată de Organizația Internațională a Aviației Civile (ICAO) și se precizează condițiile în care s-ar justifica o eventuală remotorizare a avionului.

1. INTRODUCERE

Avionul cu reacție subsonic de pasageri ROMBAC 1—11 (fig. 1) este fabricat de Centrul Național al Industriei Aeronautice Române — CNIAR — la Întreprinderea de Avioane București, începînd din anul 1980, sub licență British Aerospace, în două variante constructive : 560 și 487. Avionul este echipat cu două motoare turboreactoare cu dublu flux Spey 512—14 DW fabricate, de asemenea de CNIAR, la Întreprinderea Turbomecanica București, sub licență Rolls-Royce.

Firma British Aerospace a omologat prototipul avionului în anul 1968, după care l-a fabricat în cinci versiuni comerciale (serii) pînă la mijlocul anului 1981, în uzinele de la Weybridge, Filton și Hurn, totalizînd 230 exemplare, din care 56 — seria 200, 9 — seria 300, 69 — seria 400, 9 — seria 475 și 87 — seria 500; transferul de licență s-a efectuat în exclusivitate pentru România avînd ca obiect seriile 500 și 475, care au primit denumirile românești ROMBAC 1—11—560 și respectiv ROMBAC 1—11—487.

Prin particularitățile sale constructive, caracteristicile tehnico-funcționale și calitățile de zbor, avionul ROMBAC 1—11—560 se înscrie în clasa avioanelor scurt-mediu curier cu capacitatea de 100—120 pasageri, fiind plasat, din punct de vedere al potențialului de dezvoltare, în categoria avioanelor cu cele mai interesante perspective.

Printre aeronavele reprezentative aparținînd clasei avionului ROMBAC 1—11—560 și aceleiași generații, care operează în prezent pe diverse linii aeriene externe sau interne se numără avioanele Fokker 28 (F—28), Golfstream II (G II) și Golfstream III (G III), Boeing 727 (B 727) Boeing 737—200 (B 737—200), DC—9, Tupolev 134 (Tu—134) și Tupolev 154 (Tu —154). Toate aceste aeronave au performanțe acustice inferioare celor ale avionului ROMBAC 1—11—560 care, așa cum se va vedea mai departe, se încadrează perfect în standardele internaționale impuse de Capitolul 2 al Anexei 16 ICAO [1].

Aeronavele din generația nouă Fokker 100 (F—100), BAe—146, B—737—500 și YAK—42 (tab. 1), recent certificate sau în curs de certificare acustică conform Capitolului 3 Anexa 16 ICAO, constituie princi-

Tabelul 1

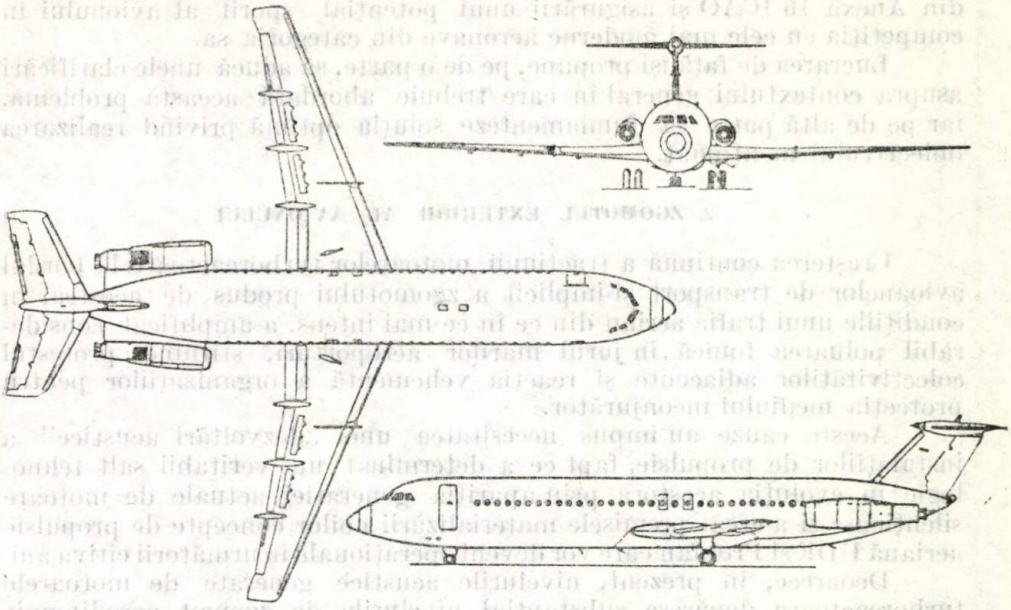
Caracteristicile principale ale unor avioane din clasa ROMBAC 1—11

TIPUL AVIONULUI		ROMBAC 1—11 560	FOKKER 100	YAK 42	BAe 146—200	BOEING 737—500
Numărul de pasageri	(NR)	109	107	120	82	122
Distanța între scaune	(INCH)	30	32	31.9	32	32
Masa maximă la decolare	(kg)	45201	47175	53500	40590	52390
Masa maximă la aterizare	(kg)	39463	39917	50000	35150	49890
Masa maximă fără combustibil	(kg)	36742	36742	46500	32200	46490
Masa de operare gol	(kg)	25267	24935	32500	23350	30858
Cantitatea max. de combustibil	(kg)	11278	13155	18500	9375	16060
Dimensiuni principale						
Anvergura aripii	(m)	32,61	28,08	34,30	26,34	30,94
Lungimea totală	(m)	29,67	35,31	36,38	28,60	33,06
Înălțimea totală	(m)	7,47	8,50	9,80	8,61	11,12
Volumul cargo	(m^3)	19,44	17,06	26,20	18,30	23,30
Viteza economică de croazieră	(km/h)	790	780	750	706	776
Motoare		SPEY MK 512—14	TAY MK 650—15	D—36 LOTAREV	ALF 502 R—5	CFM 56—3B1
Tracțiunea max. la decolare	(kgf)	2×5693	2×6150	3×6500	4×3162	2×8392

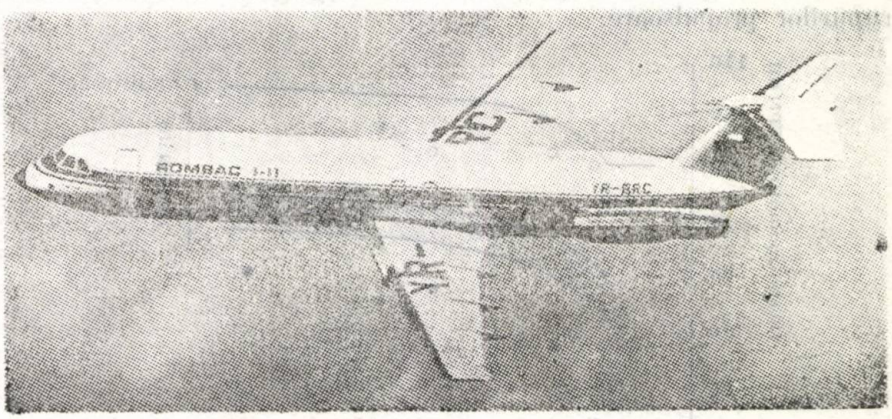
Tabelul 2

Caracteristicile principale ale motoarelor care echipează unele avioane din clasa ROMBAC 1—11

TIPUL MOTORULUI		SPEY MK—512—14 DW	TAY MK 650—14	TAY MK 670—14	D—36 LOTAREV	ALF 502 R 5	CFM 56—3—B1
Fabricantul		*Turbomecanica* ROLLS—ROYCE	ROLLS—ROYCE	ROLLS—ROYCE	LOTAREV (U.R.S.S.)	AVCO—LYCOMING	CFM—Internațional
Tracțiunea la decolare (ISA)	(kgf)	5.693	6.850	8.165	6.500	3.162	8.392
Gradul de diluție		0,64	3,09	2,90	5,60	6,00	5,10
Gradul total de comprimare		21,0	16,4	20,1	20,0	—	22,60
Debitul de aer	(kg/s)	94,35	192,7	220,9	219,0	—	296,0
Condiții (ISA) de croazieră		H 9750 m M 0,75	H 10668 m M 0,8	H 10668 m M 0,8	H 8000 m M 0,75	H 9145 m M 0,75	H 9145 m M 0,8
Tracțiune	(kgf)	1.660	1.853	1.960	1.600	855	2.097
Consum specific de combustibil	(kg/kgf, h)	0,8140	0,707	0,696	0,65	0,411	0,70
Dimensiuni și mase							
Diametru	(mm)	825	1.143	1.245	1.480	1.059	1.524
Lungime	(mm)	2.784	2.407	2.844	3.470	1.487	2.366
Masa motorului de bază	(kg)	1.168	1.587	1.701	1.100	589	1.923



a



b

Fig. 1. — Vederile laterală, frontală și de sus ale avionului ROMBAC 1—11 seria 560.

palii concurenți ai avionului ROMBAC 1—11—560 din punctul de vedere al performanțelor acustice, deoarece motoarele acestora, avînd grade de diluție mai mari decît al motorului Spey 512-14 Dw (tab. 2), produc, cu prețul unei anumite penalizări a vitezei de zbor (avioanele respective realizează viteze de croazieră inferioare celei a avionului ROMBAC 1—11—560), niveluri de zgomot ceva mai reduse.

Aceste considerente, asociate cu avantajul unor calități constructive încă neegalate ale structurii avionului ROMBAC, au generat oportunitatea unei opțiuni privind căile și metodele de ridicare în continuare a standardului său acustic, în vederea satisfacerii cerințelor Capitolului 3

din Anexa 16 ICAO și asigurării unui potențial sporit al avionului în competiția cu cele mai moderne aeronave din categoria sa.

Lucrarea de față își propune, pe de o parte, să aducă unele clarificări asupra contextului general în care trebuie abordată această problemă, iar pe de altă parte să fundamenteze soluția optimă privind realizarea obiectivului menționat.

2. ZGOMOTUL EXTERIOR AL AVIONULUI

Creșterea continuă a tracțiunii motoarelor turboreactoare la bordul avioanelor de transport și implicit a zgomotului produs de acestea, în condițiile unui trafic aerian din ce în ce mai intens, a amplificat considerabil poluarea fonică în jurul marilor aeroporturi, stîrnind protestul colectivităților adiacente și reacția vehementă a organizațiilor pentru protecția mediului înconjurător.

Aceste cauze au impus necesitatea unei „dezvoltări acustice" a instalațiilor de propulsie, fapt ce a determinat un veritabil salt tehnologic în evoluția acestora prin apariția generației actuale de motoare silențioase și a creat premisele materializării noilor concepte de propulsie aeriană UDF și Propfan care vor deveni operaționale în următorii cîțiva ani.

Deoarece, în prezent, nivelurile acustice generate de motoarele turboreactoare depășesc substanțial nivelurile de zgomot aerodinamic al structurii, zgomotul aeronavelor este în general confundat cu cel al grupurilor propulsoare.

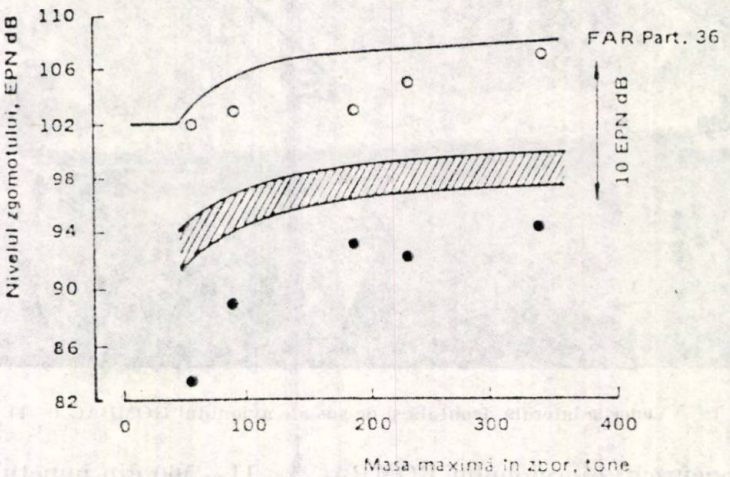


Fig. 2. — Zgomotul produs de un avion obișnuit la aterizare: O, nivel certificat; ●, nivel prezis pentru structura „curată"; |||, nivel măsurat la aterizare cu motoarele oprite.

Zgomotul aerodinamic nepropulsiv, cunoscut sub denumirile de „*zgomot de structură*" sau „*zgomotul planorului*", este mascat de zgomotul turboreactoarelor, dar se crede că, odată cu apariția noilor generații de motoare silențioase, el va deveni dominant pe panta de aterizare în timpul apropierii avionului de aeroport. Nivelul zgomotului de structură la aterizare pentru actualele avioane de transport se situează în jurul

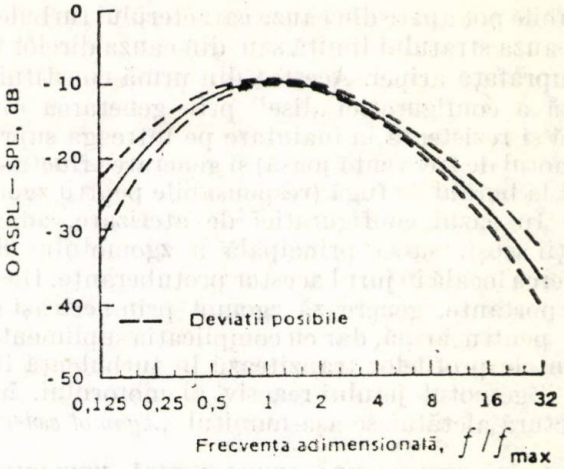


Fig. 3. — Spectrul adimensional al zgomotului de structură.

valorii de 100 EPN dB (fig. 2), iar spectrul acestuia poate fi estimat cu ajutorul diagramei din figura 3 propusă de Healy [2]. Tot Healy sugerează că frecvența predominantă a zgomotului de structură poate fi determinată cu ajutorul relației de tip Strouhal

$$f_{max} = 1{,}3 \frac{V}{e}$$

în care V reprezintă viteza avionului iar e-grosimea profilului aripii în secțiunea în care coarda este egală cu coarda medie aerodinamică.

Principalele surse individuale de zgomot care se combină pentru a produce zgomotul total de structură al unui avion la aterizare sînt stratul limită turbulent, curgerea în jurul trenului de aterizare și a trapelor

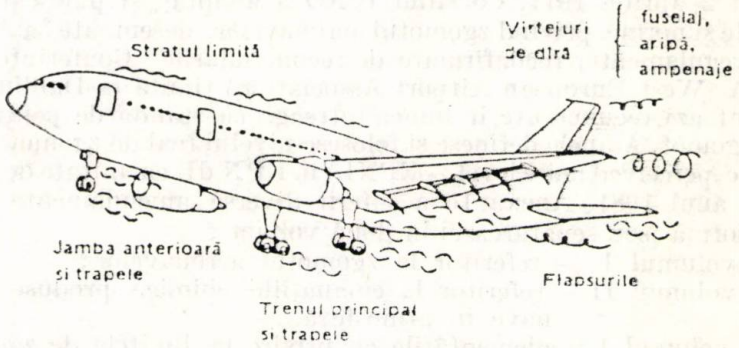


Fig. 4. — Sursele zgomotului de structură.

nișei acestuia, curgerea în jurul flapsurilor și voleților, precum și zonele turbionare asociate cu suprafețele portante și fuzelajul (fig. 4). Intensitatea acestui zgomot, fiind deci puternic corelată cu detaliile curgerii locale, ea depinde în mare măsură de configurația avionului.

În cazul „configurației lise" sau „curate" din punct de vedere aerodinamic, adică cu flapsurile și trenul escamotate, zgomotul de structură dominant este cel asociat cu fluctuațiile forțelor de portanță și de rezistență la înaintare pe suprafețele portante. Astfel de forțe aerodinamice,

instabile pot apare din cauza caracterului turbulent al curgerii de ansamblu, din cauza stratului limită sau din cauza dîrelor turbulente în interacțiune cu suprafața aripei. Acestea din urmă constituie sursa de zgomot dominantă a configurației „lise" prin generarea forțelor fluctuante de portanță și rezistență la înaintare pe întreaga suprafață (responsabile pentru zgomotul de frecvență joasă) și generarea fluctuațiilor de presiune de scară mică la bordul de fugă (responsabile pentru zgomotul de frecvență înaltă).

În cazul configurației de aterizare, adică cu trenul, flapsurile și voleții scoși, sursa principală a zgomotului de structură o constituie curgerea locală în jurul acestor protuberanțe. Desigur, flapsurile fiind suprafețe portante, generează zgomot prin aceleași mecanisme ca cele menționate pentru aripă, dar cu complicația suplimentară că dîrele turbulente din amontele profilelor tranzitează în turbulență liberă la bordurile de fugă.

Zgomotul jetului reactiv al motorului, împreună cu zgomotul de structură alctătuiesc așa-numitul *„zgomot exterior"* al avionului.

3. CERTIFICAREA AEROACUSTICĂ. REGLEMENTĂRI. IMPLICAȚII

Problema protecției mediului înconjurător împotriva zgomotului exterior al avioanelor a fost dezbătută în cadrul a numeroase conferințe internaționale, soldate în cele din urmă cu decizia reuniunii finale a Organizației Internaționale pentru Aviația Civilă (ICAO) de la Montreal (25 noiembrie — 17 decembrie 1969), de a se impune limite maxime de zgomot efectiv perceput pentru aproape toate avioanele aflate în stadiu de construcție sau de proiectare la acea vreme. S-a stabilit că pe lîngă certificatul de aeronavigabilitate, aceste aparate să aibă în mod obligatoriu și o certificare acustică.

Tot în anul 1969 S.U.A. a publicat regulamentul inițial pentru certificarea acustică a noilor avioane subsonice FAR Part. 36 [3]. Ulterior, la 2 aprilie 1971, Consiliul ICAO a adoptat și publicat primele standarde și norme privind zgomotul aeronavelor, desemnate ca Anexa 16. Aceste regulamente, reconfirmate de recomandările Conferinței a 28-a a WEAA (West European Airport Association) ținută la Dublin în iunie 1974, sînt azi recunoscute în lumea întreagă ca standarde pentru cerințele de zgomot. Ambele definesc și folosesc nivelul real de zgomot perceput (effective perceived noise level — EPNL) în EPN dB ca unitate de măsură.

În anul 1981, Anexa 16 a suferit diverse amendamente primind o nouă formă prin separarea ei în două volume :

— volumul I — referitor la zgomotul aeronavelor ;
— volumul II — referitor la emanațiile chimice produse de aeronave în atmosferă.

În volumul I, reglementările cu privire la limitele de zgomot admise pentru avioanele aeroreactive subsonice civile sînt prevăzute în următoarele capitole și paragrafe :

Capitolul 2, paragraful 2.4.1. cuprinde standarde de certificare a avioanelor cu reacție subsonice, pentru care au fost emise certificate de aeronavigabilitate, pentru prototip, înainte de 6 octombrie 1977.

Paragraful 2.4.2. se referă la aceleași tipuri de avioane, fabricate în variante care au fost certificate după 26 noiembrie 1981.

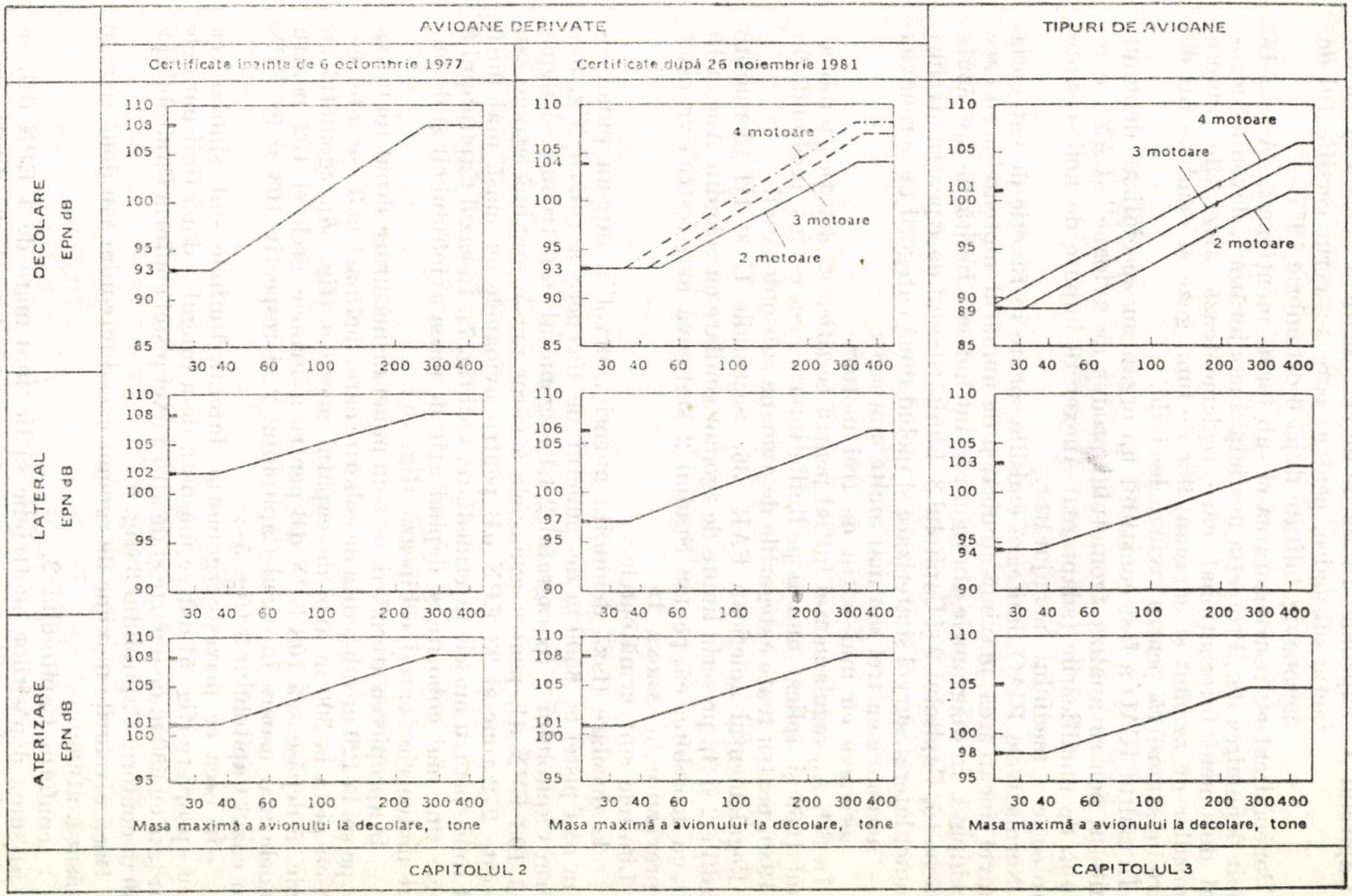


Fig. 5. — Reprezentarea grafică a standardelor de zgomot conform Capitolelor 2 și 3 din Anexa 16 ICAO: cele două coloane din stînga definesc limitele Capitolului 2 ICAO; coloana din dreapta prezintă limitele impuse de Capitolul 3 ICAO în care trebuie să se încadreze noile tipuri de avioane cu reacție subsonice silențioase.

Capitolul 3 cuprinde standarde de certificare a avioanelor cu reacție subsonice, pentru care s-a cerut certificatul de aeronavigabilitate după 6 octombrie 1977.

Concomitent cu restructurarea ei sub forma menționată, Anexa 16 a primit denumirea de „Protecția mediului înconjurător", devenind principalul document internațional care reglementează nivelurile admise ale emisiilor de zgomot și emanațiilor de fum, gaze și combustibil de drenare în atmosferă pentru avioanele civile.

În cadrul ICAO a fost constituit un organism specializat denumit „Comitetul pentru analiza zgomotului produs de avioane" (CAN), care se ocupă de modificările (adaptarea) Anexei 16 impuse de noile cerințe de protecție a mediului înconjurător.

Normativele ICAO limitează emisiile sonore în funcție de categoria aeronavei (încărcarea maximă admisă) și de numărul motoarelor cu care este echipată. În diagramele din figura 5 sînt indicate limitările prevăzute în Anexa 16, Capitolul 2 și Capitolul 3. Limitările sînt date pentru niveluri de zgomot lateral, survol și aterizare și includ două categorii de aeronave :

— aeronave cu trei sau mai multe motoare ;

— aeronave cu mai puțin de trei motoare.

În S.U.A., regulamentul inițial pentru certificarea acustică publicat în anul 1969 și aplicat numai pe liniile interne, s-a extins începînd din anul 1980, pentru toate categoriile de avioane subsonice civile.

Regulamentul american FAR—36, Secțiunile II și III (denumite și Stadiile 2 și 3), prescriu limite de zgomot similare cu cele din Anexa 16 ICAO, cu deosebirea că, pentru Stadiul 2 sînt ceva mai restrictive decît cele prevăzute în Anexa 16.

Limitele sînt următoarele :

— la decolare (fază denumită uneori „survol"), într-un punct situat în axa pistei la 6500 m de punctul de începere a rulării (fig. 6*a*), conform Capitolului 2 (paragraful 2.4.1), zgomotul nu trebuie să depășească 108 EPN dB pentru avioanele a căror masă maximă atinge sau depășește 272 tone și 93 EPN dB pentru avioanele cu masă mai mică de 34 tone (pentru masele intermediare, vezi fig. 7). În cazul Capitolului 3 limitele sînt mai coborîte și depind atît de masa avionului cît și de numărul motoarelor care-l echipează (fig. 8) ;

— la apropierea aterizării, într-un punct de măsurare situat tot în axa pistei pe sol la 120 m sub panta de coborîre care, înclinată la 3°, se intersectează cu pista la 300 m aval de capătul acesteia (fig. 6*b*), zgomotul nu trebuie să depășească 108 EPN dB pentru avioanele grele și 102 pentru avioanele mai ușoare în cazul Capitolului 2 și respectiv 103 și 98 EPN dB în cazul Capitolului 3 (fig. 5) ;

— în ceea ce privește zgomotul lateral, limitele sînt similare ca pentru apropiere (fig. 5) dar se măsoară de-a lungul a două linii paralele distanțate cu 650 m de o parte și de alta a axei pistei conform Capitolului 2 și 450 m conform Capitolului 3 (fig. 9).

Dacă nivelurile maxime de zgomot exced într-unul sau două puncte de măsură, atunci :

1. conform Capitolului 2,

a) suma depășirilor nu trebuie să fie mai mare de 4 EPN dB, cu excepția avioanelor echipate cu 4 motoare avînd grade de diluție egale

sau mai mari de 2, ale căror prototipuri au primit certificate de aeronavigabilitate înainte de 1 decembrie 1969, pentru care se admite ca suma depășirilor să nu fie mai mare de 5 EPN dB ;

b) fiecare depășire să fie compensată de o valoare mai redusă corespunzătoare într-un punct sau mai multe puncte ; și

2. conform Capitolului 3,

a) suma depășirilor nu trebuie să fie mai mare de 3 EPN dB ;

b) fiecare depășire într-un singur punct să nu fie mai mare de 2 EPN dB ;

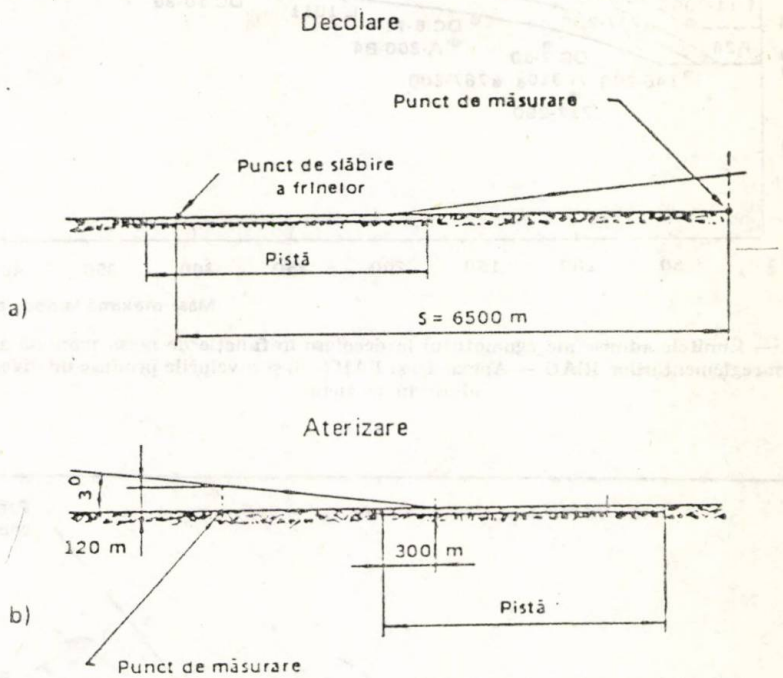


Fig. 6. — Amplasarea punctelor de măsurare a zgomotului

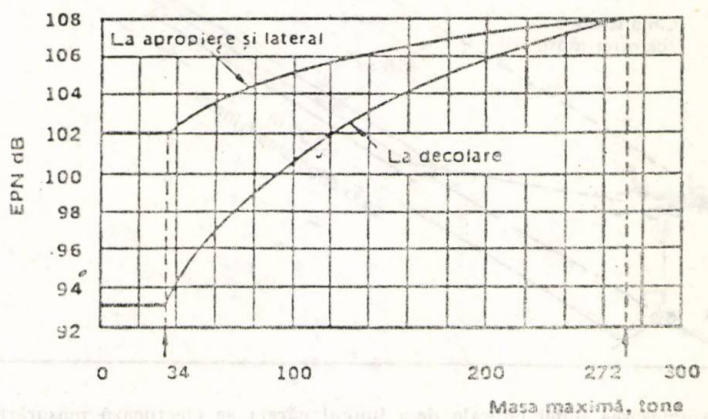


Fig. 7. — Limitele admise ale zgomotului în funcție de masa maximă a avionului, conform Stadiului 2.

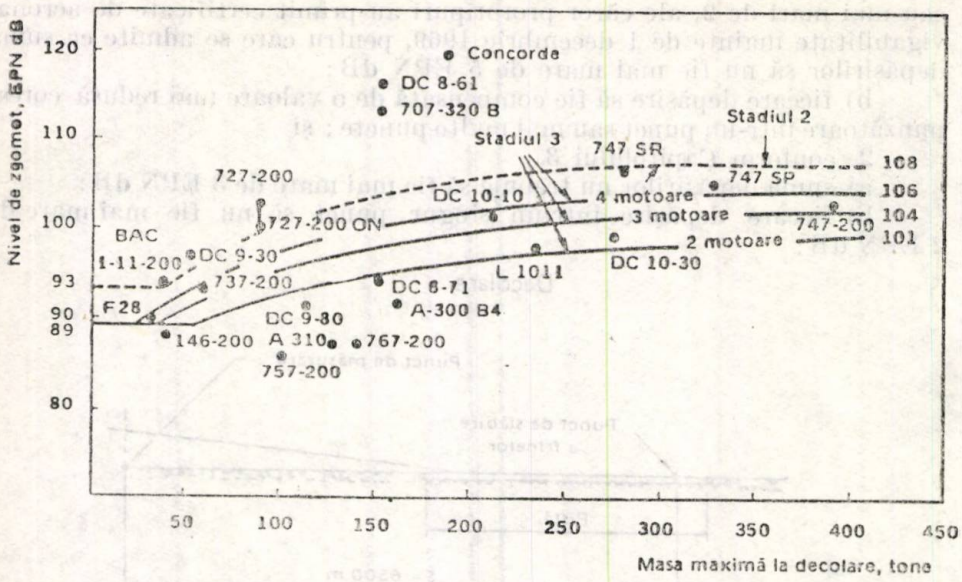


Fig. 8. — Limitele admise ale zgomotului la decolare în funcție de masa maximă a avionului, conform reglementărilor ICAO — Anexa 16 și FAR—36 și nivelurile produse de diverse avioane aflate în serviciu.

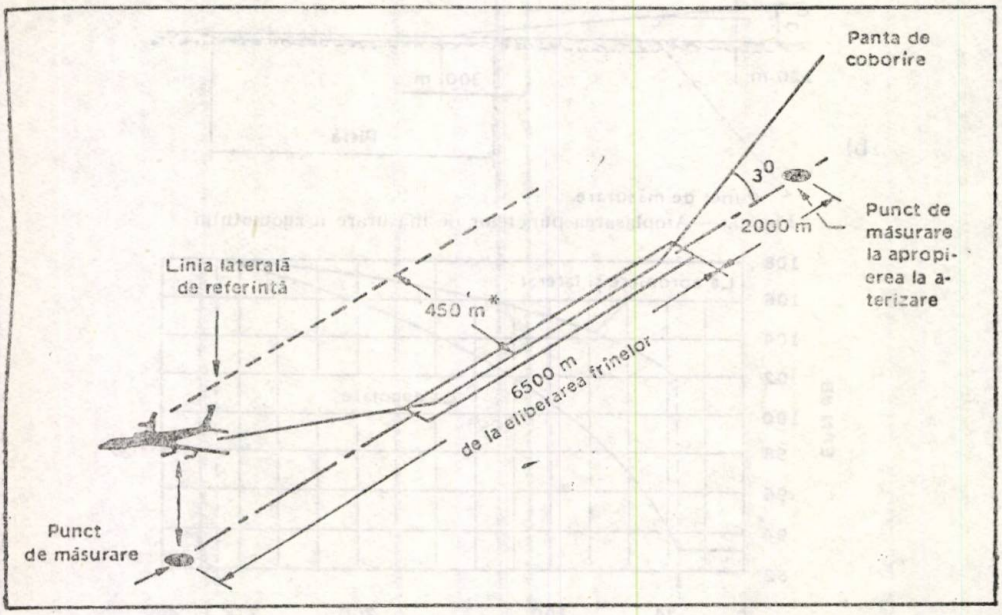


Fig. 9. — Amplasarea liniei laterale de-a lungul căreia se efectuează măsurările de zgomot conform Stadiului 3 *. O distanță laterală de 650 m este permisă pentru derivate ale avioanelor cu reacție mai vechi, conform Stadiului 2.

c) fiecare depășire să fie compensată de o valoare mai redusă corespunzătoare într-un punct sau mai multe puncte.

În U.R.S.S. a fost legiferat în anul 1978 normativul GOST 17228 care limitează zgomotul exterior al avioanelor cu reacție subsonice și al celor cu elice și ulterior au fost elaborate standarde pentru avioanele supersonice și elicoptere. Toate aceste standarde naționale impun limite ale zgomotului aeronavelor identice cu cele prevăzute de reglmentările internaționale ICAO — Anexa 16 și sînt structurate în deplină concordanță cu acestea.

În ICAO se analizează în prezent propunerile privind înăsprirea în continuare a normelor de zgomot pentru generația nouă de avioane cu reacție. Mai mult, ICAO desfășoară o politică orientată spre limitarea fabricației și exploatării avioanelor de tip vechi. Din anul 1976 pentru liniile aeriene internaționale este practic interzisă producția de avioane cu reacție de toate tipurile, care nu îndeplinesc normele impuse de Capitolul 2 Anexa 16, iar din 1989 trebuie întreruptă exploatarea acestor avioane. La ședințele din mai 1983 ale Comitetului pentru analiza zgomotului produs de avioane (CAN) aferent ICAO, s-a dezbătut propunerea privind stabilirea datei întreruperii fabricației și exploatării avioanelor care nu îndeplinesc prevederile Capitolului 3 al standardului ICAO Anexa 16. S-a stabilit, cu această ocazie, ca ICAO să întreprindă un studiu care să evidențieze impactul economic generat de o asemenea interdicție dacă ea s-ar aplica începînd cu anii 1995, 2000 sau 2005. Raportul a fost finalizat la sfîrșitul anului 1988, iar ICAO nu va relua această problemă pînă la următoarea sa consfătuire din 1989. Statele membre ICAO au căzut de acord să nu-și impună propriile interdicții asupra avioanelor care satisfac Capitolul 2 pînă la consfătuirea menționată.

La consfătuirea trianuală care a avut loc în 1988 la Strassbourg, cele 22 state membre ale ECAC (Conferința Europeană de Aviație Civilă) au căzut de acord asupra unei reglementări „de neadăugare", pe care au și adaptat-o în ultima parte a anului. În baza acestei reglementări, statele membre vor refuza adăugarea (înscrierea) în registrul lor aerian a avioanelor cu reacție subsonice civile, după 1 octombrie 1990, dacă acestea nu sînt certificate în conformitate cu Capitolul 3 al volumului I din Anexa 16 ICAO.

La prima vedere, reglementarea „de neadăugare" pare absolut inofensivă deoarece ea nu împiedică operarea avioanelor din Capitolul 2. Dar există o opoziție importantă atît din partea companiilor aeriene cît și a grupurilor financiare din cauza efectului asupra prețurilor de vînzare la mîna doua. La consfătuirea ECAC, IATA (Asociația Internațională de Transport Aerian) a argumentat că o reglementare „de neadăugare" va crește de fapt poluarea produsă de zgomotul avioanelor, deoarece scăderea prețurilor de revînzare va încuraja operatorii să-și păstreze cît mai mult avioanele lor din Capitolul 2.

Oricum, perspectiva introducerii de interdicții privind zborul avioanelor din Capitolul 2, se află la orizont. ECAC a pregătit deja un proiect de regulament în baza căruia toate avioanele care satisfac normele Capitolului 2, mai vechi de 25 de ani, vor fi retrase treptat din serviciu începînd cu data de 1 maritie 1995, acțiunea urmînd a fi încheiată cel mai tîrziu, pînă la 1 martie 2015. Deși această propunere este deocamdată

clasată pînă la publicarea studiului ICAO, ea ne ajută să discernem tendinţele către care este orientată gîndirea actuală a organizaţiilor internaţionale implicate în transportul aerian.

Impactul măsurilor preconizate asupra parcului actual de avioane civile este considerabil, deoarece în prezent pe liniile aeriene internaţionale şi naţionale operează aproximativ 6764 avioane cu reacţie subsonice, care nu se conformează Capitolul 3 din Anexa 16 (Stadiul 3 — FAR 36), din care 4464 sînt construite în S.U.A. şi Europa şi 2300 în Uniunea Sovietică (tab. 3).

Tabelul 3

Avioane din dotarea companiilor aeriene care nu se conformează cerinţelor capitolului 3 din anexa 16 ICAO

Tipul avionului	Mondial	S.U.A. şi Canada	Europa	Asia şi Pacific	Orientul Mijlociu şi Africa	America Latină şi Caraibe
Boeing 707	240	35	26	31	107	41
Boeing 720	14	1	3	—	9	1
Boeing 727—100/200	1678	1234	163	43	76	162
Boeing 737—100/200	1043	498	236	113	122	74
DC—8—20/30/50/60	172	85	24	7	20	36
DC—9—10/20/30/40/50	852	534	232	38	3	45
BAC 1—11	168	38	96	11	13	10
Caravelle	62	—	45	1	13	3
Fokker 28	194	51	46	64	19	14
Mercure	11	—	11	—	—	—
Trident	26	—	—	22	4	—
CV 880/990	4	—	—	—	2	2
Nu se conformează Cap. 3	4464	2476	882	330	388	388
Se conformează Cap. 3	2946	1425	672	551	196	102
Total*) avioane subsonice	7410	3901	1554	881	584	490

*) Cu cele 2300 avioane construite în Uniunea Sovietică totalul se ridică la 9710 avioane cu reacţie subsonice de transport pasageri aflate în serviciu, din care 6764 nu se conformează cerinţelor Capitolului 3 din Anexa 16 ICAO/Stadiului 3 FAR—36.

În afara acestora, mai există în exploatare încă 2946 avioane relativ noi sau modernizate care satisfac exigenţele Capitolului 3. Între acestea sînt incluse şi noile avioane Fokker 100, BAe 146, Boeing 737—500, MD—80, DC—8—70, YAK—42, inclusiv toate avioanele cu fuzelaj larg, dintre care unele ca, de exemplu, Boeing 747 necesită modificări.

După o estimare a specialiştilor Administraţiei Federale a Aviaţiei (FAA) din S.U.A. rezultă că ciclul normal de înlocuire a avioanelor va avea ca efect o reducere constantă a dimensiunii conturului zgomotului de 65 dBA în jurul aeroporturilor. Forţarea ciclului, prin introducerea cerinţei de a realiza un parc integral de avioane din Stadiul 3 pînă în anul 1995 [4] va reduce dintr-o dată conturul zgomotului cu 50% (fig. 10), ceea ce este benefic sub acest aspect, dar cu toul nejustificat din punctul de vedere al costurilor suplimentare şi al faptului că, oricum, pînă în 2010 [5] companiile aeriene vor retrage de bună voie din parcul lor toate

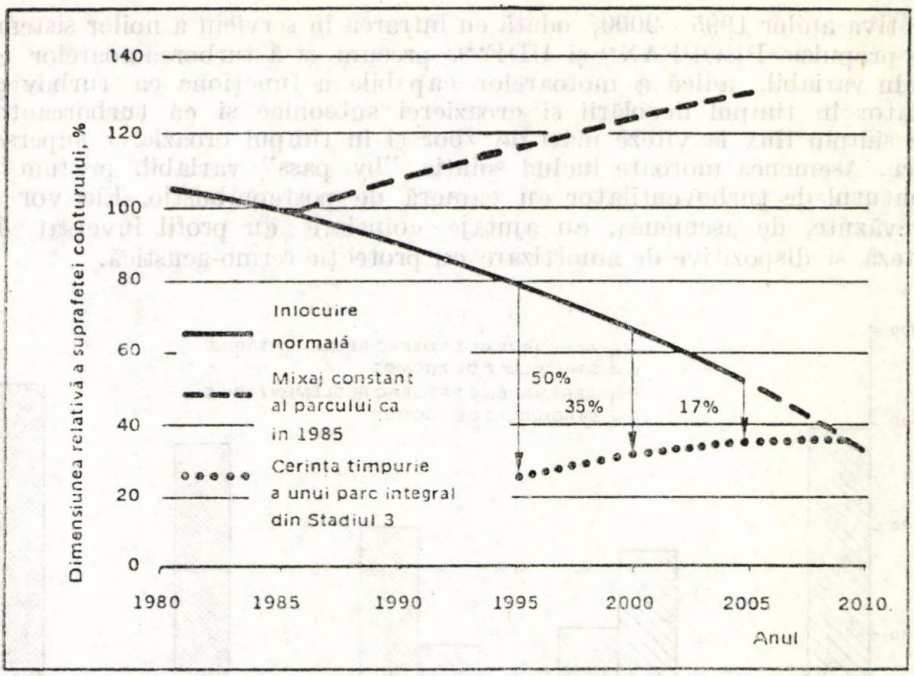


Fig. 10. — Impactul retragerii timpurii a avioanelor din Stadiul 2, asupra dimensiunii relative (%) a suprafeței conturului de 65 dBA în jurul aeroportului (100 % în anul de referință 1985).

avioanele din Stadiul 2 (fig. 11). Se apreciază că costul înlocuirii avioanelor din Stadiul 2 va fi de 78 miliarde dolari numai în Statele Unite și de aproximativ 140 miliarde dolari pe plan mondial.

Prima tentativă de satisfacere a normativelor ICAO și FAR a fost introducerea unor proceduri operaționale noi la decolare și la aterizare, concomitent cu zonarea terenului. Aceste măsuri s-au dovedit a fi însă paliative, ceea ce a impus „reconsiderarea acustică" a turboreactoarelor prin încorporarea în acestea a așa-numitei tehnologii silențioase de propulsie (Quiet Propulsion Technology).

Un prim pas în acest sens l-a constituit echiparea turboreactoarelor cu dispozitive mecanice de amortizare a zgomotului de jet și tratarea acustică a unor zone ale motorului (dispozitivul de intrare, sistemul de evacuare a gazelor etc.) și nacelelor.

Indirect, un alt pas l-a constituit creșterea coeficientului de diluție la motoarele cu dublu flux, procedeu prin care se realizează atît o mai bună economicitate, cît și diminuarea zgomotului de jet. Măsurările au evidențiat că zgomotul acestor motoare se reduce substanțial atunci cînd coeficientul de diluție crește de la 1 la 5. Rata de reducere este apreciabil mai mică pentru o creștere în continuare a acestui coeficient, dar pînă la valoarea de 10 ea rămîne totuși semnificativă.

Principalul salt tehnologic pe calea realizării motoarelor silențioase capabile a satisface integral reglementările Organizației Internaționale a Aviației Civile încă nu s-a produs. El va fi posibil numai în pers-

pectiva anilor 1995—2000, odată cu intrarea în serviciu a noilor sisteme de propulsie PROPFAN*) și UDF**), precum și a turboreactoarelor cu ciclu variabil, adică a motoarelor capabile a funcționa ca turboventilator în timpul decolării și croazierei subsonice și ca turboreactor cu simplu flux la viteze mari de zbor și în timpul croazierei supersonice. Asemenea motoare includ soluția "by pass" variabil, precum și conturul de turboventilator cu cameră de postcombustie. Ele vor fi prevăzute, de asemenea, cu ajutaje coinelare cu profil inversat de viteză și dispozitive de amortizare cu protecție termo-acustică.

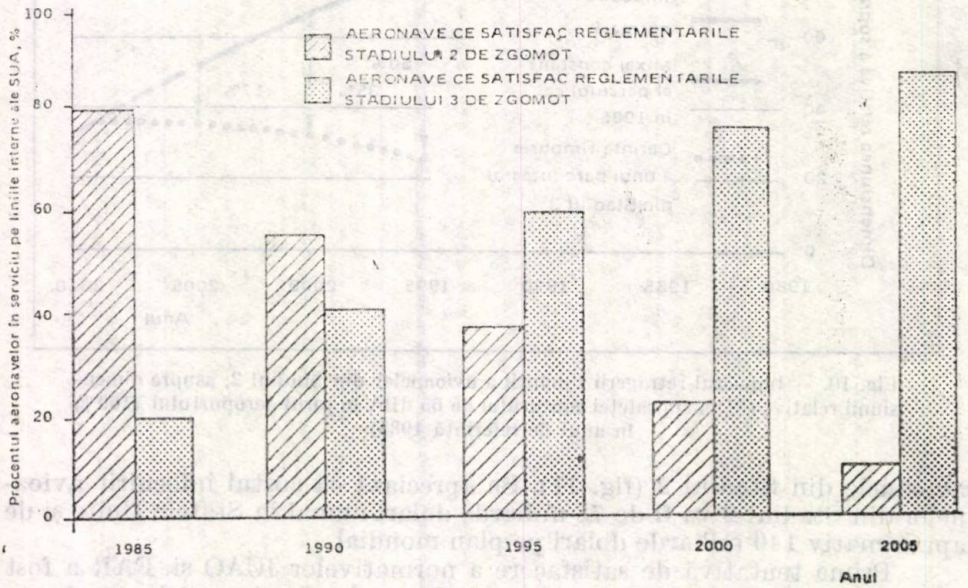


Fig. 11. — Diminuarea numărului avioanelor din Stadiul 2 aflate pe liniile interne ale SUA, prin retragerea lor de bună voie.

4. CARACTERISTICILE ACUSTICE ALE AVIONULUI ROMBAC 1—11—560

Fiind ultima și cea mai evoluată dintre cele cinci variante constructive ale avionului BAC 1—11 realizate de firma British Aerospace, seria 500 încorporează un ansamblu de soluții eficiente de atenuare a zgomotului (hush-kit) aplicate atît motoarelor, cît și unor părți ale structurii.

Astfel, motoarele Spey 512—14 DW instalate pe avionul ROMBAC 1—11 — seria 560 prezintă o dezvoltare acustică inexistentă la motoarele de același tip (fig. 12 și 12 bis), montate pe seriile 200, 300 și 400

*) PROPFAN — propulsie prin elice în săgeată cu randament crescut la viteze mari de zbor, antrenată prin intermediul unui reductor de către un turbomotor.

**) UDF — propulsie prin elice contrarotative în tandem cu randament crescut la viteze mari de zbor, fără reductor, antrenată direct de la treptele turbinei turbomotorului.

ale avionului, care asigură o diminuare importantă a zgomotului și care, în principal, constă din (fig. 12, b):

— un silențiator de jet tip „cascadă" cu 6 jgheaburi de mixaj, avînd și funcțiunea de ajutaj reactiv (fig. 13);

— un nou tub de reacție alungit și integrat (fig. 14), tratat la interior cu o căptușeală fonoabsorbantă realizată din structură fagure de

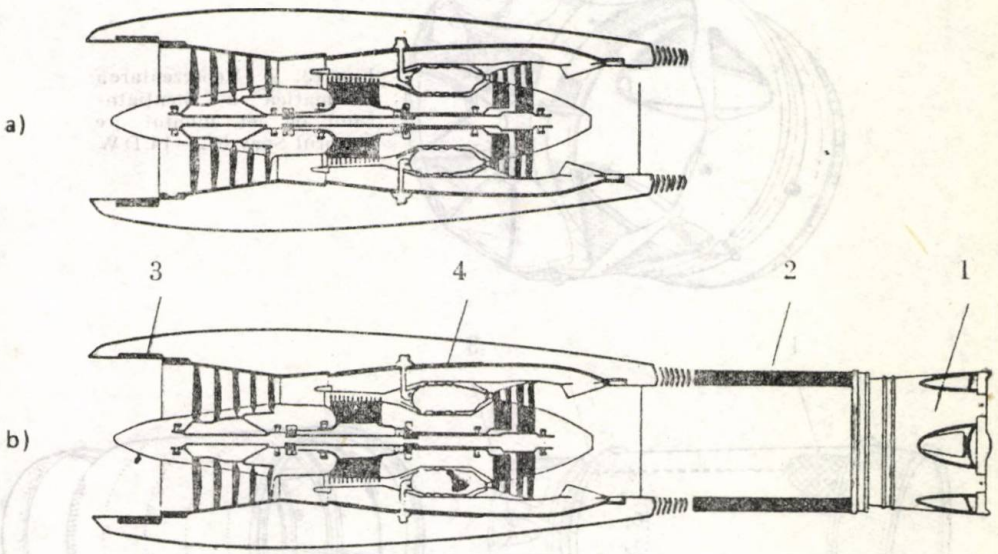


Fig. 12. — Dezvoltarea acustică a motorului Spey 512—14 DW: a — motorul inițial; b — motorul prevăzut cu hush-kit: 1 — silențiator de jet tip „cascadă" cu 6 jgheaburi; 2 — tub de reacție tratat fonic la interior; 3 — tratament fonoabsorbant aplicat prizei de admisie; 4 — tratament fonoabsorbant aplicat conductei de bypass.

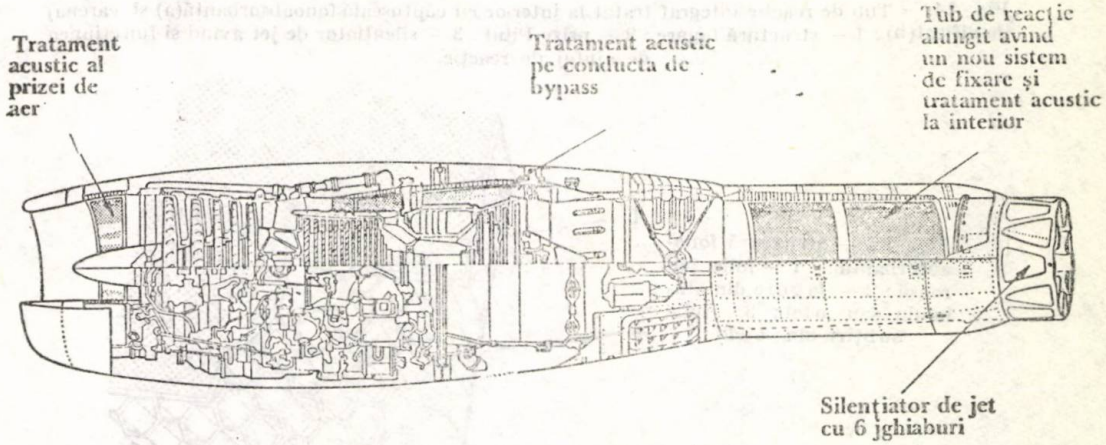


Fig. 12 bis. — Reprezentarea axonometrică a motorului Spey 512—14 DW echipat cu sistemul de atenuare a zgomotului (hush-kit).

oţel inoxidabil şi protejată spre curentul de gaze cu o folie poroasă confecţionată din metal fibros sinterizat care asigură un coeficient minim de frecare; spre exterior, protecţia structurii fagure este asigurată de o folie subţire din oţel (fig. 15);

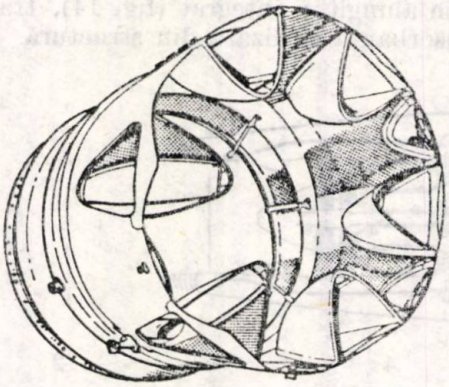


Fig. 13. — Reprezentarea schematică a silenţiatorului de jet montat pe motorul Spey 512—14 DW

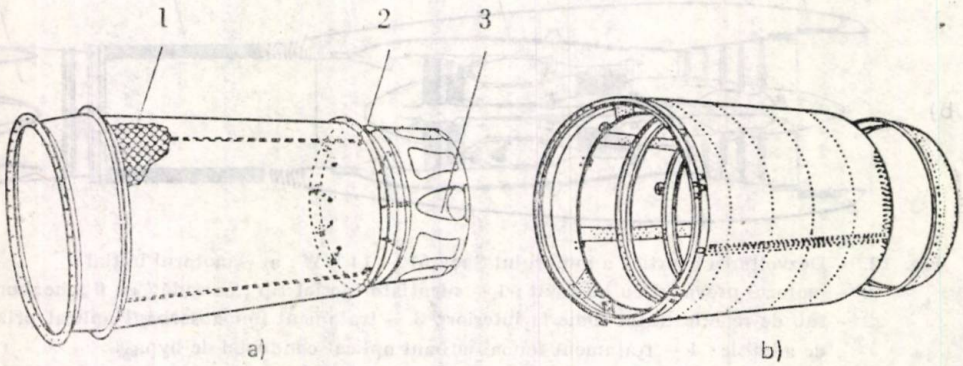


Fig. 14. — Tub de reacţie integrat tratat la interior cu căptuşeală fonoabsorbantă(a) şi carenaj modificat(b) : 1 — structură fagure ; 2 — prize Pitot ; 3 — silenţiator de jet avînd şi funcţiunea de ajutaj de reacţie.

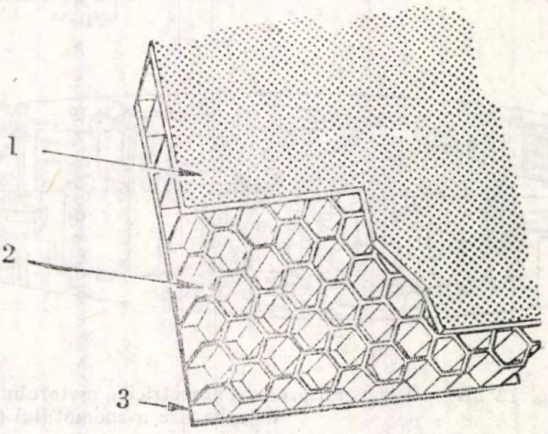


Fig. 15. — Structură fonoabsorbantă : 1 — folie poroasă ; 2 — fagure din aluminiu sau oţel ; 3 — folie subţire din oţel.

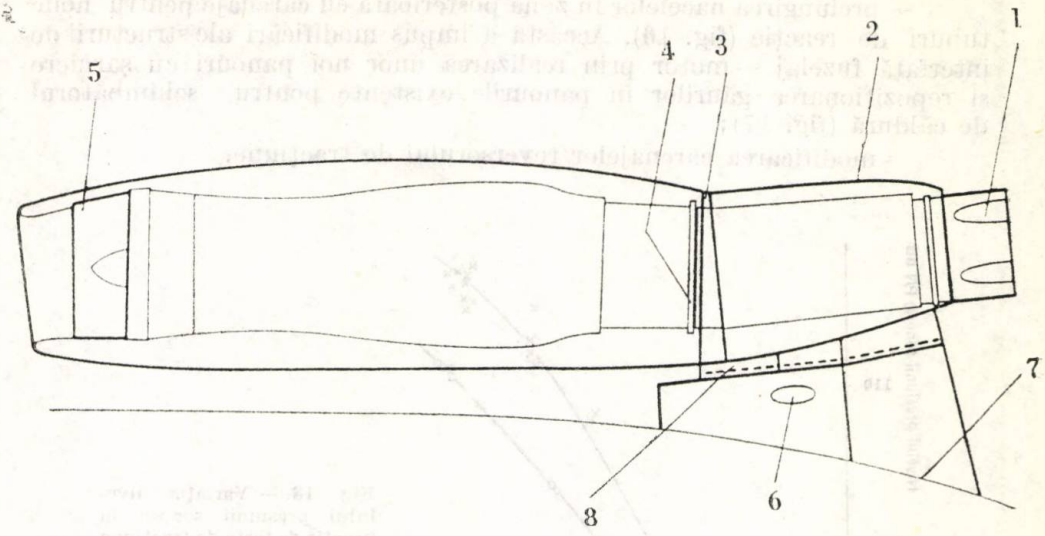


Fig. 16. — Componența kitului de reducere a zgomotului și principalele modificări efectuate : 1 — silențiator de jet ; 2 — carenaj nou (nacelă posterioară) ; 3 — carenaje reversoare de jet modificate ; 4 — modificare etanșare reversoare de jet ; 5 — tratament fonoabsorbant priză de admisie ; 6 — ieșire schimbător de căldură primar modificată ; 7 — nou panou de înveliș inferior rigidizat ; 8 — noi carenaje modificate.

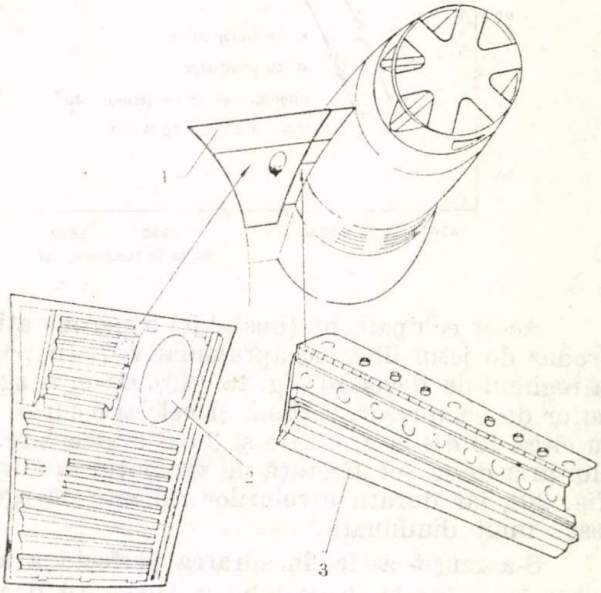


Fig. 17. — Modificări în structura avionului : 1 — nou panou de înveliș rigidizat ; 2 — noi găuri de evacuare în panourile existente pentru schimbătorul de căldură ; 3 — noi panouri cu șarniere.

— căptușeală fonoabsorbantă aplicată conductei de bypass a aerului din fluxul exterior, realizată similar cu aceea a tubului de reacție ;

— căptușeală fonoabsorbantă aplicată prizei de intrare a aerului în compresor, realizată din structură fagure de aluminiu și materiale compozite ;

— prelungirea nacelelor în zona posterioară cu carenaje pentru noile tuburi de reacție (fig. 16). Aceasta a impus modificări ale structurii de interfață fuzelaj — motor prin realizarea unor noi panouri cu șarniere și repoziționarea găurilor în panourile existente pentru schimbătorul de căldură (fig. 17);

— modificarea carenajelor reversorului de tracțiune.

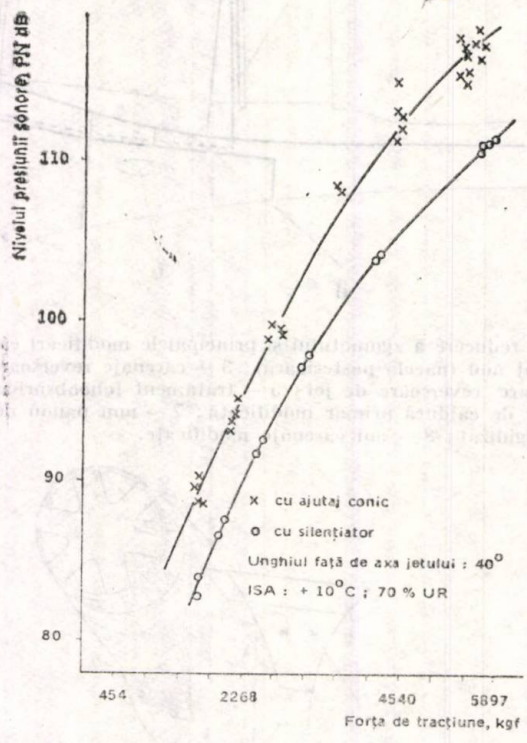


Fig. 18. — Variația nivelului presiunii sonore în funcție de forța de tracțiune la motorul Spey 512—14 DW, înainte (x) și după (0) echiparea cu silențiator de jet tip „cascadă" cu 6 jgheaburi, la distanța de 457,2 m și un unghi de 40° față de axa jetului.

Acest echipament (hush-kit) a permis atît diminuarea zgomotului produs de jetul liber cu aproximativ 7 dB pe direcția radiației maxime la regimul de decolare (fig. 18—19), cît și a zgomotului transmis în exterior de compresor, turbină și celelalte surse interioare ale motorului cu circa 12 dB la aterizare și 3 dB la decolare. Prin aplicarea hush-kitului aria de la sol afectată de zgomotul motorului s-a redus la jumătate (fig. 20), iar durata nivelurilor ridicate de zgomot într-un punct dat a fost mult diminuată.

S-a reușit astfel încadrarea perfectă a avionului ROMBAC 1—11 —560 în cerințele Capitolului 2 Anexa 16 ICAO [1] și parțial (la aterizare), în cele ale Capitolului 3, pe care le depășește cu 6,3 EPN dB în cazul decolării și cu 6,6 EPN dB pe lateral (v. tabelul 4). În acest mod a devenit posibilă atestarea acustică a avionului și obținerea certificatelor tip de zgomot Nr. 4 și Nr. 3 din 23 Iulie 1976 (anexa 1).

Pierderile de performanță asociate cu kitul de amortizare a zgomotului sînt minime și se exprimă prin creșterea consumului de combustibil cu 1% — 1,5% și adăugarea unei mase suplimentare (aferentă hush-kitului) de 2×134 kg.

Tabelul 4

Modul de încadrare a avionului ROMBAC 1—11—560 în limitele admise ale zgomotului, conform capitolelor 2 și 3 anexa 16 ICAO

	Capitolul 2	Capitolul 3	ROMBAC 1—11—560
DECOLARE EPN dB	95,5	89	95,3
LATERAL EPN dB	103	95	101,6
ATERIZARE EPN dB	101,7	93,5	95,6

Pentru dezvoltarea acustică a motorului Spey 512, în vederea încadrării avionului BAC 1—11 în standardele internaționale de zgomot este util a preciza că atît Rolls—Royce, cît și British Aerospace au întreprins cercetări încă din anul 1968, cînd s-a efectuat primul zbor al prototipului avionului, pe baza cărora, în perioada iunie 1973 — iunie 1974 au desfășurat și finalizat programul comun (fig. 21) de proiectare, testare și introducere în fabricația de serie a echipamentului de atenuare a zgomotului (hush-kitului).

În cursul acestor cercetări, Rolls-Royce a identificat, ca sursă importantă de zgomot a motorului Spey, pe lîngă zgomotul provenit de la piesele în rotație și zgomotul jetului, așa-numitul „zgomot al tubului de reacție" produs în avalul turbinei pînă la ajutajul de reacție. Figurile 22—24 prezintă nivelurile relative ale zgomotului compresorului, tubului de reacție și jetului pentru un motor Spey. Aceste figuri ilustrează faptul că eficiența încercărilor de a reduce zgomotul de amestec al jetului în trecut poate să fi fost mascată de prezența zgomotului produs în tubul de reacție.

Principala sursă a zgomotului pe linia laterală și a zgomotului de survol s-a presupus întotdeauna a fi jetul însuși. La apropiere, zgomotul

dominant provine de la compresor. De aici, multe din lucrările efectuate au fost orientate spre diminuarea zgomotului produs de jetul reactiv. Viteza jetului are un efect puternic asupra nivelului zgomotului, astfel încît reducînd viteza jetului trebuie să se reducă și zgomotul.

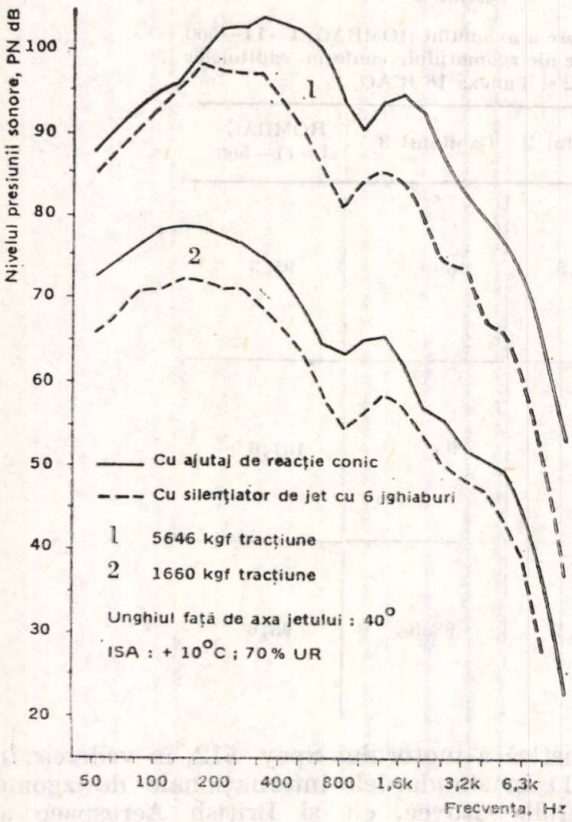


Fig. 19. — Spectrul zgomotului produs de motorul Spey 512—14 DW, măsurat la sol, la distanța de 457,2 m și un unghi de 40° față de axa jetului, înainte și după echiparea cu silențiator de jet tip ,,cascadă'' cu 6 jgheaburi

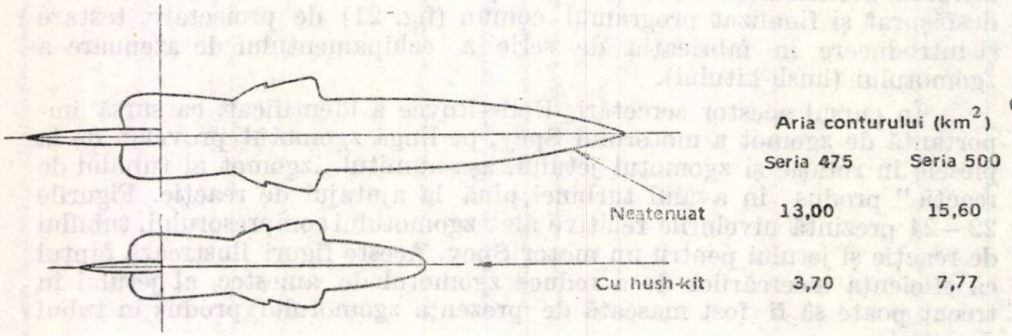


Fig. 20. — Micșorarea ariei de la sol a conturului zgomotului de 100 EPN dB produs de motorul Spey 512—14 DW, prin aplicarea echipamentului de atenuare (hush-kitului).

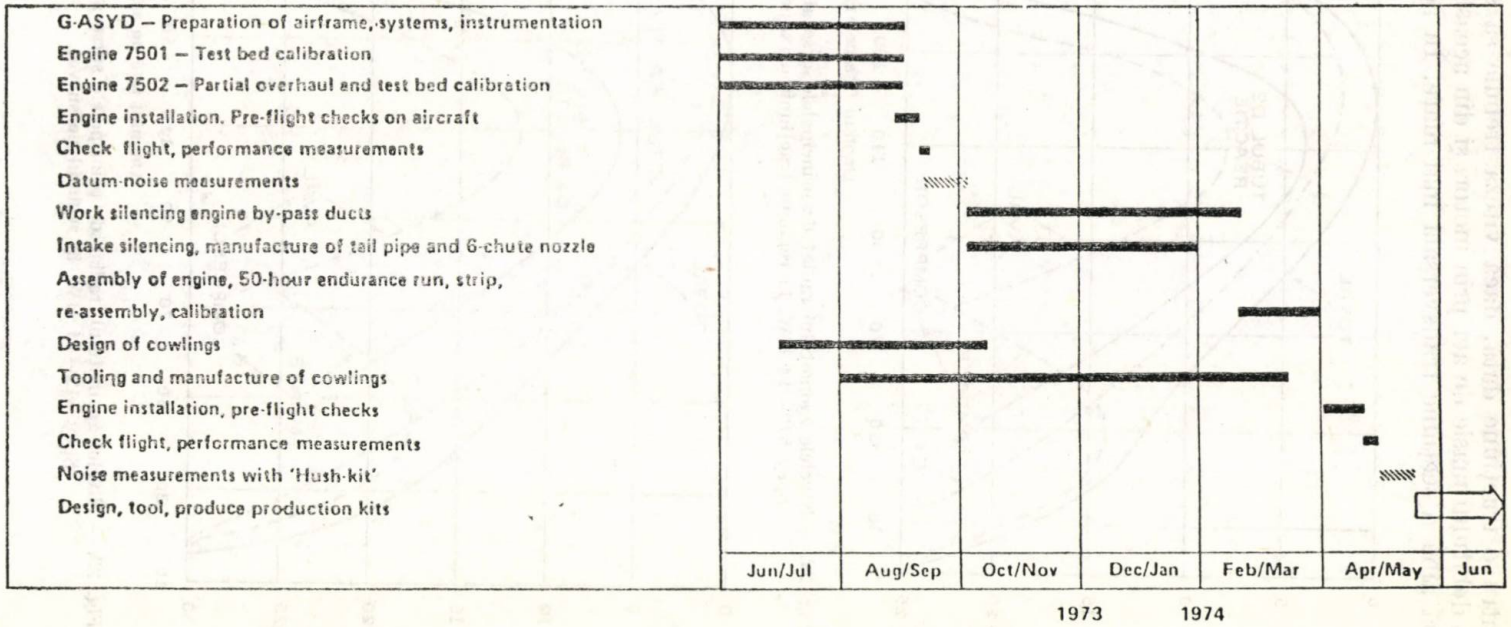


Fig. 21. — Programul comun British Aerospace — Rolls-Royce de proiectare, testare și introducere în fabricația de serie a echipamentului de atenuare a zgomotului produs de avionul BAC 1—11 în vederea încadrării acestuia în cerințele Capitolului 2, Anexa 16 ICAO (10).

Pentru o tracțiune dată, dacă viteza trebuie să scadă se impune creșterea debitului masic de aer prin motor, și din această cauză motorul trebuie să aibă o secțiune transversală mai mare. În acest mod, Rolls-

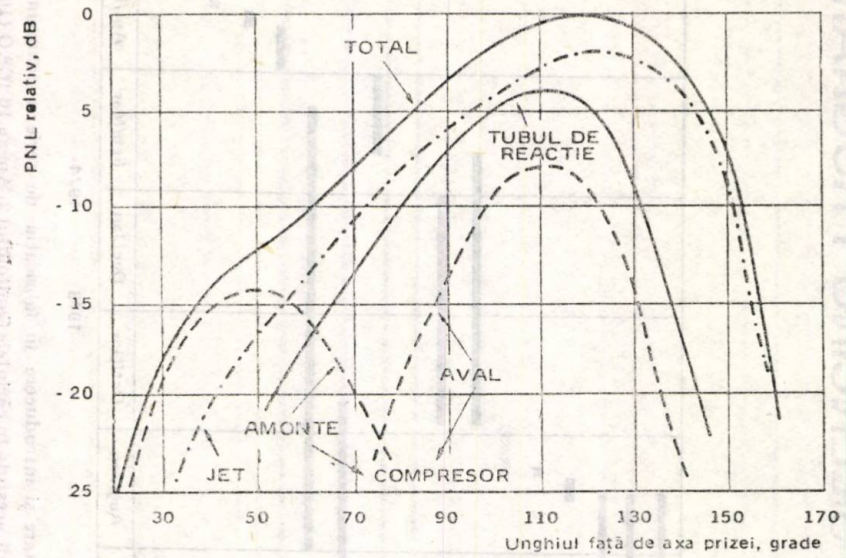


Fig. 22. — Nivelele zgomotului radiat de principalele surse ale motorului Spey 512—14 DW, la regimul tracțiunii maxime.

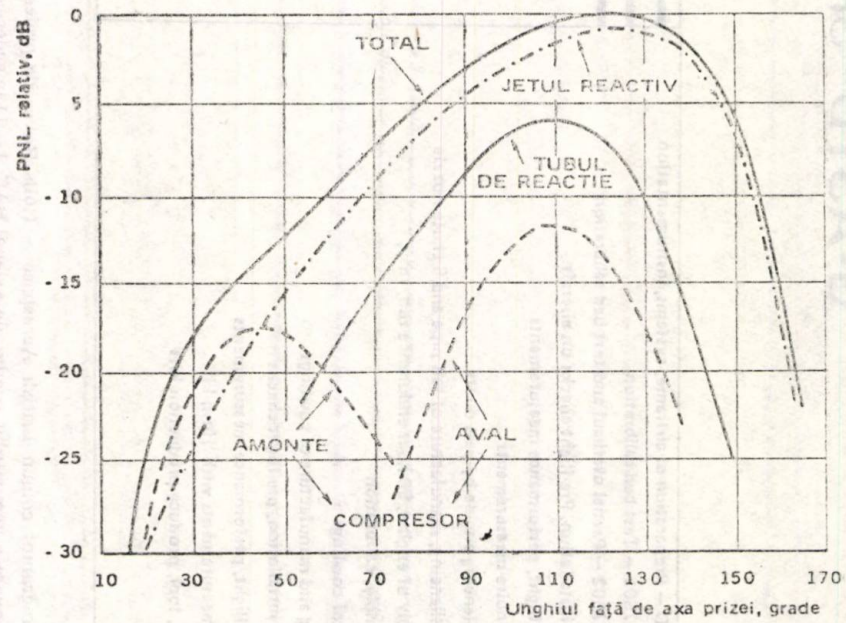


Fig. 23. — Nivelul zgomotului radiat de principalele surse ale motorului Spey 512—14 DW, la regimul de survol.

Royce a realizat marea reducere de zgomot la cunoscuta generație de turboventilatoare mari de tipul RB 211.

Totuși, motorul Spey 512 nu putea fi făcut silențios în acest mod și de aceea s-a ales metoda distorsionării curgerii, adică transformarea jetului circular într-un jet cu 6 brațe radiale prin înlocuirea ajutajului de reacție circular „2,5 con-di" cu silențiatorul de jet de tip „cascadă"

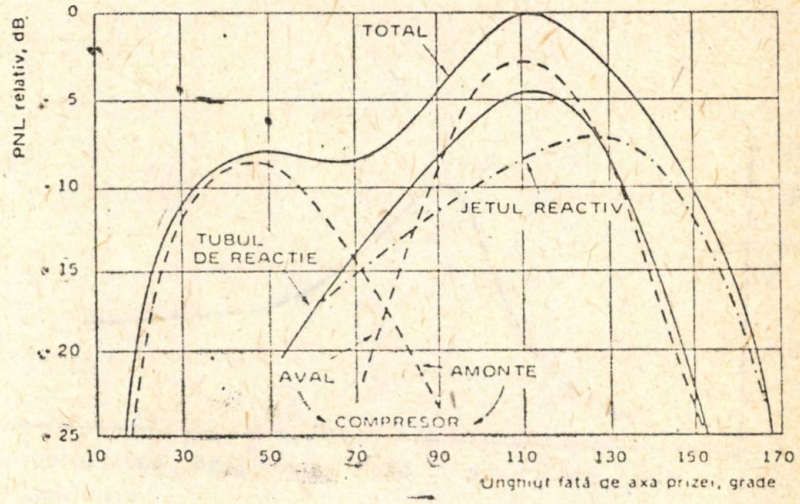


Fig. 24. — Nivelele zgomotului radiat de principalele surse ale motorului Spey 512—14 DW, la regimul de apropiere.

cu 6 jgheaburi. Această modificare a determinat o creștere a ratei de amestec a curgerii jetului cu aerul ambiant și, implicit, o diminuare a producției generale de zgomot. De asemenea, prin crearea mai multor jeturi radiale mai mici, energia acustică s-a redistribuit în benzi de frecvență mai ridicată care sînt mai rapid disipate în atmosferă.

Referitor la zgomotul produs în interiorul tubului de reacție, Rolls-Royce a efectuat cercetări pentru identificarea surselor acestui zgomot și stabilirea lungimii optime a tubului de reacție căptușit cu material fonoabsorbant care să fie plasat între turbină și ajutajul de reacție. Tratamentul acustic folosit a fost astfel proiectat încît să atenueze orice semnal acustic într-o gamă largă de frecvențe cu cel puțin 10 dB. În acest scop, s-a ales un tratament de tip activ — reactiv, avînd caracteristica de atenuare prezentată în figura 25.

Programul comun de încercări a cuprins teste statice (la sol și punct fix) efectuate asupra silențiatorului de jet tip „cascadă" cu 6 jgheaburi în cadrul Departamentului de Acustică al firmei British Aerospace Corporation, Weybridge, teste statice asupra întregului set de atenuare și teste în zbor cu și fără set de atenuare a zgomotului. Finalizarea acestui program, a permis certificarea acustică în anul 1976 a avioanelor BAC 1—11 seriile 475 și

500 în conformitate cu cerinţele Capitolului 2 Anexa 16 ICAO, respectiv Stadiul 2 din FAR 36.

Analiza datelor şi considerentelor de mai sus, în contextul situaţiei generate de aplicarea noilor reglementări de zgomot, al înaltului potenţial ştiinţific şi tehnologic românesc şi al rezervelor încă nevalorificate de dezvoltare a avionului ROMBAC 1—11, evidenţiază ca posibile şi eficiente două soluţii de compatibilizare a acestui avion cu cerinţele Capitolului 3, Anexa 16 ICAO.

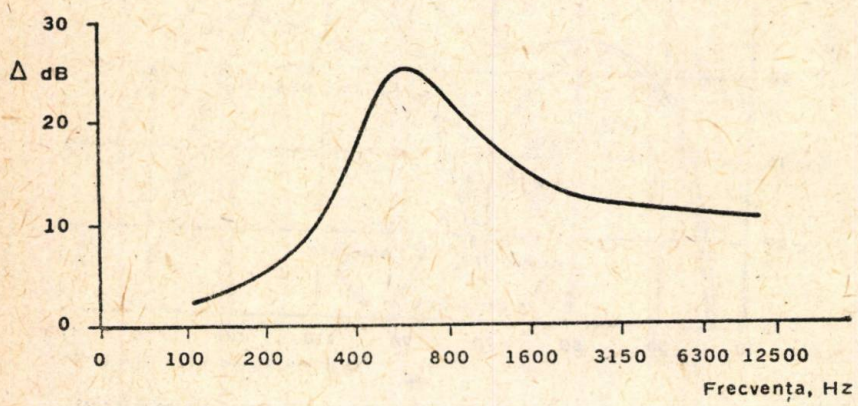


Fig. 25. — Caracteristica de atenuare a tratamentului acustic aplicat tubului de reacţie al motorului Spey 512—14 DW.

Prima dintre ele, are în vedere îmbunătăţirea corespunzătoare a performanţelor acustice ale actualelor motoare Spey 512—14 DW, fără efectuarea vreunei modificări a fuzelajului, echipamentelor şi sistemelor. În acest sens, valorile excedentare ale nivelului intensităţii zgomotului motorului Spey 512 faţă de limitele Capitolului 3 înscrise în tabelul 4, pot fi anihilate prin aplicarea unor tehnologii originale [6] de atenuare a zgomotului produs de jetul reactiv, bazate pe principiul interferenţei gazodinamice pus în evidenţă de cercetările autorului [7] asupra structurilor cvasiordonate de scară mare din turbulenţa jetului [8], [9]. Descrierea acestor tehnologii şi a echipamentului aferent, care va completa hush-kitul existent, precum şi prezentarea rezultatelor măsurărilor acustice efectuate pe standul de probă, vor face obiectul unei alte lucrări.

A doua soluţie, constă în remotorizarea avionului cu motoare mai silenţioase şi mai puternice, cum sînt cele de tipul Tay-560 produs de Rolls-Royce, D—36 fabricat în U.R.S.S., sau CFM—56 produs de Ge-

neral Electric — S.U.A. și se impune ca o acțiune majoră de modernizare a avionului în cadrul căreia, concomitent cu schimbarea motoarelor, se alungește fuzelajul, se modifică bordul și interiorul cabinei și se operează schimbări în specificația de bază a echipamentelor. Aceste modificări vor îmbunătăți substanțial standardul avionului asigurîndu-i competitivitatea cu cele mai moderne aeronave din categoria sa pentru o lungă perioadă de timp.

Dintre cele trei tipuri de motoare avute în vedere la modernizarea avionului ROMBAC, turboventilatorul Tay 650—14 (fig. 26) constituie în prezent soluția optimă, datorită dimensiunilor sale de gabarit mai reduse în comparație cu D—36 și CFM 56 (vezi tabelul 2), precum și faptului că, el fiind o dezvoltare a motorului Spey, oferă avantajul unei relative continuități în asimilarea fabricației la Întreprinderea Turbomecanica București, prin conversia licenței Spey 512 în licență Tay 650 și ulterior, în licență Tay 670.

Performanțele acustice ale motorului Tay 650 se încadrează perfect în limitele impuse de capitolul 3 anexa 16 ICAO (fig. 27), chiar cu anumite rezerve (salutare în cazul înăspririi standardelor internaționale de zgomot), iar caracteristica de economicitate pe care acesta o conferă avionului ROMBAC 1—11 este optimă (vezi tabelul 2) dacă se are în vedere că pe

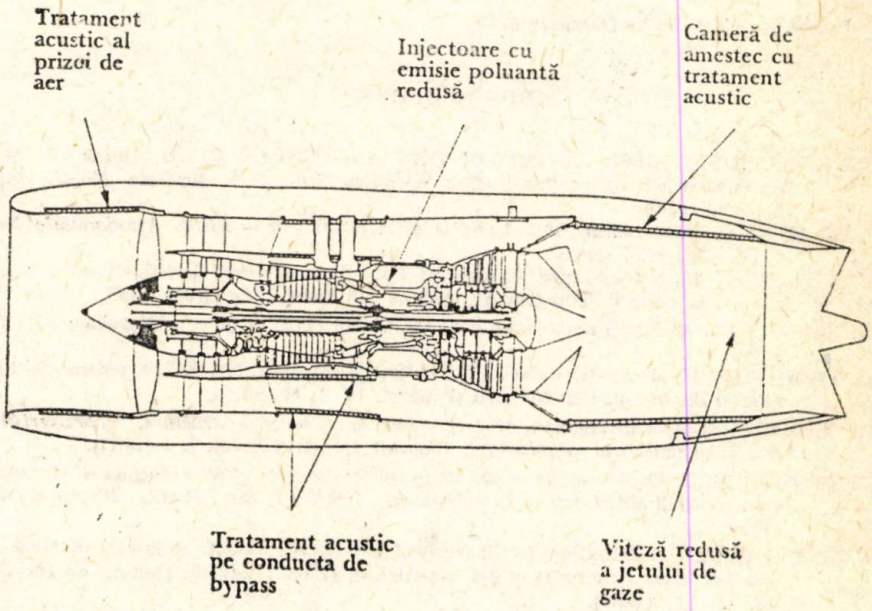


Fig. 26.—Reprezentarea schematică a motorului Spey—650, cu indicarea zonelor tratate acustic

avionul BAe—146 sînt instalate patru motoare Avco-Lycoming, iar pe avionul YAK—42 sînt instalate trei motoare D—36 şi că motoarele CFM 56—3B1 sînt mult mai grele decît motoarele Tay 650.

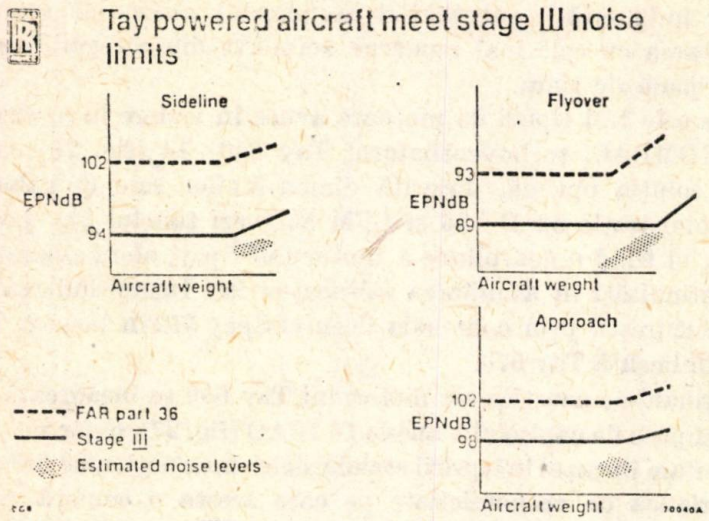


Fig. 27. — Caracteristic acustice ale motorului Tay-650, determinate de Rolls-Royce şi reproduse din [11].

Primit în redacţie la 26 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. INTERNATIONAL CIVIL AVIATION ORGANISATION — ICAO. *Annex 16 to the Convention on International Civil Aviation*, Volume I, Aircraft Noise, Second Edition, 1988.
2. G. J. HEALY, *Measurement and Analysis of Aircraft Far — Field Aerodynamic Noise.* CR—2377, 1974, NASA.
3. F. A. R., PART 35, Noise Standards Aircraft Type Airworthiness Certification.
4. R. WHITA—ER, Sound Management, Airline Business, September 1988.
5. V. SZEWCZYK, *Reducing noise around airports.* The Rolls — Royce Magazine, 37, June (1988).
6. C. TEODORESCU, *Atenuator de zgomot*, Brevet de invenţie, Nr. 88739, noiembrie 1985. Oficiul de stat pentru invenţii şi mărci, R. S. România.
7. C. TEODORESCU, *Investigation of large-scale quasiordered structure, characteristic of free axisymmetrical turbulent jet.* Preprint INCREST, vol. I, 1 (1983).
8. C. TEODORESCU, *Contributions to the study of aeroacoustic effect reduction of large-scale quasi-ordered structures of jet turbulence, (Part I)*, Rev. Roum. Physique, *30*, 6 (1985).
9. C. TEODORESCU, Contributions to the study of aeroacoustic effect reduction of large-scale quasi-ordered structures of jet turbulence, (Part II), Rev. Roum. de Physique, *33*, No. 1, (1989).
10. BRITISH AIRCRAFT COPORATION, *Silencing First Generation Jets*, BAC ONE—ELEVEN, February 1973, Sales Engin3eering Department, Commercial Aircraft Division.
111. ROLLS—ROYCE, *Tay turbofan the design concept*, V1984, Derby, England.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 48, nr. 5 septembrie—octombrie 1989

SUMAR

STUDII

I. DAVID, Modele numerice în simularea regimului apelor subterane, bazate pe metoda elementelor de frontieră 451

ADELINA GEORGESCU, Stabilitatea mişcării lichidelor pe un plan înclinat 471

ŞT. STAICU, Ciocnirea oblică plană a două rigide 481

H. DUMITRESCU, AL. DUMITRACHE, Asupra desprinderii dinamice în turbomaşini 487

M. V. SOARE, D. IORDACHE, Calculul eforturilor de membrană în turnurile de răcire hiperbolice 499

P. BRATU, Analiza experimentală a parametrilor dinamici la ciurul vibrator cu funcţionare în rezonanţă 515

NOTE

R. FRIEDRICH, Reţele de discretizare cu îndesiri locale 525

RECENZII 529

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități S.I. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.). Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fasciculei și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5(1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972, p. 93 — 99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București 22, Calea Victoriei 125.

MODELE NUMERICE ÎN SIMULAREA REGIMULUI APELOR SUBTERANE, BAZATE PE METODA ELEMENTELOR DE FRONTIERĂ

I. Scheme unidimensionale

de I. DAVID

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

În lucrare se prezintă un model de calcul general bazat pe metoda elementelor de frontieră pentru rezolvarea a celor mai complexe probleme de infiltrații schematizabile unidimensional. Complexitatea modelului constă în faptul că se iau în considerare condiții la limită de tip mixt, iar în interior se consideră debite distribuite și concentrate. Schema generală este testată pe exemple simple rezolvabile prin metode exacte.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Este cunoscut faptul că în ciclul hidrologic general, regimul apelor subterane are un rol de importanță majoră, atît din punct de vedere hidrologic propriu-zis, cît și din punct de vedere hidrotehnic, al interacțiunii amenajărilor hidrotehnice cu mediul înconjurător [1], [2], [3].

Cunoașterea regimului apelor subterane presupune în esență determinarea distribuției înălțimilor piezometrice și a debitelor, într-un teritoriu dat, cunoscîndu-se condițiile hidraulice perimetrale (niveluri, debite etc. pe frontiera domeniului) și teritoriale (debite distribuite sau concentrate, niveluri fixate în anumite zone sau puncte din teritoriu etc.)

Pentru realizarea acestor obiective este necesară conceperea unor scheme reprezentative simplificate ale teritoriului avînd la bază condițiile geometrice, hidraulice și parametrii hidrogeologici ai acviferului, obținîndu-se astfel reprezentări schematice sistemice. Descrierea detaliată a acestor etape în simularea regimului apelor subterane se poate urmări în [2], [3].

În figura 1 se prezintă schemele generale (de principiu) cele mai frecvente :

— schema unidimensională (fig. 1*a*) caracteristică luncilor cursurilor de apă în regiunile de șes, cu o secțiune transversală (fig. 1*b*) practic invariabilă pe un sector de lungime relativ mare ;

— schema bidimensională complexă (fig. 1*c*), cu secțiuni transversale diferite (profilul din fig. 1*b* corespunde numai secțiunii 1′ — 1′).

Următoarea etapă în procesul de simulare, care se referă la stabilirea stărilor sistemului (a acviferului), adică determinarea distribuției potențialului hidraulic în teritoriu, se realizează de regulă prin rezolvarea numerică a ecuațiilor de filtrație. În acest sens, în literatura de specialitate

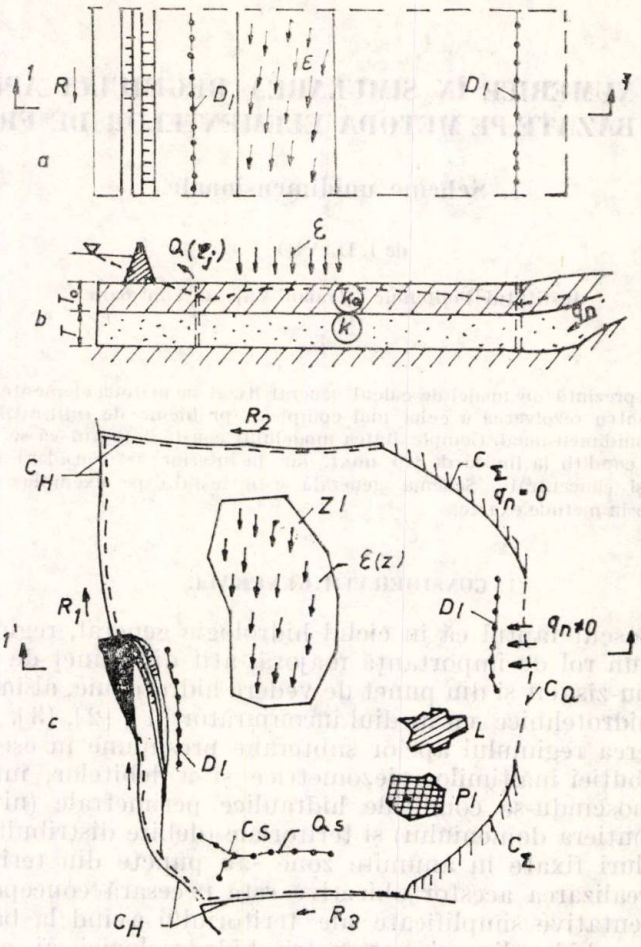


Fig. 1

alături de metodele analitice analizate și prezentate pe larg într-o serie de lucrări, dintre care se citează [5], [6], [7], [8], [9], [10], în ultimele decenii s-au dezvoltat, devenind deja clasice, două variante ale metodelor numerice :

— metoda diferențelor finite (MEDIF) [3], [11], [12], [13] [14], [15], [18]

— metoda elementului finit (MEFIN) [13], [16], [17], [18], [19].

În ultimul deceniu s-a dezvoltat o a treia metodă numerică bazată pe reprezentarea integrală a soluțiilor ecuației de filtrație. Aplicată inițial la rezolvarea unor probleme de filtrație particulare [20], [21], [22], devine consacrată ulterior, în anii 80, sub denumirea de „*metoda elementelor de frontieră*" (MEFRO — „Boundary Element Method"-BEM), în mod deosebit prin monografiile de largă circulație [23], [24], [25], [26], cu aplicații în numeroase domenii ale tehnicii. În ultimii doi ani metoda

este prezentă și în monografii de metode numerice din țară [27], [28], [29], inclusiv în aplicații referitoare la probleme de potențial și de infiltrații [30], [31], [32] [33], [34].

MEFRO, cu variantele sale: indirectă (MEFRO—I sau IBEM), directă (MEFRO-D sau DBEM) și complexă (MEFRO—VC sau CVBEM), prezintă avantajul deosebit că necesită numai discretizarea frontierei, reducîndu-se astfel substanțial numărul ecuațiilor din sistemul liniar echivalent, în comparație cu celelalte două metode (MEDIF și MEFIN) care presupun discretizarea întregului domeniu. În același timp înălțimea piesometrică se poate calcula în orice punct al domeniului. De asemenea, introducerea singularităților (ex. puțuri) se poate realiza în mod natural, fără a necesita discretizări de detaliu suplimentare cum este cazul în celelalte două metode numerice. Față de aceste avantaje se menționează că MEFRO se poate aplica numai pentru medii poroase omogene, sau omogene pe porțiuni, ceea ce nu restrînge însă posibilitatea extinderii metodei la cele mai complexe probleme de infiltrație.

În rezolvarea unor probleme complexe prezintă interes combinarea celor trei metode exploatînd avantajele fiecăreia, optimizînd astfel modelele de simulare numerică.

Avînd în vedere avantajele, eficiența și noutatea metodei se consideră oportună prezentarea ei detaliată pentru cele două scheme generale (fig. 1 *a*, *c*) care acoperă o gamă largă de probleme de filtrație.

Prezentarea se realizează în două părți:

— partea I, consacrată rezolvării schemelor unidimensionale (fig. 1*a*), va fi prezentată în lucrarea de față;

— partea II-a, consacrată rezolvării schemelor plane (fig. 1*c*), va fi prezentată într-o lucrare ulterioară.

Se menționează că față de rezultatele din literatura de specialitate, inclusiv titlurile de referință citate în bibliografie, prezentările din cadrul lucrării de față sînt mai generale, cuprinzînd singularități izolate și debite distribuite pe porțiuni și condiții teritoriale frecvente întîlnite în probleme de filtrație.

Avînd în vedere prezența frecventă a singularităților în probleme de filtrație, simulînd puțuri și/sau drenaje verticale, se consideră mai potrivită varianta indirectă a metodei (MEFR—I sau IBEM).

Modelele și relațiile generale prezentate sînt testate pe cazuri particulare semnificative rezolvate și prin alte metode.

Observație. În ceea ce privește *frontiera* domeniului se menționează că aceasta, în cazul bidimensional, este o curbă plană, închisă, iar în cazul unidimensional se reduce la două puncte, extremitățile domeniului unidimensional al mișcării. Prin urmare, *elementele de frontieră* la care se recurge în procesul de discretizare sînt segmente de dreaptă în cazul plan, respectiv cele două puncte marginale în cazul unidimensional.

Elementele de domeniu de care se face uz în cazul unei alimentări distribuite neuniforme ($\varepsilon = \varepsilon(M)$, $M \in D$, fig. 1) sînt elemente plane de diferite forme (ex. triunghiulare, în cazul bidimensional, respectiv segmente de dreaptă în cazul unidimensional).

2. BAZELE MEFRO-I ÎN ELABORAREA MODELELOR DE SIMULARE NUMERICĂ A SCHEMELOR DE INFILTRAȚII UNIDIMENSIONALE

Se consideră schema generală din figura 2, domeniul unidimensional al mișcării fiind un strat de grosime constantă (T) având coeficientul de filtrație (k), situat între punctele A ($x = 0$) și B ($x \equiv L$) care constituie *frontierele* domeniului $x \in (0, L)$. Acest strat acvifer este limitat în partea superioară de un alt strat cvasipermeabil ($k_1 < 0{,}1\,k$) și se sprijină pe un strat impermeabil sau cvasipermeabil prin care este de asemenea posibilă o eventuală alimentare distribuită.

Alimentarea distribuită este reprezentată prin $\varepsilon(x)$, în general dependentă de x, $\varepsilon(x) = \varepsilon_i(x)$, $x \in [\, L_1^{(i)}, L_2^{(i)}]$ (fig. 2).

Principalele proveniențe ale alimentării distribuite $\varepsilon(x)$ sînt schițate în figura 3 *a*, *b*, *c* :

— din precipitații (fig. 3*a*), caz în care

$$\varepsilon(x) = k_0 \frac{H_0 - h(x)}{H_0 - T} = k_0 \frac{H_0 - h(x)}{T_0 - z}, \tag{1}$$

deși este dependent de „x", pentru asigurarea pe de o parte a unei norme de desecare date z în punctul cel mai defavorabil (unde $h(x)$ este maxim) și imposibilitatea depășirii aportului efectiv ε_p din precipitații pe de altă parte, rezultă $\varepsilon(x) = \varepsilon_p = \text{constant}$;

— din infiltrații, în condiții de băltire a apei la suprafața terenului (ex. zona exterioară a digurilor, orezării etc.) (fig. 3*b*), caz în care

$$\varepsilon(x) = k_0 \frac{H_0 - h(x)}{T_0}\,; \tag{2}$$

— prin drenanță dintr-un strat inferior (fig. 3*c*), caz în care $\varepsilon(x)$ are aceeași expresie (2), (k_0) și (T_0) substituindu-se cu caracteristicile stratului (k_i), respectiv (T_i).

În ultimele două cazuri $\varepsilon(x)$ depinde de x prin intermediul înălțimii piezometrice $h(x)$ care la rîndul ei reprezintă necunoscuta de bază a problemei.

În aceste situații se va proceda la rezolvarea problemei prin aproximații succesive : se calculează o valoare inițial constantă pentru $\varepsilon(x)$, considerînd o valoare medie constantă pentru $h(x)$; se rezolvă problema rezultînd distribuția lui $h(x)$ într-o primă aproximație ; cu $h(x)$ astfel determinat se recalculează $\varepsilon(x)$ și se reia rezolvarea problemei obținîndu-se pentru $h(x)$ a doua aproximație.

Alimentarea (drenarea) concentrată este reprezentată prin sursele (absorbțiile) concentrate de intensitate $Q(\xi_j)$, amplasate în punctele interioare având abscisele ξ_j, $j = 1,2, \ldots, n$ și înălțimile piezometrice $h(\xi_j)$.

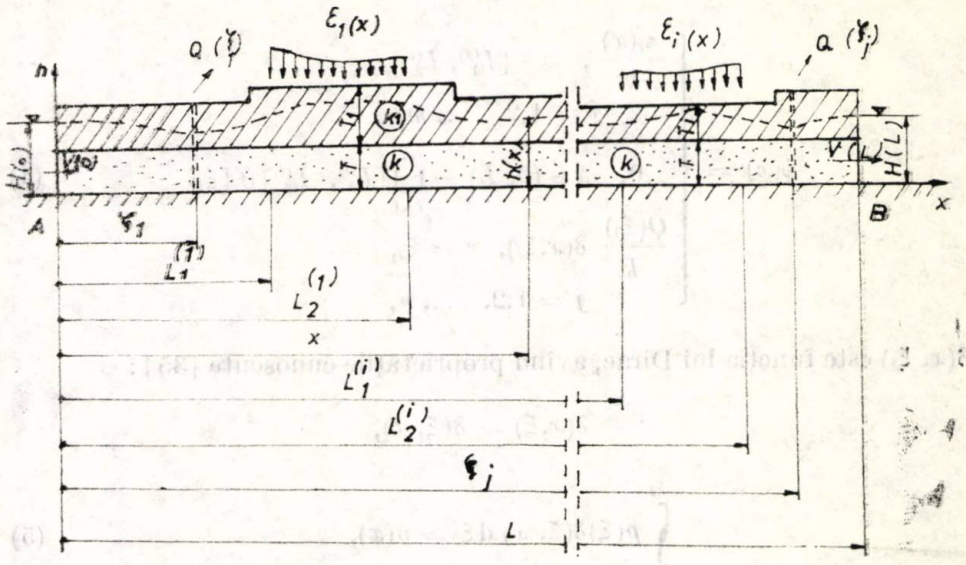


Fig. 2

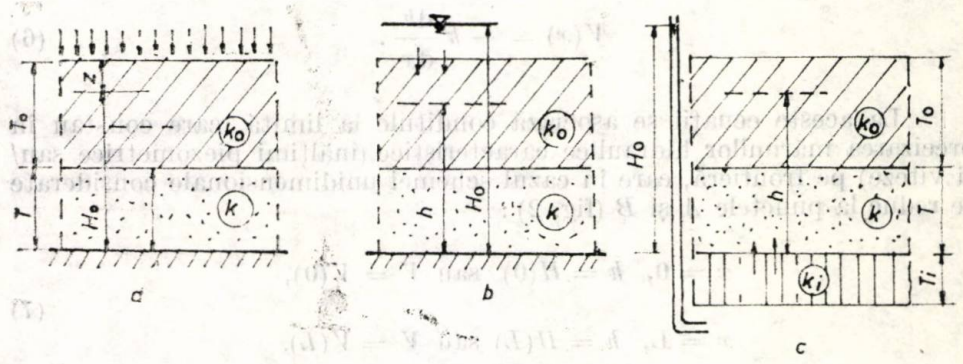


Fig. 3

Modelul matematic (ecuaţia generală a filtraţiei) pentru problema considerată, unidimensională, are forma cunoscută:

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{ax^2} = -\psi(x), \tag{3}$$

unde, cu notațiile din figura 2,

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_i(x)}{k}, & x \in [L_1^{(i)}, L_2^{(i)}] \\ & i = 1,2, \ldots, m, \\ 0, & x \in (0, L) - \bigcup_{i=1}^{m} [L_1^{(i)}, L_2^{(i)}] \cup \{\xi_j\} \\ \dfrac{Q(\xi_j)}{k}\, \delta(x, \xi_j), & x = \xi_j, \\ & j = 1,2, \ldots, n, \end{cases} \tag{4}$$

$\delta(x, \xi_j)$ este funcția lui Dirac, avînd proprietățile cunoscute [35] :

$$\delta(x, \xi) = \delta(\xi, x),$$

$$\int_{x_i}^{x_j} p(\xi)\delta(\xi, x)\, \mathrm{d}\xi = p(x), \tag{5}$$

$$(\forall)\xi \in (x_i, x_j) \subset (0, L) \text{ și } p(\xi) \in C^1(x_i, x_j).$$

Viteza de filtrație este dată de legea lui Darcy :

$$V(x) = -k\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

La aceste ecuații se asociază condițiile la limită, care constau în precizarea mărimilor hidraulice caracteristice (înălțimi piezometrice sau/și viteze) pe frontieră, care în cazul schemei unidimensionale considerate se reduc la punctele A și B (fig. 2) :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad h = H(0) \quad \text{sau} \quad V = V(0), \\ x = \mathrm{L}, \quad h = H(L) \quad \text{sau} \quad V = V(L). \end{aligned} \tag{7}$$

De asemenea, pentru singularitățile din punctele $(\xi_j)(j = 1,2, \ldots n)$, trebuie să se precizeze fie debitele surselor (absorbțiilor) $\pm Q(\xi_j)$, caz în care înălțimile piezometrice $h(\xi_j)$ sînt necunoscute, fie înălțimile piezometrice în anumite puncte ξ_r^*, $r = 1,2, \ldots, p$, caz în care debitele unui număr egal de p sursele (absorbții) din acele puncte devin necunoscute :

$$\begin{aligned} x = \xi_j, \; Q = Q(\xi_j) \to h = h(\xi_j), \\ x = \xi_r^* \quad h = h(\xi_r^*) \to Q = Q(\xi_r^*). \end{aligned} \tag{8}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (3) se va căuta sub forma

$$h(x) = h_{n0}(x) + h_0(x), \tag{9}$$

unde $h_{n0}(x)$ este soluția fundamentală a ecuației neomogene ($\psi(x) \neq 0$), iar $h_0(x)$ este soluția generală a ecuației omogene (pentru $\psi(x) = 0$).

Pentru $h_{n0}(x)$ se va utiliza soluția singulară fundamentală,

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2} |x - \xi| + C \tag{10}$$

cunoscută din teoria generală a ecuațiilor diferențiale [35], soluție a ecuației :

$$\frac{d^2G(x, \xi)}{dx^2} = -\delta(x, \xi), \tag{11}$$

unde $\delta(x, \xi)$ este funcția lui Dirac avînd proprietățile (5). Funcția $G(x, \xi)$ reprezintă potențialul generat în punctul x de o sursă de intensitate unitară amplasată în punctul ξ sau reciproc.

Cu ajutorul funcției $G(x, \xi)$ se pot construi funcțiile

$$h_i(x) = \frac{1}{k} \int_{L_1^{(i)}}^{L_2^{(i)}} \varepsilon_i(\xi) G(x, \xi) d\xi + c, \tag{12}$$

$$i = 1,2 \ldots, m,$$

care sînt soluții fundamentale ale ecuației (3), pentru $\psi(x) = \varepsilon_i(x)/k$, adică pentru (4—1).

Într-adevăr, derivînd (12) și ținînd seama de (11) și (5—2) se poate scrie șirul de egalități :

$$\frac{d^2h_i(x)}{dx^2} = \frac{1}{k} \int_{L_1^{(i)}}^{L_2^{(i)}} \varepsilon_i(\xi) \frac{d^2G}{dx^2} d\xi = -\frac{1}{k} \int_{L_1^{(i)}}^{L_2^{(i)}} \varepsilon_i(\xi) \delta(x, \xi) d\xi = \tag{13}$$

$$= -\frac{\varepsilon_i(x)}{k}$$

ceea ce constituie demonstrația celor afirmate mai sus.

Cu ajutorul aceleiași funcții $G(x, \xi)$ se poate construi soluția fundamentală a ecuației neomogene (3), pentru $\psi(x) = \frac{Q(\xi_j)}{k} \delta(x, \xi_j)$.

Pentru aceasta se observă că, prin multiplicarea ecuației (11) cu constanta (în raport cu x) $Q(\xi_j)/k$, se obține :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{Q(\xi_j)}{k}G(x,\,\xi_j)\right] = -\frac{Q(\xi_j)}{k}\delta(x,\,\xi_j). \tag{14}$$

Rezultă astfel că funcția

$$h_j(x) = \frac{Q(\xi_j)}{k}G(x,\,\xi_j),\ j = 1,2,\ldots,n,$$

este soluție a ecuației neomogene (3), pentru $\psi(x) = \dfrac{Q(\xi_j)}{k}$ ceea ce era de demonstrat.

Pe baza acestor rezultate soluția fundamentală completă a ecuației neomogene pentru schema unidimensională din figura 2 se poate exprima sub forma generală :

$$h_{n_0}(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}G(x,\,\xi_j) + \sum_{i=1}^{m}\int_{L_1^{(i)}}^{L_2^{(i)}}\frac{1}{k}\varepsilon_i(\xi)G(x,\,\xi)\mathrm{d}\xi + C. \tag{16}$$

Soluția generală a ecuației omogene (ecuația (3) pentru $\psi(x) = 0$) se obține prin integrare directă sub forma

$$h_0(x) = C_1x + C_2, \tag{17}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante de integrare.

Ținînd seama de forma liniară (17) și de structura tot liniară (10) a soluției singulare fundamentale, precum și de interpretarea fizică a acesteia, soluția generală a ecuației omogene se poate exprima sub o formă nouă, utilizînd soluția fundamentală singulară $G(x,\,\xi)$:

$$h_0(x) = \frac{\Phi(0)}{k}G(x,\,0) + \frac{\Phi(L)}{k}G(x,\,L), \tag{18}$$

unde $\Phi(0)$ și $\Phi(L)$ sînt noile constante de integrare, iar $G(x,\,0)$ și $G(x,\,L)$ sînt funcții obținute din $G(x,\,\xi)$ pentru $\xi = 0$, respectiv $\xi = L$. Ținînd seama de intrepretarea funcției de potențial $G(x,\xi)$ în reprezentarea (18), $\Phi(0)$ și $\Phi(L)$ reprezintă intensitățile necunoscute ale unor surse fictive amplasate în punctele de frontieră $A(x = 0)$ și $B(x = L)$.

Introducerea necunoscutelor indirecte Φ (0) și $\Phi(L)$ în punctele de frontieră este specifică MEFRO—I.

Cu (16) și (18) *soluția generală a problemei de filtrație unidimensionale* schematizată în figura 2, specifică MEFRO—I, se poate scrie sub forma :

$$h(x) = \frac{\Phi(0)}{k} G(x, 0) + \frac{\Phi(L)}{k} G(x, L) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{Q(\xi_j)}{k} G(x, \xi_j) + \sum_{i=1}^{m} \int_{L_1^{(i)}}^{L_2^{(i)}} \frac{\varepsilon_i(\xi)}{k} G(x, \xi)\, \mathrm{d}\xi + C. \tag{19}$$

De asemenea, ținînd seama de legea lui Darcy (6), viteza de filtrație are expresia

$$V(x) = \Phi(0) F(x, 0) + \Phi(L) F(x, L) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} Q(\xi_j) F(x, \xi_j) + \sum_{i=1}^{m} \int_{L_1^{(i)}}^{L_2^{(i)}} \varepsilon_i(\xi) F(x, \xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{20}$$

unde

$$F(x, \xi) = \frac{\mathrm{d}G(x, \xi)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} |x - \xi| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x > \xi, \\ -\frac{1}{2}, & x < \xi, \end{cases} \tag{21}$$

iar $F(x, 0)$ și $F(x, L)$ se obțin pentru $\xi = 0$, respectiv $\xi = L$.,

Reprezentările (19) și (20) sînt specifice MEFRO—I, adică varianta indirectă a metodei prin prezența necunoscutelor indirecte $\Phi(0)$ și $\Phi(L)$, reprezentînd densitățile surselor amplasate în punctele de frontieră A, respectiv B, care se vor determina utilizînd condițiile la limită (7).

Fără a restrînge generalitatea problemei considerate, se poate presupune în continuare că pentru $x \in [L_1^{(i)}, L_2^{(i)}]$, $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i = \text{const.}$ pentru fiecare interval ($i = 1,2, \ldots m$), la nevoie numărul intervalelor putîndu-se mări pentru o mai bună aproximare a variației reale $\varepsilon_i(x)$ cu o variație în trepte (constante). În aceste condiții expresiile (19) și (20) devin :

$$h(x) = -\frac{x}{2} \frac{\Phi(0)}{k} - \frac{L - x}{2} \frac{\Phi(L)}{k} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{Q(\xi_j)}{k} |x - \xi_j| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i}{k} A_i(x) + C, \tag{22}$$

$$\frac{V(x)}{k} = \frac{1}{2}\frac{\Phi(0)}{k} - \frac{1}{2}\frac{\Phi(L)}{k} + \sum_{j=1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}F(x,\xi_j) + \tag{23}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}B_i(x),$$

unde

$$A_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{(L_2^{(i)})^2 - (L_1^{(i)})^2}{4}\left(1 - \dfrac{2x}{L_2^{(i)} + L_1^{(i)}}\right), & x < L_1^{(i)}, \\ \dfrac{(L_2^{(i)})^2 - (L_1^{(i)})^2}{4}\left(1 - \dfrac{2x}{L_2^{(i)} + L_1^{(i)}}\right), & x > L_2^{(i)}, \\ -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(L_1^{(i)})^2 + (L_2^{(i)})^2}{2} + x^2 - x\,(L_1^{(i)} + L_2^{(i)})\right] & \\ \qquad\qquad L_1^{(i)} \leqslant x \leqslant L_2^{(i)}, \end{cases} \tag{24}$$

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}), & x > L_2^{(i)}, \\ -\dfrac{1}{2}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}), & x < L_1^{(i)}, \\ x - \dfrac{1}{2}(L_1^{(i)} + L_2^{(i)}), & L_1^{(i)} \leqslant x \leqslant L_2^{(i)}, \end{cases} \tag{25}$$

iar $F(x, \xi_j)$ are expresia (21), luînd $\xi = \xi_j$.

Aceste expresii vor fi utilizate pentru calculul înălțimii piezometrice ($h(x)$, respectiv a vitezei de filtrație $V(x)$, într-un punct curent $x \in (0, L)$). Pentru aceasta este necesar să se urmărească intensitățile surselor fictive de pe frontieră $\Phi(0)$ și $\Phi(L)$, constanta C, precum și precizări asupra singularităților izolate interioare. Necunoscutele $\Phi(0)$, $\Phi(L)$ și C se determină dintr-un sistem liniar de ecuații care se obține cu ajutorul expresiilor (22), (23), prin trecere la limită și utilizarea condițiilor la limită de tipul (7) la care se asociază o ecuație suplimentară de bilanț a debitelor pe segmentul AB.

Se obțin astfel ecuațiile

— pentru $x = 0$, $h(x = 0)) = H(0)$;

$$-\frac{L}{2}\frac{\Phi(L)}{k} + C = H(0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}\,\xi_j + \tag{26}$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}[(L_2^{(i)})^2 - (L_1^{(i)})^2],$$

— pentru $x = 0, V(x = 0) = V(0)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi(0)}{k} - \frac{1}{2}\frac{\Phi(L)}{k} = \frac{V(0)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}), \quad (27)$$

— pentru $x = L, h(x = L) = H(L)$:

$$-\frac{L}{2}\frac{\Phi(0)}{k} + C = H(L) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}|L - \xi_j| + \quad (28)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}L\left[L_2^{(i)} - L_1^{(i)} - \frac{(L_2^{(i)})^2 - (L_1^{(i)})^2}{2L}\right],$$

— pentru $X = L, V(X = L) = V(L)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\Phi(0)}{k} - \frac{1}{2}\frac{\Phi(L)}{k} = \frac{V(L)}{k} - \frac{1}{2}\sum_{j-1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k} - \quad (29)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)})$$

— ecuația de bilanț a debitelor :

$$\Phi(0) + \Phi(L) + \sum_{j=1}^{n} Q(\xi_j) + \sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}) = 0. \quad (30)$$

În cazul în care există puncte interioare $x = \xi_r^*$ $r = 1,2, \ldots, p$ în care cotele piezometrice $h(\xi_r^*)$ sînt impuse se vor alege p linii de drenaj a căror debite $Q(\xi_r^*)$ urmează a fi determinate astfel încît să se realizeze cotele piezometrice impuse.

În acest caz se vor scrie în baza condițiilor (8) încă p ecuații, utilizînd expresia (22),

$$-\frac{\xi_r^*}{2}\cdot\frac{\Phi(0)}{k} - \frac{L - \xi_r^*}{2}\cdot\frac{\Phi(L)}{k} + C - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\frac{Q(\xi_j)}{k}|\xi_r^* - \xi_j| =$$

$$= h(\xi_r^*) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}|\xi_r^* - \xi_j| - \sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}Ai(\xi_r^*), \quad (31)$$

$r = 1,2, \ldots, p,$

unde $A_i(\xi_r^*)$ se calculează din expresia (24) luînd $x = \xi_r^*$.

În aceste condiții, la necunoscutele de bază $\Phi(0)$, $\Phi(L)$ și C se mai adaugă debitele $Q(\xi_j)$, $j = 1,2, \ldots, p$, care se vor determina prin rezolvarea sistemului liniar completat cu ecuațiile (31). Astfel, dintre cele n linii de drenaj, un număr de $p \leqslant n$ se vor determina astfel încît în punctele $x = \xi_r^*, r = 1,2, \ldots p$, să se realizeze înălțimile piezometrice dinainte

precizate $h(\xi_r^*)$. Celelalte $n - p$ linii de drenaj sînt cu debitele $Q(\xi_j)$ cunoscute. Evident că poate lipsi fiecare sau ambele tipuri de linii de drenaj. De asemenea, în particular, punctele ξ_r^* în care sînt prescrise înălțimile piezometrice $h(\xi_r^*)$ pot coincide cu poziția limită de drenaj.

Pentru o problemă dată din sistemul (26) — (29) se extrag cele două ecuații corespunzătoare condițiilor la limită date (în total $C_4^2 = 6$ variante), care împreună cu ecuația (30) și, dacă este cazul, cu ecuații de tip (31), formează un sistem liniar de ecuații. Rezolvînd sistemul se obțin necunoscutele $\Phi(0)$, $\Phi(L)$ și C, iar după caz $Q(\xi_j)$ $j = 1,2, \ldots, p$, cu ajutorul cărora din (22) și (23) se pot determina : înălțimea piezometrică $h(x)$ și viteza de filtrație $V(x)$ în orice punct, avînd abscisa $x \in (0, L)$.

Relațiile stabilite, modelul de calcul elaborat constituie extensiuni și generalizări ale celor din literatura de specialitate.

3. EXEMPLE DE APLICARE ȘI TESTARE A MODELULUI DE CALCUL

În baza relațiilor stabilite, modelul de calcul elaborat pentru scheme de infiltrație unidimensionale se poate reprezenta sub forma matriceală generală ;

$$A \cdot \Phi = B, \tag{32}$$

unde A este matricea sistemului avînd expresia :

$$A =$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
\left\{\begin{array}{ccccccc} 0 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{\xi_1}{2} & \ldots & -\frac{\xi_{p-1}}{2} & -\frac{\xi_p}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \ldots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right\}^{*} & & & & & & A_H \\
 & & & & & & A_V \\
\left\{\begin{array}{ccccccc} -\frac{L}{2} & 0 & 1 & -\frac{|L-\xi_1|}{2} & \ldots & -\frac{|L-\xi_{p-1})|}{2} & -\frac{|L-\xi_p|}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right\}^{*)} & & & & & & B_H \\
 & & & & & & B_V \\
1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\
-\frac{\xi_1^*}{2} & -\frac{1}{2}(L-\xi_1^*) & 1 & -\frac{1}{2}|\xi_1^*-\xi_1| & \ldots & -\frac{1}{2}|\xi_1^*-\xi_{p-1}| & -\frac{1}{2}|\xi_1^*-\xi_p| \\
-\frac{\xi_2^*}{2} & -\frac{1}{2}(L-\xi_2^*) & 1 & -\frac{1}{2}|\xi_2^*-\xi_1| & \ldots & -\frac{1}{2}|\xi_2^*-\xi_{p-1}| & -\frac{1}{2}|\xi_2^*-\xi_p| \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
-\frac{\xi_p^*}{2} & -\frac{1}{2}(L-\xi_p^*) & 1 & -\frac{1}{2}|\xi_p^*-\xi_1| & \ldots & -\frac{1}{2}|\xi_p^*-\xi_{p-1}| & -\frac{1}{2}|\xi_p^*-\xi_p|
\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \Sigma Q$$

(33)

*) Se va lua în considerare numai cîte o singură linie din acolade, corespunzător condițiilor la limită date (prima linie în cazul condițiilor de tip înălțime piezometrică dată; a doua linie în cazul vitezei date).

Primele trei coloane ale acestei matrice corespunde necunoscutelor de bază $\Phi(0)$, $\Phi(L)$ și C care apar în toate tipurile de probleme. Următoarele p coloane corespund liniilor de drenaj interioare asociate înălțimilor piezometrice $h(\xi_r^*)$, $r = 1,2,\ldots p$, date și debite $Q(\xi_j)$, $j = 1,2,\ldots p$ necunoscute și apar deci numai în probleme în care sînt date puncte cu cote piezometrice dinainte precizate.

În ceea ce privește liniile matricei, din primele patru linii marcate cu A_H, A_V, B_H, B_V se aleg două, corespunzător condițiilor la limită date ale problemei, care rezultă din combinarea următoarelor variante: condiții de tip A_H, B_H, adică înălțimi piezometrice date în punctele de frontieră A, respectiv B, sau condiții de tip A_V, B_V, adică viteze (debite) date în punctele de frontieră. Următoarea linie, a 3-a, marcată cu ΣQ corespunde ecuației de bilanț a debitelor. Ultimele p linii corespund liniilor de drenaj interioare condiționate de înălțimile piezometrice $h(\xi_r^*)$, $r = 1, 2, \ldots, p$ dinainte fixate.

Se poate concluziona deci că matricea sistemului este cel puțin de ordinul 3, corespunzător necunoscutelor de bază $\Phi(0)$, $\Phi(L)$ și C care apar în toate tipurile de probleme. Acest ordin crește dacă există puncte interioare cu înălțimi piezometrice $h(\xi_r^*)$ dinainte fixate și se cere determinarea debitelor (coloane și linii de tip $Q(\xi_r)$ în matricea (33). Influența liniilor de drenaj interioare cu debit dat și h nepreecizat apare în termenul liber, fără a se modifica numărul ecuațiilor în sistem.

Φ — este matricea necunoscutelor și are următoarea expresie:

$$\Phi = \left[\frac{\Phi(0)}{k} \quad \frac{\Phi(L)}{k} \quad C \quad \pm\frac{Q(\xi_1)}{k} \ldots \pm\frac{Q(\xi_p)}{k}\right], \tag{34}$$

fiind o matrice coloană cu $3 + p$ elemente, conținînd necunoscutele problemei: intensitatea surselor fictive introduse drept necunoscute indirecte în punctele de frontieră ($\Phi(0)$ în punctul A, $\Phi(L)$ în punctul B), constanta de integrare C și intensitățile (debitele) $\pm Q(\xi_j)$, $j = 1,2, \ldots, p$, ale liniilor de drenaj interioare ($\xi_j \in (0, L)$) care sînt legate de înălțimile piezometrice dinainte date $h(\xi_r^*)$ (semnul plus corespunde sursei, iar cel minus absorbției, adică drenajului).

B — este matricea termenului liber, o matrice coloană avînd următoarea expresie :

$$B = \begin{vmatrix} \left\{ H(0) + \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n} \frac{Q(\xi_j)}{k}\xi_j + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}[(L_2^{(i)})^2 - (L_1^{(i)})^2] \right\}^* \\ \left\{ \frac{V(0)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}) \right\}^* \\ \left\{ H(L) + \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}|L-\xi_j| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}L\left[L_2^{(i)} - L_1^{(i)} - \frac{(L_2^{(i)})^2 - (L_1^{(i)})^2}{2L}\right] \right\}^* \\ \left\{ \frac{V(L)}{k} - \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}) \right\}^* \\ -\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}(L_2^{(i)} - L_1^{(i)}) \\ h(\xi_1^*) + \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}|\xi_1^* - \xi_j| - \sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}A_i(\xi_1^*) \\ \vdots \\ h(\xi_p^*) + \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n}\frac{Q(\xi_j)}{k}|\xi_p^* - \xi_j| - \sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon_i}{k}A_i(\xi_p^*) \end{vmatrix} \tag{35}$$

Ca și în cazul matricei A, din primele patru linii marcate cu acoladă se va reține cîte o linie corespunzătoare condițiilor la limită date în punctele de frontieră A și B. Următoarea linie (a 3-a) corespunde bilanțului debitelor, iar celelalte p linii corespund liniilor de drenaj interioare corespunzătoare înălțimilor piezometrice date $h(\xi_r^*)$.

Pentru testarea modelului de calcul se consideră cîteva cazuri simple, semnificative, care se pot rezolva prin integrare directă, comparîndu-se rezultatele obținute.

Un prim exemplu este reprezentat în figura 4.

Condițiile la limită (7) aferente acestui exemplu sînt de forma :

$$x = 0,\ V(0) = 0, \tag{36}$$

$$x = L,\ h = H(L).$$

adică de tip A_V și B_H.

Prin rezolvarea directă a ecuației generale (relațiile (3), (4)), care în cazul de față are forma :

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\varepsilon}{k}, \tag{37}$$

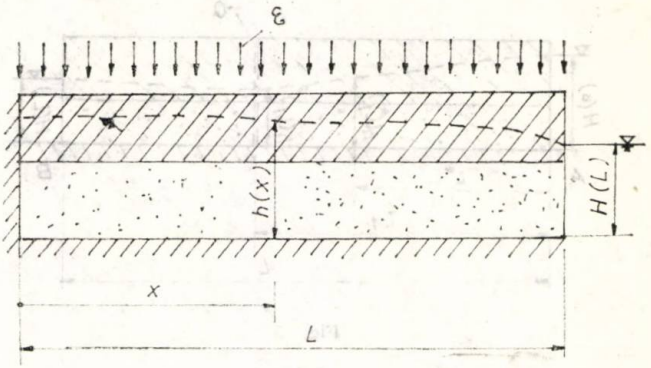


Fig. 4

se obține expresia binecunoscută a înălțimii piezometrice curente :

$$h(x) = H(L) + \frac{\varepsilon L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right). \tag{38}$$

Utilizînd modelul de calcul propus se scrie mai întîi ecuația matriceală (32), particularizînd matricele (33) (34) și (35)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{L}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Phi(0)}{k} \\ \frac{\Phi(L)}{k} \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon L}{2k} \\ H(L) + \frac{\varepsilon L^2}{4k} \\ -\varepsilon L \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Se observă că corespunzător condițiilor (36) din matricele (33) și (35) s-a reținut liniile de tipul A_r și B_H

Rezolvînd sistemul (39) se obține :

$$\frac{\Phi(0)}{k} = 0\,;\ \frac{\Phi(L)}{x} = -\frac{\varepsilon L}{k}\,;\ C = H(L) + \frac{\varepsilon L^2}{4k}, \tag{40}$$

care înlocuite în (22) conduc la același rezultat (38).

Un al doilea exemplu este reprezentat în figura 5.

Condițiile la limită (7) aferente acestui exemplu sînt de forma :

$$x = 0,\ h = H(0),$$

$$x = L,\ h = H(L), \tag{41}$$

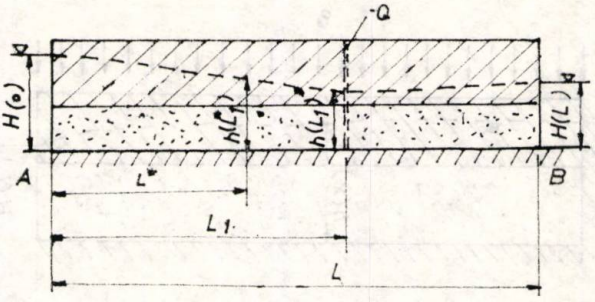


Fig. 5

adică de tip A_H și B_H. La acestea se adaugă prezența unui drenaj amplasat în punctul $x = \xi_1 = L_1$.

Prezența liniei de drenaj interioare permite formularea a trei subcazuri :

— primul caz, cel mai simplu, corespunde situației cînd este cunoscut debitul drenajului $Q(L_1) = -Q$;

— al doilea caz corespunde situației cînd este precizată înălțimea piezometrică $h(L_1)$ și se cere determinarea debitului $Q(L_1) = -Q$, deci caz echivalent cu primul ;

— al treilea caz, corespunde situației cînd este precizată înălțimea piezometrică $h(L_1^*)$ și se cere determinarea debitului drenajului $Q(L_1) = -Q$, amplasat în punctul $L_1 \neq L_1^*$; se observă că pentru $L_1^* = L_1$ acest caz se reduce la cel precedent.

În primul caz, prin rezolvarea directă a ecuației generale (3) (4), cu particularitățile condițiilor de mai sus (41), se obține expresia înălțimii piezometrice $h(L_1)$ sub forma :

$$h(L_1) = H(0)\frac{L - L_1}{L} + H(L)\frac{L_1}{L} - \frac{Q}{k}\cdot\frac{L_1(L-L_1)}{L}. \qquad (42)$$

Utilizînd modelul de calcul propus, se scrie ecuația matriceală (32), ținînd seama de faptul că din condițiile (41) în matricele (33) și (35) se rețin liniile de tipul A_H, B_H și se ia $p = 0$,

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2} & 1 \\ -\frac{L}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Phi(0)}{k} \\ \frac{\Phi(L)}{k} \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(0) - \frac{1}{2}\frac{Q}{k}L_1 \\ H(L) - \frac{1}{2}\frac{Q}{k}|L - L_1| \\ -\frac{Q}{k} \end{bmatrix}. \qquad (43)$$

Rezolvînd sistemul, rezultă

$$\frac{\Phi(0)}{k} = -\frac{H(L) - H(0)}{L} + \frac{Q}{k}\frac{L - L_1}{L},$$

$$\frac{\Phi(L)}{k} = \frac{H(L) - H(0)}{L} + \frac{Q}{k}\frac{L_1}{L}, \tag{44}$$

$$C = \frac{H(0) + H(L)}{2}.$$

Înlocuind aceste rezultate în (22) și luînd $n = 1$, $m = 0$, se obține expresia generală a înălțimii piezometrice $h(x)$ care, pentru $x = L_1$, devine (42).

În cel de al treilea caz cu $h(L_1^*)$ impus care conține în particular primele două (pentru $L_1^* = L_1$), sistemul matriceal (32) devine :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L_1}{2} \\ -\frac{L}{2} & 0 & 1 & -\frac{|L-L_1|}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{L_1^*}{2} & \frac{L_1^*-L}{2} & 1 & -\frac{|L_1^*-L|}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Phi(0)}{k} \\ \frac{\Phi(L)}{k} \\ C \\ -\frac{Q}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(0) \\ H(L) \\ 0 \\ h(L_1^*) \end{bmatrix} \tag{45}$$

Rezolvînd sistemul, se obține

$$\frac{\Phi(0)}{k} = H(0)\frac{1}{L_1^*} - h(L_1^*)\frac{1}{L_1^*},$$

$$\frac{\Phi(L)}{k} = H(0)\frac{L_1 - L_1^*}{L_1^*(L - L_1)} + H(L)\frac{1}{L - L_1} - h(L_1^*)\frac{L_1}{L_1^*(L - L_1)}, \tag{46}$$

$$C = \frac{H(L) + H(0)}{2},$$

$$\frac{Q}{k} = H(0)\frac{L - L_1^*}{L_1^*(L - L_1)} + H(L)\frac{1}{L - L_1} - h(L_1^*)\frac{L}{L_1^*(L - L_1)}.$$

Înlocuind în (22) se obține expresia generală a înălțimii piezometrice $h(x)$ într-un punct curent $x \in (0, L)$ în funcție de datele proble-

mei : $H(0)$, $H(L)$ și $h(L_1^*)$, în condițiile existenței unei linii de drenaj în punctul $X = L_1$, avînd debitul dat de relația (46—4) :

$$h(x) = -\frac{\Phi(0)}{k}\frac{X}{2} + \frac{\Phi(L)}{k}\cdot\frac{X-L}{2} + \frac{Q}{k}\frac{|X-L_1|}{2} + C. \quad (47)$$

Este de menționat că pentru $L_1^* = L_1$ relația (46—4) devine identică cu (42) regăsindu-se cazul întîi al exemplului considerat.

În mod similar se procedează și în cazul problemelor mai complexe, cu mai multe porțiuni cu debit distribuit și mai multe linii de drenaj sau/și linii cu cote piezometrice impuse : scrierea și rezolvarea ecuației matriceale, explicitarea și calculul înălțimilor piezometrice și a debitelor în punctele interioare dorite.

În cazul debitelor distribuite dependente de înălțimile piezometrice sînt necesare iterații succesive, modificîndu-se succesiv debitele distribuite în funcție de înălțimile piezometrice determinate din iterația precedentă.

3. CONCLUZII

Modelul matematic elaborat, bazat pe metoda elementelor de frontieră, permite rezolvarea unitară a celor mai complexe scheme de infiltrații unidimensionale : condiții la limită (la capetele-frontierele schemei) de tip înălțime piezometrică sau flux dat ; condiții interioare cu debit distribuit pe porțiuni (precipitații, evaporații) sau/și debite concentrate reprezentînd linii de drenaj sau/și de captare și puncte interioare cu cote piezometrice prescrise.

Rezolvarea oricărei probleme, indiferent de complexitatea ei, cum ar fi existența debitelor distribuite pe mai multe porțiuni, mai multe linii de drenaj și puncte interioare cu cote piezometrice impuse, se reduce la calculul matricelor caracteristici, rezolvarea sistemului liniar, și calculul înălțimilor piezometrice și a fluxurilor în punctele dorite.

Scrierea matriceală permite utilizarea fără dificultate a calculului numeric automat.

Primit în redacție la 18 noiembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. L. BAUER, H. WEINITSCHKE, *Landschaftspflege und Naturschutz* VEB, Gustavfische Verlag, Jena, 1967.
2. C. IVAN, *Calculul sistemelor de drenaj*. Edit. Tehnică, București, 1985.
3. R. DROBOT, și colab., *Modelarea matematică a resurselor de apă subterană*. Lito, Inst. de Meteorologie și Hidrologie, București, 1987.
4. R. DROBOT, *Utilizarea modelării matematice în gospodărirea apelor*, Hidrotehnica, 8 (1982).
5. M. MUSKAT, *The flow of homogenous fluids trough porous media*, Ann. Arbor, 2nd ed., 1946.
6. POLUBARINOVA KOCINA, *Teoria dvijenia gruntovih vod* Nauka, Moscva, 1952.

7. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei, București, 1963.
8. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1961.
9. H. ENE, S. GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1968.
10. I. DAVID, *Contribuții la studiul unor mișcări prin medii poroase*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara, 1973.
11. D. ROUSSELOT, *Modèles mathématiques de simulation des écoulements bidimensionnels permanents en milieux poreux*, Buletin du B.R.G.M. (2), Section III, 2 (1973).
12. M. VUKOVIC, A. SORO, *Dinamika podzemnih voda*, Institut „Iaroslav Cerni", Beograd, 1984.
13. G. KOVACS, *Mathematical modelling of Grand-water flow*, Procedings VITUKI, Budapest, 1978.
14. I. CREȚU, *Modelarea numerică a mișcării fluidelor prin medii poroase*, Edit. Tehnică, București, 1980.
15. I. DAVID *Metoda diferențelor finite cu pas variabil în probleme de filtrație*, Buletinul St. și Tehn. al IPTVT, seria Construcții, **23**, (**37**), 2 (1978).
16. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finit Element Method in Engineering Science*, Mc Graw-Hill, London, 1975.
17. S. HÎNCU, și colab., *Hidraulică aplicată. Simularea numerică a mișcării nepermanente a fluidelor, (partea a III-a)*, Edit. tehnică, București 1985.
18. P. G. KISELEV, *Îndreptar pentru calcule hi raulice*, Edit. Tehnică, Bucureși, 1988.
19. AL. DANCHIV, *Simularea numerică a transportului poluanților*, Hidrotehnica, 3 (1988).
20. I. LIGETT, *Location of Free Surface in Porous Media*, Journal of Hydr. Div., Proceding ASCE, **103**, HY4, April (1977).
21. H. BISCHOFF, *Die Berechnung von Potentialfeldern und der Randintegralmethode*,Technischer Bericht nr. 18, Institut für Hydraulik und Hydrologie der TH Darmstadt, 1977.
22. I. DAVID, *Grundwasserfassungsanlagen mit Filterrohren*, Technischer Bericht nr. 19, 1977, Institut für Hydraulik und Hydrologie, TH Darmstadt.
23. C. D. BREBBIA, *Recent Advances in Boundary Element Method*, Pentech Press, London, 1978.
24. P. K. BANARJCE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methode in Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company, London, New York, 1981.
25. C. A. BREBBIA, I. C. TELLES, L. C. WROBEL, *Boundary Element Techniques*, Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1984.
26. V. TH. HROMADKA, *The Complex Variable Boundary Element Method*, Springer—Verlang, Berlin—Haidelberg—New—York—Tokyo, 1984
27. GH. MÎNDRU, M. M. RĂDULESCU, *Analiza numerică a cîmpului electromagnetic*, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1986.
28 M. GAFIȚANU, V. F. POTERAȘU, N. MIHALACHE, *Elemente finite și de frontieră cu aplicații în calcul organelor de mașini*, Edit. Tehnică, București, 1987.
29. T. PETRILĂ, C. I. GHEORGHIU, — *Metode elemente finit și aplicații*, Edit. Academiei, București, 1987.
30. D. HOMENTKOVSCHI, D. COCORA, R. MĂGUREANU, *Some developements of the CVBEM-application to the mixed boundary value problem for the Laplace equation*, Preprint series in Mathematics N° 13/1986 — I.N.C.R.E.S.T., București.
31. I. DAVID, *Bazele teoretice ale metodei elementelor de frontieră pentru probleme de mișcări potențiale plane, fundamentate pe reprezentarea integrală Cauchy*, Simpozionul ICCPDC, 14—15 noiembrie, 1986, Timișoara, (volumul secției Construcții Hidrotehnice).
32. I. DAVID, GH. LAZĂR, *Calculul infiltrațiilor pe sub construcțiile hidrotehnice utilizînd metoda elementelor de frontieră*, Conferința energetică, I. P. București, noiembrie 1986.
33. I. DAVID, I. MOCA, *Metoda elementelor de frontieră indirectă în rezolvarea numerică a unei clase de probleme de potențial bidimensional, cu aplicații în hidrotehnică*, Al V-lea Simpozion Național de Informatică în Construcții, mai 1988, Timișoara, vol. 4.
34. M. R. OLTEAN, *Program de calcul pentru analiza infiltrațiilor prin metoda elementelor de frontieră*, Al V-lea Simpozion Național de Informatică în Construcții, mai 1988, Timișoara vol. 4.
35. C. IACOB, *Matematici clasice și moderne*, vol. III, Edit. Tehnică, București, 1981.

STABILITATEA MIȘCĂRII LICHIDELOR PE UN PLAN ÎNCLINAT *)

de ADELINA GEORGESCU

Institutul de Matematică, București

Transcrierea în termeni de analiză asimptotică a observațiilor calitative experimentale a permis, prin simpla aplicare coerentă a unei metode de perturbații regulate, regăsirea unor rezultate deduse în [1] prin raționamente intuitive complicate (§ 2,3); în plus s-a rezolvat exact problema de a doua aproximație asimptotică. În paragraful al 4-lea s-au interpretat, succint, rezultatele din [2] într-o problemă de ablație la reintrarea vehiculelor spațiale în atmosfera Pământului.

§ 1. ECUAȚIA ORR–SOMMERFELD

Ecuația Orr-Sommerfeld (în care $' \equiv d/dy$),

$$(\bar{u} - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \bar{u}''\varphi = (i\alpha Re)^{-1}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi),\ y \in (y_1, y_2) \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

guvernează stabilitatea liniară, față de perturbații sub formă de unde Tollmien-Schlichting, a mișcărilor paralele sau aproape paralele a fluidelor, vîscoase și incompresibile, în diferite domenii plane $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}, y \in (y_1, y_2)\}$. În anumite ipoteze simplificatoare se poate presupune că această ecuație se aplică și în cazul mișcării pe un plan înclinat (în prezența unei suprafețe libere), de profil de viteze $\bar{u}(y) = 1{,}5\ (1 - y^2)$, unde y este coordonata transversală pe stratul de fluid de pe plan, adimensionalizată cu grosimea d a acelui strat neperturbat, în care caz $y \in (0,1)$. Undele perturbatoare sînt moduri normale caracterizate de mărimi de forma $a(y)\exp\{i\alpha\ (x - ct)\}$, unde $a(y)$ este amplitudinea acelei mărimi perturbate, $\alpha = 2\pi\, d/\lambda$ este numărul de undă al perturbației, λ reprezintă lungimea undei, $i = \sqrt{-1}$, $c = c_r + ic_i$, c_r este viteza de propagare a undei perturbatoare,. iar c_i reprezintă factorul de amplificare. Funcția necunoscută $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi(y)$ este amplitudinea funcției de curent a perturbației. Numărul lui Reynolds Re se definește prin $Re = \bar{u}_a d/\nu$, unde ν este coeficientul de viscozitate cinematică, $\bar{u}_a = [gd^2 \sin \beta]/(3\nu)$, g reprezintă accelerația gravitațională, iar β unghiul de înclinare al planului față de orizontală. În afară de $c \in \mathbb{C}$, toate celelalte constante se consideră date, deci c este valoarea proprie a unei probleme la limită pentru (1.1), corespunzător căreia (1.1) are soluții nebanale φ. Vom considera numai cazul neutral ($c_i = 0$) în care situație $c(\equiv c_r) \in \mathbb{R}$ și vom scrie c în loc de c_r.

În cazul mișcărilor în canale, strat limită, jeturi, straturi de frecare, se consideră că instabilitatea apare la $Re \to \infty$ și α finit (i.e. $\alpha = O(1)$ pentru $Re \to \infty$) astfel încît $\alpha Re \to \infty$. În aceste situații (1.1) este ecuație

*) O parte a acestei lucrări a fost prezentată la simpozionul „Mecanica Fluidelor și Aplicațiile ei Tehnice", Suceava, 1986.

de perturbații singulare față de parametrul mic matematic $(i\alpha Re)^{-1}$. Spre deosebire de aceste cazuri, în mișcările pe plan înclinat experimentele indică alte ordine de mărime ale lui α și Re. Aceasta va implica efectuarea altor tipuri de dezvoltări asimptotice ale soluțiilor lui (1.1) în funcție de mărimea relativă a lui α față de Re.

Condițiile la limită care trebuie atașate lui (1.1) diferă de la caz la caz. În cazul de care ne ocupăm impunem anularea vitezei la baza fluidului ($y = 1$) și anularea tensiunii tangențiale și egalarea tensiunii normale din fluid cu tensiunea normală indusă de tensiunea superficială la suprafața liberă perturbată $y = \eta(x)$ dar asimilată cu suprafața liberă neperturbată $y = 0$, adică

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0, \quad \varphi''(0) + [\alpha^2 - 3(c - 1{,}5)^{-1}]\varphi(0) = 0,$$
$$\alpha(3c\operatorname{ctg}\beta + \alpha^2 S Re)(c-1{,}5)^{-1}\varphi(0) + \alpha[Re(c-1{,}5) + 3i\alpha]\varphi'(0) - i\varphi'''(0) = 0, \tag{1.2}$$

unde $S = T/(\rho \bar{u}_a^2)$, iar T este tensiunea superficială dimensională.

§ 2. UNDE DE PERTURBAȚIE LUNGI

La Re moderați, instabilitatea mișcării de pe planul înclinat ia naștere datorită perturbațiilor sub formă de unde lungi. În acest caz se presupune că $\lambda \gg d$, deci α este mic, iar Re nu este prea mare astfel încît (1.1) este o ecuație de perturbații regulate în parametrul mic $\alpha > 0$ și în consecință comportamentul asimptotic pentru $\alpha \to 0$ al soluției φ a lui (1.1) este în întregime descris de dezvoltarea regulată

$$\varphi(y) = \varphi_0(y) + \alpha\varphi_1(y) + \ldots \text{ pentru } \alpha \to 0, y \in [0, 1]. \tag{2.1}$$

Introducînd (2.1) în (1.1) și (1.2) obținem următoarea problemă de primă aproximație asimptotică (și anume problema redusă):

$$\varphi_0^{IV} = 0, \tag{2.2}$$

$$\varphi_0(1) = \varphi_0'(1) = 0, \quad \varphi_0''(0) - 3(c - 1{,}5)^{-1}\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'''(0) = 0, \tag{2.3}$$

a cărei soluție, abstracție făcînd de o constantă arbitrară pe care o luăm unitatea, este

$$\varphi_0(y) = y^2 - 2y + 1, \tag{2.4}$$

din penultima condiție (2.3) rezultînd de asemenea $c_0 = 3$. Deoarece în problema (1.1), (1.2) c este valoarea proprie și ea depinde de α, vom dezvolta și pe c în serie de puteri ale lui α,

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \ldots \text{ pentru } \alpha \to 0 \tag{2.5}$$

astfel încît problema de cea de a doua aproximație asimptotică pentru (1.1), (1.2) este

$$\varphi_1^{IV} = iRe\,[(\bar{u} - c_0)\varphi_0'' - \bar{u}''\varphi_0], \quad y \in (0,1), \tag{2.6}$$

$$\varphi_1(1) = \varphi_1'(1) = 0, \quad \varphi_1''(0) + \frac{4}{3}c_1\varphi_0(0) - 2\varphi_1(0) = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{2}{3}\varphi_0(0)(3\ \mathrm{ctg}\ \beta + \alpha^2 SRe) + \frac{3}{2}Re\ \varphi_0'(0) - i\ \varphi_1'''(0) = 0,$$

în care am ținut seama de dezvoltarea $\frac{1}{c - 1{,}5} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9}\alpha c_1 + \ldots$ pentru $\alpha \to 0$. Deoarece $\bar{u}(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2)$, din (2.6) rezultă $\varphi_1^{IV}(y) = -6iRey$ deci $\varphi_1(y)$ est un polinom de grad 5 în y, ai cărui coeficienți se determină, abstracție făcînd de un factor, din (2.7). În acest fel, după determinarea lui φ_1, se poate trece la calculul aproximațiilor asimptotice de ordin superior ale lui φ. În locul acestui procedeu simplu, în [1] se prezintă un algoritm mai complicat; remarcăm însă în [1] grija pentru precizarea ordinului de mărime al fiecărui termen, justificarea fizică a menținerii unora dintre termeni și a neglijării altora. Să observăm, de exemplu, că menținerea în (2.7) a termenului $\alpha^2 SRe$ arată că $S \sim O(\alpha^{-2})$ pentru $\alpha \to 0$, deci S este foarte mare. De asemenea, în [1] se dă o justificare interesantă a faptului că numerele Reynolds Re pot fi mici fără ca tensiunea superficială S și deci T să fie mică. Lucrarea [1] a cunoscutului hidrodinamician C. — S. Yih este un tip de expunere ideală pentru o formulare matematică în cadrul teoriilor de aproximație asimptotică. În ea se rezolvă pentru prima dată ecuația (1.1), nu în ipoteza obișnuită $\alpha Re \gg 1$, deci $Re \to \infty$, $Re \sim O(\alpha^{-1-\gamma})$, $\gamma > 1$ pentru $\alpha \to 0$, utilizată în teoria stabilității hidrodinamice timp de trei sferturi de veac, ci pentru $Re \sim O(1)$ pentru $\alpha \to 0$ ca mai sus, sau în alte ipoteze, ca în secțiunea următoare.

§ 3. NUMERE REYNOLDS MICI

Să considerăm acum cazul $Re \ll 1$, iar $\alpha = O(1)$; atunci ecuația (1.1) este, ca și în cazul lui α mic și Re finit din secțiunea precedentă, ecuație de perturbații regulate în raport cu parametrul mic Re, deci comportarea asimptotică pentru $Re \to 0$ a soluției sale este complet determinată de dezvoltarea regulată

$$\varphi(y) = \varphi_0(y) + \mathrm{Re}\ \varphi_1(y) + \ldots \text{ pentru } Re \to 0, \quad y \in [0, 1]. \tag{3.1}$$

Problema redusă a problemei (1.1), (1.2), corespunzătoare lui (3.1) este

$$\varphi_0^{IV} - 2\alpha^2\varphi_0'' + \alpha^4\varphi_0 = 0, \quad y \in (0,1), \tag{3.2}$$

$$\varphi_0(1) = \varphi_0'(1) = 0, \quad \varphi_0''(0) + [\alpha^2 - 3(c-1{,}5)^{-1}]\varphi_0(0) = 0,$$
$$\alpha(3\operatorname{ctg}\beta + \alpha^2 SRe)(c-1{,}5)^{-1}\varphi_0(0) + 3i\alpha^2\varphi_0'(0) - i\varphi_0'''(0) = 0, \tag{3.3}$$

și ea se obține formal neglijînd termenii ce conțin pe Re cu excepția termenului $\alpha^2 SRe$. Faptul că acest termen a fost menționat arată că $S \sim O(Re^{-1})$ pentru $Re \to 0$. Deoarece, ca și problema (2.2), (2.3), problema (3.2), (3.3) este liniară, soluția sa este unic determinată abstracție făcînd de un factor și are forma generală

$$\varphi_0(y) = e^{\alpha y} + A_2 e^{-\alpha y} + A_3 y e^{\alpha y} + A_4 e^{-\alpha y} y, \tag{3.4}$$

deoarece ecuația caracteristică, corespunzătoare ecuației liniare și cu coeficienți constanți (3.2), este $\lambda^4 - 2\alpha^2\lambda^2 + \alpha^4 = 0$ și această ultimă ecuație are rădăcinile $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$ multiple de ordin doi. Din cele patru condiții la limită se găsesc expresiile lui A_2, A_3, A_4 și c, notat c_0. Acest c_0 este reprezentarea asimptotică pentru $Re \to 0$ a lui c. i.e.

$$c \sim c_0 + Rec_1 + Re^2 c_2 + \ldots \text{ pentru } Re \to 0. \tag{3.5}$$

Expresiile menționate sînt cele din [1]. De exemplu avem

$$c_0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{1 + \operatorname{ch}2\alpha + 2\alpha^2}\left[3 + \frac{i(2\alpha - \operatorname{sh}2\alpha)}{2\alpha^2}(3\operatorname{ctg}\beta + \alpha^2 SRe)\right] \tag{3.6}$$

din care, pentru $\alpha \to 0$, se regăsește valoarea 3 din cazul $\alpha \to 0$, Re nu mare. De asemenea, dacă $\alpha \to \infty$ (dar astfel încît α Re rămîne mic, deci $\alpha = O(Re^{-1-\gamma})$, $\gamma > 1$ pentru $Re \to 0$), atunci din (3.6) rezultă $c_0 \to \frac{3}{2} - \frac{i}{2} SRe$. Această ultimă estimare a fost posibilă deoarece s-au dat ipoteze suplimentare privind ordinul de mărime al lui α față de cel al unei funcții de Re pentru $Re \to 0$. În cazul altor ipoteze suplimentare se obțin alte estimări așa cum se exemplifică și în [1]. În această situație singur experimentul decide care dintre aceste ipoteze sînt îndreptățite fizic.

Modelul de a doua aproximație asimptotică pentru $Re \to 0$ se obține imediat; noi îl prezentăm în ipoteza $\beta = \pi/2$ și $SRe = 0$, pentru a face comparație cu rezultatele găsite pe o cale ocolită, în [1]. Avem

$$\varphi_1^{IV} - 2\alpha^2\varphi_1'' + \alpha^4\varphi_1 = i\alpha[(\bar{u} - c_0)(\varphi_0'' - \alpha^2\varphi_0) - \bar{u}''\varphi_0], \quad y \in (0,1), \tag{3.7}$$

$$\varphi_1(1) = \varphi_1'(1) = 0,\ \varphi_1''(0) + [\alpha^2 - 3(c_0 - 1{,}5)^{-1}]\varphi_1(0) +$$

$$+ \frac{3c_1}{(c_0 - 1{,}5)^2}\varphi_0(0) = 0,\quad \alpha(3\operatorname{ctg}\beta + \alpha^2 SRe)\left[\frac{\varphi_1(0)}{c_0 - 1{,}5} - \right. \tag{3.8}$$

$$\left. - \frac{c_1\varphi_0(0)}{(c_0 - 1{,}5)^2}\right] + 3i\alpha^2\varphi_1'(0) + \frac{\alpha\varphi_0'(0)}{c_0 - 1{,}5} - i\varphi_0'''(0) = 0,$$

în care am ţinut seama că $\dfrac{1}{c - 1{,}5} = \dfrac{1}{c_0 - 1{,}5} - \dfrac{c_1}{(c_0 - 1{,}5)^2}Re + \ldots$ pentru $Re \to 0$. Rezolvarea ecuaţiei liniare, neomogene, cu coeficienţi constanţi (3.7) se poate face uşor prin metoda variaţiei constantelor : soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare lui (3.7)

$$\varphi_{10}^{IV} - 2\alpha^2\varphi_{10}'' + \alpha^4\varphi_{10} = 0 \tag{3.7}'$$

este $\varphi_1(y) = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y} + C_3 y e^{\alpha y} + C_4 y e^{-\alpha y}$. Se consideră că în această expresie coeficienţii sînt funcţii $C_i(y)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Aceste funcţii sînt primitivele funcţiilor $C_1'(y)$, $C_2'(y)$, $C_3'(y)$, $C_4'(y)$ care verifică sistemul algebric

$$C_1'(y)\varphi_{01}(y) + C_2'(y)\varphi_{02}(y) + C_3'(y)\varphi_{03}(y) + C_4'(y)\varphi_{04}(y) = 0,$$

$$C_1'(y)\varphi_{01}'(y) + C_2'(y)\varphi_{02}'(y) + C_3'(y)\varphi_{03}'(y) + C_4'(y)\varphi_{04}'(y) = 0,$$

$$C_1'(y)\varphi_{01}''(y) + C_2'(y)\varphi_{02}''(y) + C_3'(y)\varphi_{03}''(y) + C_4'(y)\varphi_{04}''(y) = 0,$$

$$C_1'(y)\varphi_{01}'''(y) + C_2'(y)\varphi_{02}'''(y) + C_3'(y)\varphi_{03}'''(y) + C_4'(y)\varphi_{04}'''(y) =$$

$$= i\alpha[(\bar{u} - c_0)(\varphi_0'' - \alpha^2\varphi_0) - \bar{u}''\varphi_0],\qquad y \in (0,1)$$

unde $\varphi_{01}(y) = e^{\alpha y}$, $\varphi_{02}(y) = e^{-\alpha y}$, $\varphi_{03}(y) = e^{\alpha y}y$ şi $\varphi_{04}(y) = ye^{-\alpha y}$, deci $\varphi_{01}, \ldots, \varphi_{04}$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.7)′ (care este identică cu (3.2)). Calcule simple arată că determinantul Cramer al acestui sistem este $-16\alpha^4$, astfel că, ţinînd seama de expresia (3.4) a lui φ_0 rezultă că $C_1'(y), \ldots, C_4'(y)$ sînt polinoame înmulţite cu $e^{\alpha y}$ sau $e^{-\alpha y}$, deci se pot deduce imediat primitivele lor $C_i(y)$. Atunci soluţia lui (3.7), (3.8) este

$$\varphi_1(y) = \sum_{i=1}^{4} C_i(y)\varphi_{0i}(y) + \sum_{i=1}^{4} C_i\varphi_{0i}(y), \tag{3.9}$$

în care constantele C_i se determină din condiţiile la limită (3.8). În locul acestei soluţii exacte în [1] se rezolvă problema bilocală (3.7), (3.8) folosindu-se anumite aproximaţii. Din (3.9) se poate deduce imediat comportamentul asimptotic al soluţiei acestei probleme pentru $\alpha \to \infty$, dar astfel încît αRe este mic.

Analog pot fi deduse aproximații asimptotice $\varphi_n(y)$ de ordin n pentru $Re \to 0$ ale soluției problemei (1.2) pentru ecuația Orr-Sommerfeld. Concomitent cu acestea se găsesc aproximațiile asimptotice de diferite ordine pentru c și deci asupra curbelor $c_i = const.$ și a curbei de stabilitate neutrală $c_i = 0$ ($c_i \equiv \mathrm{Im} c$).

O analiză asimptotică similară poate fi efectuată pentru unde perturbatoare foarte scurte i.e. $\alpha \to \infty$ și Re finit. În acest fel, dacă pierderea stabilității este legată de perturbații ondulatorii foarte lungi, foarte scurte sau Re foarte mici în locul rezolvării problemei (1.1), (1.2) se rezolvă problemele de aproximație asimptotică prezentate, care sînt mult mai ușoare. Dacă pierderea stabilității mișcării filmului de lichid de pe planul înclinat nu este legată de valori foarte mari sau foarte mici ale lui α și Re rezultatele de mai sus se pot încă folosi dacă dezvoltările asimptotice stabilite rămîn valabile la valori moderate ale lui α și Re.

Cu ajutorul unor dezvoltări în serii asimptotice regulate se poate obține de asemenea alura curbelor $c_i(\alpha, Re) = \mathrm{const.}$ în planul (α, Re) pe baza anumitor ipoteze asupra ordinului de mărime a lui αc sau αRe pentru $\alpha \to 0$, $Re \to 0$ etc.

4. STABILITATEA FILMELOR DE LICHIDE ADIACENTE UNOR CURENȚI GAZOȘI RAPIZI

Această problemă a fost studiată intensiv începînd de prin anii 1965 ea fiind importantă în problema ablației la reintrarea vehiculelor spațiale în atmosfera Pămîntului. În această problemă trebuia determinată stabilitatea interfeței dintre un strat de lichid de lîngă un corp și curentul de aer supersonic din afara lui ca și caracteristicile oricăror unde care ar putea exista pe această interfață. Curentul supersonic presupus paralel cu stratul de lichid induce în acesta o mișcare cu profil de viteze liniar $\bar{u} = y$, aceasta fiind de asemenea o ipoteză. Pe de altă parte curentul de aer perturbă presiunea din stratul de lichid influențînd stabilitatea interfeței. Mai jos arătăm că, deși de la bun început s-au făcut ipoteze puternic simplificatoare asupra curgerii de bază, totuși problema care guvernează stabilitatea interfeței este atît de complicată încît nu se poate spune nimic despre valabilitatea dezvoltărilor asimptotice utilizate cu atît mai mult cu cît ecuațiile sînt neliniare și de perturbații singulare. Aceeași situație se întîlnește și în majoritatea aplicațiilor mecanicii fluidelor în aviație și în multe probleme de fizică și în aplicațiile acestuia; de aceea în aceste cazuri *se admit drept valabile acele dezvoltări asimptotice coerente* i.e. *care duc la calcule necontradictorii* [3], drept virtute principală a unei teorii asimptotice fiind considerată tocmai această coerență. În lucrarea noastră [4] abordarea unora dintre cele mai simple probleme ne-a permis în plus să menționăm și cele cîteva rezultate riguroase de bază existente în literatura de specialitate.

Notînd cu $\psi(t, x, y)$ funcția de curent a perturbației din lichid, cu $\Phi(t, x, Y)$ potențialul vitezelor de perturbație din gaz, $Y = \frac{h_0}{l}(y - 1)$, $m^2 = M^2 - 1$, M-numărul lui Mach în gaz, Re-numărul lui Reynolds din lichid, h_0—grosimea filmului neperturbat de lichid, l — o lungime

caracteristică (e.g. lungime de undă a unei perturbații inițial sinusoidale), α — numărul de undă adimensional, γ — raportul căldurilor specifice, $h(t, x)$ — înălțimea interfeței perturbate, atunci problema stabilității interfeței dintre gaz și lichid la perturbații de amplitudine *finită* este guvernată de următoarea problemă cu frontieră liberă (i.e. necunoscută $h(t, x)$ pe care se pun unele dintre condiții)

$$\psi_{yyyy} = \alpha Re[\psi_{yyt} + (y + \psi_y)\psi_{xyy} - \psi_{yyy}\psi_x] - 2\alpha^2\psi_{xxyy} +$$

$$+ \alpha^3 Re[\psi_{xxt} + (y + \psi_y)\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xxy}] - \alpha^4\psi_{xxxx}, \tag{4.1}$$

$$x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ 0 < y < h$$

(care, dacă $\psi = \psi(y)e^{i(x-ct)}$ și neglijînd termenii pătratici, s-ar reduce la o ecuație analoagă ecuației Orr-Sommerfeld a teoriei liniare a stabilității mișcărilor plan paralele),

$$\Phi_{YY} - m^2\Phi_{xx} = M^2\left[\frac{1}{2}(\gamma - 1)(2\Phi_x + \Phi_x^2 + \Phi_Y^2)(\Phi_{xx} + \Phi_{YY}) +\right.$$

$$\left. + (2\Phi_x + \Phi_x^2)\Phi_{xx} + 2(1 + \Phi_x)(\Phi_Y\Phi_{xY} + \Phi_Y^2\Phi_{YY})\right], \tag{4.2}$$

$$x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \qquad \alpha(h - 1) \leqslant Y < \infty,$$

$$\psi_y(t, x, 0) = \psi(t, x, 0) = 0, \tag{4.3}$$

$$\Phi(t, x, Y) = 0 \text{ pentru } x \to -\infty, \tag{4.4}$$

$$h_t + (h_y + \psi_y)h_x + \psi_x = 0 \text{ la } y = h, \tag{4.5}$$

$$\alpha h_x - \Phi_Y + \alpha h_x\Phi_x = 0 \text{ la } Y = \alpha(h - 1), \tag{4.6}$$

$$(\psi_{yy} - \alpha^2\psi_{xx})(1 - \alpha^2 h_x^2) - 4\alpha^2\psi_{xy}h_x = 0 \text{ la } y = h, \tag{4.7}$$

$$p + G(h - 1) + \frac{2\alpha}{\mathrm{Re}}\psi_{xy}\frac{1 - \alpha^2 h_x^2}{1 + \alpha^2 h_x^2} + T\frac{h_{xx}}{(1 + \alpha^2 h_x^2)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{2\alpha}{Re}(\psi_{yy} - \alpha^2\psi_{xx})\frac{h_x}{1 + \alpha^2 h_x^2} = \frac{m}{2\alpha^2\mathrm{Re}}\chi\frac{2}{\gamma M^2}\left\{\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2}M^2(2\Phi_x + \right.\right. \tag{4.8}$$

$$\left.\left. + \Phi_x^2 + \Phi_Y^2)^{\gamma/\gamma-1} - 1\right\}, \text{ la } y = h \text{ și } Y = \alpha(h - 1)\right.$$

unde presiunea p, dedusă din prima ecuație de impuls, are forma

$$p_x = \frac{1}{\alpha Re}\psi_{yyy} - [\psi_{yt} + (y + \psi_y)\psi_{xy} - (1 + \psi_{yy})\psi_x] + \frac{\alpha}{Re}\psi_{xxy}$$

și poate fi eliminată din (4.8), iar χ, T și G sînt anumite constante pozitive, χ depinzînd de α^2. Funcțiile necunoscute sînt ψ, Φ și h, iar parametrul α se consideră mic, deci se presupune că perturbațiile sînt unde lungi. Pentru $\alpha \to 0$ se intuiesc următoarele comportamente asimptotice :

$$\psi = \psi_0 + \alpha\psi_1 + \ldots, \quad p = \frac{p_1}{\alpha} + p_0 + \alpha p_1 + \ldots,$$

$$\Phi = \alpha\Phi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \ldots \tag{4.9}$$

deci după șirul asimptotic $\{\alpha^{-1}, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ pentru $\alpha \to 0$. Din (4.5) rezultă de asemenea un același tip de comportament și pentru h. Ecuația (4.1) indică faptul că ea nu este ecuație de perturbații regulate deoarece ecuația redusă corespunzătoare $\psi_{yyyy} = 0$ deși avea același ordin cu (4.1) era de alt tip (ecuația cvaziliniară (4.1) fiind de tip hiperbolic într-un anumit sens). De altfel nici dezvoltările asimptotice (4.9) nu sînt serii regulate $\left(\text{căci în } p \text{ apare } \frac{1}{\alpha}\right)$ ceea ce sugerează aceea că problema (4.1) — — (4.8) nu este de tip strat limită. Înlocuind (4.9) în (4.1) — (4.8) se găsește, în particular, următoarea problemă de primă aproximație asimptotică :

$$\psi_{0yyyy} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h,$$

$$\psi_0 = \psi_{0y} = 0 \text{ la } y = 0\,; \; \psi_{0yy} = 0 \text{ la } y = h\,;$$

$$p_1(t, x, h) = -(\chi m \mathrm{Re})\Phi_{1x}(t, x, 0) \text{ la } y = h\,;$$

$$p_{-1x} = \mathrm{Re}^{-1}\psi_{0yyy}, \; \Phi_{1YY} - m^2\Phi_{1xx} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \; \alpha(h-1) \leqslant Y < \infty,$$

$$\Phi_1 = 0 \text{ la } x \to -\infty, \qquad \Phi_{1Y} = h_x \text{ la } Y = 0.$$

Problema de a doua aproximație este mai complicată dar de asemenea se poate integra complet. Atunci, din (4.5) obținem următoarea ecuația neliniară cu derivate parțiale în h :

$$h_t + hh_x - \frac{\partial}{\partial x}\left\{2a_3h^3 + \alpha Re\left[2b_3h^3 + \frac{5}{12}a_{2t}h^4 + \frac{3}{20}(3a_{3t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1 + 2a_2)a_{2x}h^5 + \frac{7}{30}(1 + 2a_2)\, a_{3x}h^6 + \frac{2}{7}a_3a_{3x}h^7\right]\right\} + O(\alpha^2) = 0, \tag{4.10}$$

în care a_3, b_3 și a_2 sînt funcții cunoscute de $\Phi_1(t, x, 0)$. Se presupune acum că $h(t, x) = 1 + \varepsilon\eta(t, x)$ adică ecuația interfeței perturbate (adimensionalizate) diferă foarte puțin de cea a interfeței neperturbate, ε fiind un parametru mic. În fond h s-a scris ca sumă dintre 1 și un termen a cărui

intensitate este de un ordin de mărime mai mică ca 1 i.e. $h = 1 + \varepsilon\eta$, unde $\varepsilon\eta \ll 1$. Mai departe se presupune că $\Phi_1 = \varepsilon\varphi_1$ și $\Phi_2 = \varepsilon^2\varphi_2$, iar $\alpha = \varepsilon^3\tilde{\alpha}$, unde φ_1, φ_2 și $\tilde{\alpha}$ sînt de ordinul $O(1)$. În acest fel ordinele de mărime ale lui Φ_1, Φ_2 și α s-au corelat cu cele ale lui h. Acest lucru este intuit, n-are o bază fizică sau matematică. Faptul dacă această intuire a fost corectă poate fi verificat prin concordanța rezultatelor finale cu experimentul. În [2] se menționează cîteva alte studii bazate pe alte ipoteze care nu s-au verificat experimental. Mai departe în [2] se dezvoltă $\varepsilon\eta$ sub forma seriei

$$\varepsilon\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [\eta_n(t)e^{inx} + \bar{\eta}_n(t)e^{-inx}],$$

care introdusă în ecuația lui h conduce la un sistem infinit de ecuații diferențiale ordinare neliniare de tipul

$$\frac{d\eta_i}{dt} = f(\eta_1, \eta_2, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots$$

pe care-l trunchiază la $i = 1, 2, 3$ și în care oprește doar termeni de ordin $O(\varepsilon^5)$ pentru η_1, $O(\varepsilon^3)$ pentru η_2 și $O(\varepsilon)$ pentru η_3. În sfîrșit, pentru acel sistem de trei ecuații diferențiale ordinare în $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$ se presupune că are o soluție a cărei comportare asimptotică pentru $\varepsilon \to 0$ se poate obține folosind metoda scărilor multiple i.e. alegînd

$$\eta_n(t) = \sum_{m=0}^{5} \varepsilon^m \eta_{nm}(T_0, T_1, \ldots, T_5),$$

unde $T_m = \varepsilon^m t$. Introducînd această sumă în sistemul menționat se obțin ecuațiile pentru η_{nm} și corespunzător soluțiile $\eta_{nm}(t)$ care permit studiul stabilității interfeței.

Deși nici unul dintre pașii menționați n-are o justificare teoretică, acest gen de calcule sînt curent folosite în lucrările aplicative, algoritmele de calcul putînd fi găsite de exemplu în [5], [6].

Primit în redacție la 15 decembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. — S. YIH, *Stability of liquid flow down an inclined plane*, The Physics of Fluids, **6**, 3 (1963).
2. A. — H. NAYFEH, W.S. SARIC, *Nonlinear stability of a liquid film adjacent to a supersonic stream*, J. Fluid Mech., (1973).
3. R. KH. ZEYTOUNIAN, *Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides*, seria *Lecture Notes in Physics*, **245**, Springer—Verlag, Berlin, Hidelberg, New York, 1986.
4. ADELINA GEORGESCU, *Aproximații asimpatice*. Edit. Tehnică, București, 1989.
5. A. — H. NAYFEH, *Perturbation Methods*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
6. A. — H. NAYFEH, D. T. MOOK, *Nonlinear Oscillations*, seria *Pure and Applied Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, 1979.

intensități este de un ordin de mărime mai mic ca 1 i.e. $\lambda = 1 - \varepsilon\chi$, unde $\chi \in \mathbb{R}$. Mai departe se presupune că $\Phi_1 = \varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1$, $\Phi_2 = \varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2$, unde φ_1, φ_2 și χ sunt de ordinul $O(1)$. În acest fel ordinele de mărime ale lui Φ_1, Φ_2 și χ sunt corelate cu cele ale lui λ. Acest lucru este intuitiv, numerele α_1 și α_2 fixează sau pretenționează faptul dacă necesită întregi sau fracționari pentru Φ verificat prin comparația rezultatelor finale cu experimentul. În [2] se menționează câteva alte studii bazate pe aceleași tipuri de ipoteze care au același scop experimental. Mai departe în [2] se dezvoltă φ_1 sub forma seriei

$$\varphi_1(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n [\chi_{n0}(t)e^{i\omega t} + \overline{\chi}_{n0}(t)e^{-i\omega t}],$$

care introdusă în ecuația lui λ conduce la un sistem infinit de ecuații diferențiale ordinare de tipul

$$\frac{d\chi_{ij}}{dt} = f(\chi_{ij}, \chi_{kl}, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots$$

pe care-l trunchiază la $i = 1, 2, 3$ și în care apreciază doar termenii de ordin $O(\varepsilon^3)$ pentru φ_1, $O(\varepsilon^2)$ pentru χ_2 și $O(\varepsilon)$ pentru χ_3. În sfârșit, pentru același sistem de trei ecuații diferențiale ordinare în $\chi_{10}(t)$, $\chi_{20}(t)$, $\chi_{30}(t)$ se presupune că are o soluție a cărei comportare asimptotică pentru $\varepsilon \to 0$ se poate obține folosind metoda scalelor multiple i.e. alegând

$$\chi_{n0}(t) = \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^m \chi_{nm}(T_0, T_1, \ldots, T_k),$$

unde $T_m = \varepsilon^m t$. Introducând această sumă în sistemul menționat se obține ecuația pentru χ_{nm} și corespunzător soluția $\chi_{nm}(t)$ care permit studiul stabilității interfeței.

După noi mai dintre pași menționați mai sus o justificare teoretică, acest rezultat de calcule fiind corect folosite în lucrările aplicative algoritmele de calcul puternic și găsite de exemplu în [3], [4].

Primit în redacție la 15 decembrie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. C. [illegible] VIII. Stability of liquid flow down an inclined plane. The Physics of Fluids, 6, 3 (1963).
2. A. [illegible] H. ZAYTSEV, Wave Stability Analysis of a Liquid Film Adjacent to a Surface. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 4, Fluid Mech. (1973).
3. R. [illegible] ZEYTOUNIAN, Une méthode asymptotique de la mécanique des fluides, Series Lecture Notes in Physics, 335, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
4. ADRIANA GEORGESCU, Aproximații asimptotice, Editura Tehnică, București, 1986.
5. A. [illegible] H. ZAYTSEV, Perturbation Methods, John Wiley and Sons, New York, 1979.
6. A. [illegible] H. ZAYTSEV, D. T. WOOK, Nonlinear Oscillations, Series Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, New York, 1979.

CIOCNIREA OBLICĂ PLANĂ A DOUĂ RIGIDE

de ȘT. STAICU

Institutul Politehnic, București

Lucrarea studiază ciocnirea oblică plană dintre două rigide, utilizînd metode matriceale. Se stabilesc relații de calcul pentru percuția de contact și pentru coeficientul de restituire. În continuare se determină pierderea de energie cinetică și energia cinetică a vitezelor pierdute în timpul ciocnirii.

În lucrare se stabilesc relațiile matriceale cu privire la ciocnirea oblică a două rigide care efectuează mișcări plan-paralele.

Fie reperul fix $\Omega\xi\eta\zeta(T_0)$ în raport cu care se deplasează două rigide solidare cu triedrele proprii $C_1x_1y_1z_1$ (T_1) și $C_2x_2y_2z_2$ (T_2) (fig. 1). Considerînd că originile triedrelor coincid cu centrele de greutate ale celor două corpuri, parametri de poziție ai sistemului T_2 în raport cu reperul mobil T_1 sînt coordonatele relative x_{21}, y_{21} ale originii C_2 și unghiul θ dintre C_2x_2 și C_1x_1.

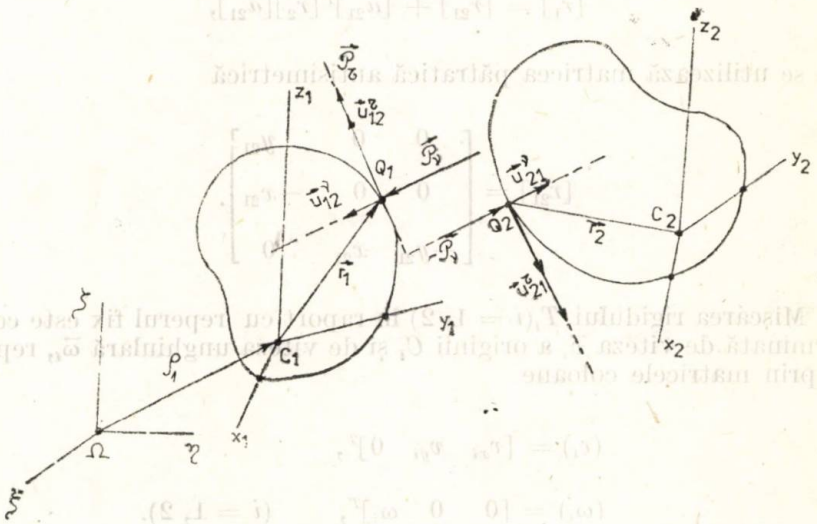


Fig. 1

Coordonatele punctului C_2 formează matricea coloană

$$(r_{21}) = [x_{21} \quad y_{21} \quad 0]^T, \tag{1}$$

iar unghiul θ apare în matricea $[a_{21}]$ de trecere din sistemul mobil T_1 în sistemul T_2:

$$[a_{21}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 5, p. 481—486

3—c. 1407

Fie Q_1 un punct al rigidului T_1, fixat prin coordonatele x_1, y_1 care formează matricea coloană

$$(r_1) = [x_1 \quad y_1 \quad 0]^T. \tag{3}$$

Poziția față de $C_1x_1y_1z_1$ a acestui punct, care coincide în timpul ciocnirii cu punctul Q_2 al rigidului T_2, este precizată prin relația matriceală

$$\begin{aligned} (r_1) &= (r_{21}) + [a_{21}]^T(r_2), \\ (r_2) &= [x_2 \quad y_2 \quad 0]^T \end{aligned} \tag{4}$$

sau de forma sa echivalentă

$$[r_1] = [r_{21}] + [a_{21}]^T[r_2][a_{21}], \tag{5}$$

dacă se utilizează matricea pătratică antisimetrică

$$[r_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{21} \\ 0 & 0 & -x_{21} \\ -y_{21} & x_{21} & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Mișcarea rigidului $T_i (i = 1, 2)$ în raport cu reperul fix este complet determinată de viteza $\vec{v}_i$ a originii C_i și de viteza unghiulară $\vec{\omega}_i$, reprezentate prin matricele coloane

$$\begin{aligned} (v_i) &= [v_{xi} \quad v_{yi} \quad 0]^T, \\ (\omega_i) &= [0 \quad 0 \quad \omega_i]^T, \qquad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{7}$$

Pentru a studia ciocnirea oblică a corpurilor de mase m_1 și m_2, se calculează mai întîi cantitățile de mișcare

$$(H_i) = [m_i]\,(v_i), \tag{8}$$

unde

$$[m_i] = \begin{bmatrix} m_i & & \\ & m_i & \\ & & m_i \end{bmatrix} \tag{9}$$

sînt matricele diagonale ale maselor.

Matricele coloane ale momentelor cinetice în raport cu originea referențialului fix $\Omega\xi\eta\zeta$ sînt date de relațiile

$$(K_{\Omega i}) = [m_i][a_{i0}][\rho_i][a_{i0}]^T(v_i) + [J_i][\omega_i], \tag{10}$$

unde

$$[J_i] = \begin{bmatrix} J_{x_i} & -J_{x_iy_i} & -J_{x_iz_i} \\ -J_{y_ix_i} & J_{y_i} & -J_{y_iz_i} \\ -J_{z_ix_i} & -J_{z_iy_i} & J_{z_i} \end{bmatrix} \tag{11}$$

sînt matricele tensorilor de inerție ai rigidelor, calculate față de axele triedrelor proprii [1]. Să mai remarcăm că matricele de transformare $[a_{i0}]$ realizează trecerea din sistemul $\Omega\xi\eta\zeta$ în sistemele proprii ale rigidelor și că matricele antisimetrice $[\rho_i]$ sînt asociate vectorilor de poziție $\vec{\rho}_i$ ai centrelor de greutate, exprimați prin

$$(\rho_i) = [\xi_i \quad \eta_i \quad 0]^T. \tag{12}$$

Se izolează cele două corpuri și se introduc în punctele de contact percuțiile normale

$$\vec{\mathscr{P}}^{\nu}_{12} = \mathscr{P}_{\nu}\vec{u}^{\nu}_{12}, \quad \vec{\mathscr{P}}^{\nu}_{21} = \mathscr{P}_{\nu}\vec{u}^{\nu}_{21}, \tag{13}$$

pe direcțiile versorilor normali la suprafețe în punctele Q_1, Q_2 și percuțiile tangențiale

$$\vec{\mathscr{P}}^{\tau}_{12} = \mathscr{P}_{\tau}\vec{u}^{\tau}_{12}, \quad \vec{\mathscr{P}}^{\tau}_{21} = \mathscr{P}_{\tau}\vec{u}^{\tau}_{21}, \tag{14}$$

pe direcțiile versorilor tangențiali, cu observația

$$\vec{u}^{\nu}_{12} = -\vec{u}^{\nu}_{21}, \quad \vec{u}^{\tau}_{12} = -\vec{u}^{\tau}_{21}. \tag{15}$$

Teorema cantității de mișcare, aplicată pe întregul interval al ciocnirii, se exprimă prin relațiile

$$\begin{aligned} (v_1'') - (v_1') &= \mathscr{P}_{\nu}[m_1]^{-1}(u^{\nu}_{12}) + \mathscr{P}_{\tau}[m_1]^{-1}(u^{\tau}_{12}), \\ (v_2'') - (v_2') &= \mathscr{P}_{\nu}[m_2]^{-1}(u^{\nu}_{21}) + \mathscr{P}_{\tau}[m_2]^{-1}(u^{\tau}_{21}), \end{aligned} \tag{16}$$

unde prin (v_1'), (v_2') s-au notat vitezele centrelor C_1, C_2 la începutul ciocnirii, iar prin (v_1''), (v_2'') — vitezele la sfîrșitul ciocnirii.

Teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă se exprimă cu ajutorul vitezelor unghiulare prin următoarele relații

$$\begin{aligned} (\omega_1'') - (\omega_1') &= \mathscr{P}_{\nu}[J_1]^{-1}[r_1](u^{\nu}_{12}) + \mathscr{P}_{\tau}[J_1]^{-1}[r_1](u^{\tau}_{12}), \\ (\omega_2'') - (\omega_2') &= \mathscr{P}_{\nu}[J_2]^{-1}[r_2](u^{\nu}_{21}) + \mathscr{P}_{\tau}[J_2]^{-1}[r_2](u^{\tau}_{21}). \end{aligned} \tag{17}$$

Matricele coloane ale versorilor sînt legate prin relaţiile

$$(u_{12}^{\nu}) + [a_{21}]^T(u_{21}^{\nu}) = 0,$$
$$(u_{12}^{\tau}) + [a_{21}]^T(u_{21}^{\tau}) = 0. \tag{18}$$

Pornind de la rezultatele obţinute în cazul ciocnirii normale a două corpuri [1], [2], [3], [5], [6], se defineşte coeficientul de restituire al direcţiei normale k_ν prin relaţiile

$$k_\nu = \frac{w_\nu - \vec{v}''_{Q_1}\vec{u}_{12}^{\nu}}{\vec{v}'_{Q_1}\vec{u}_{12}^{\nu} - w_\nu} = \frac{\vec{v}''_{Q_2}\vec{u}_{12}^{\nu} - w_\nu}{w_\nu - \vec{v}'_{Q_2}\vec{u}_{12}^{\nu}}, \tag{19}$$

unde w_ν este componenta normală a vitezelor la care au ajuns punctele de contact Q_1 şi Q_2 la sfîrşitul fazei de compresiune normală. Ţinînd seama de (18), rezultă formula

$$k_\nu = \frac{(u_{12}^{\nu})^T\{[a_{21}]^T(v_2'') - (v_1'') + [a_{21}]^T[w_2''](r_2) - [\omega_1''](r_1)\}}{(u_{12}^{\nu})^T\{(v_1') - [a_{21}]^T(v_2') + [\omega_1'](r_1) - [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}}, \tag{20}$$

asemănătoare cu relaţia coeficientului de restituire obţinută de N. Pandrea [5] pentru ciocnirea spaţială a două rigide.

Deoarece ciocnirea este oblică, vom extinde formulele (19) pentru a defini coeficientul de restituire al direcţiei tangenţiale [6]

$$k_\tau = \frac{\vec{v}''_{Q_1}\vec{u}_{12}^{\tau} - w_\tau}{\vec{v}'_{Q_1}\vec{u}_{12}^{\tau} - w_\tau} = \frac{\vec{v}''_{Q_2}\vec{u}_{21}^{\tau} - w_\tau}{\vec{v}'_{Q_2}\vec{u}_{21}^{\tau} - w_\tau}, \tag{21}$$

în care w_τ este viteza tangenţială la care ar ajunge punctele de contact Q_1 şi Q_2 în cazul unei compresiuni tangenţiale complete. Să observăm că situaţia limită a compresiunii tangenţiale maxime caracterizează ciocnirea tangenţială plastică ($k_\tau = 0$) şi că în cazul ciocnirii tangenţiale elastice ($k_\tau = 1$) componentele tangenţiale ale vitezelor rămîn neschimbate pe perioada ciocnirii. Relaţiile (21) conduc la expresia

$$k_\tau = \frac{(u_{12}^{\tau})\{(v_1'') - [a_{21}]^T(v_2'') + [\omega_1''](r_1) - [a_{21}]^T[\omega_2''](r_2)\}}{(u_{12}^{\tau})\{(v_1' - [a_{21}]^T(v_2') + [\omega_1'](r_1) - [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}}. \tag{22}$$

Vom înmulţi la stînga relaţiile (16), (17) cu matricele $(u_{12}^{\nu})^T$, $(u_{21}^{\nu})^T$, $\{[r_1]\,(u_{12}^{\nu})\}^T$ şi respectiv $\{[r_2]\,(u_{21}^{\nu})\}^T$ şi apoi vom însuma. Relaţia obţinută împreună cu (18) şi (20) conduc la ecuaţia

$$\mathscr{P}_\nu(u_{12}^{\nu})^T[s](u_{12}^{\nu}) + \mathscr{P}_\tau(u_{12}^{\tau})[s](u_{12}^{\nu}) =$$
$$= (1 + k_\nu)(u_{12}^{\nu})^T\{[a_{21}]^T(v_2') - (v_1') - \tag{23}$$
$$- [\omega_1'](r_1) + [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\},$$

unde s-a notat

$$[s] = [m_1]^{-1} + [m_2]^{-1} + [r_1]^T[J_1]^{-1}[r_1] +$$

$$+ [a_{21}]^T[r_2]^T[J_2]^{-1}[r_2][a_{21}]. \tag{24}$$

Se înmulțesc din nou aceleași relații (16), (17) ca matricele $(u_{12}^{\tau})^T$, $(u_{21}^{\tau})^T$, $\{[r_1]\,(u_{12}^{\tau})\}^T$ și respectiv $\{[r_2](u_{21}^{\tau})\}^T$ și se însumează; rezultă

$$\mathscr{P}_{\nu}(u_{12}^{\nu})^T[s](u_{12}^{\tau}] + \mathscr{P}_{\tau}(u_{12}^{\tau})^T[s](u_{12}^{\tau}) =$$

$$= (1 - k_{\nu})(u_{12}^{\tau})^T\{[a_{21}]^T(v_2') - (v_1') -$$

$$- [\omega_1'](r_1) + [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}. \tag{25}$$

Sistemul de ecuații (23), (25) conduce la componentele $\mathscr{P}_{\nu}$, $\mathscr{P}_{\tau}$ ale percuției de contact. Acestea se vor introduce în (16), (17) pentru a obține vitezele (v_1''), (v_2'') (ω_1''), (ω_2'') de la sfîrșitul fenomenului de ciocnire.

Energia cinetică a vitezelor pierdute pe perioada ciocnirii

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\{\delta(v_i)^T[m_i]\delta(v_i) + \delta(\omega_i)^T[J_i]\delta(\omega_i)\}, \tag{26}$$

are, în cazul ciocnirii oblice plane a celor două solide, următoarea expresie

$$E_p = \left\{\frac{1 + k_{\nu}}{2}\mathscr{P}_{\nu}(u_{12}^{\nu})^T + \frac{1 - k_{\tau}}{2}\mathscr{P}_{\tau}(u_{12}^{\tau})^T\right\}\{[a_{21}]^T(v_2') -$$

$$- (v_1') - [\omega_1'](r_1) + [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}. \tag{27}$$

Expresii ale energiei cinetice E_p, pentru ciocnirea normală a două corpuri au obținut C. Iacob [2], R. Voinea [3]. Dacă se calculează și pierderea de energie cinetică, pe perioada ciocnirii, adică

$$\Delta E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\{(v_i')^T[m_i](v_i')^T + (\omega_i')^T[J_i](\omega_i') -$$

$$- (v_i'')^T[m_i](v_i'') - (\omega_i'')^T \quad [J_i](\omega_i'')\}, \tag{28}$$

se obține

$$\Delta E = \left\{\frac{1 - k_{\nu}}{2}\mathscr{P}_{\nu}(u_{12}^{\nu})^T + \frac{1 + k_{\tau}}{2}\mathscr{P}_{\tau}(u_{12}^{\tau})^T\right\}\{[a_{12}]^T(v_2') -$$

$$-(v_1') - [\omega_1'](r_1) + [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}. \tag{29}$$

Relaţiile (27) şi (29) constituie în fond teoremele lui Kelvin [1] aplicate ciocnirii celor două rigide antrenate în mişcare plan-paralelă. Pornind de la cele două relaţii rezultă raportul

$$\frac{\Delta E}{E_p} = \frac{1-k_\nu}{1+k_\nu} \frac{1+\dfrac{1+k_\tau}{1-k_\nu}\sigma\alpha}{1+\dfrac{1-k_\tau}{1+k_\nu}\sigma\alpha}, \tag{30}$$

unde s-a notat

$$\sigma = \frac{\mathscr{P}_\tau}{\mathscr{P}_\nu}, \tag{31}$$

$$\alpha = \frac{(u_{12}^{\tau})^T\{[a_{21}]^T(v_2') - (v_1') - [\omega_1'](r_1) + [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}}{(u_{12}^{\nu})^T\{[a_{21}]^T(v_2') - (v_1') - [\omega_1'](r_1) + [a_{21}]^T[\omega_2'](r_2)\}}.$$

Relaţia (30) constituie o generalizare a teoremei lui Carnot, pentru cazul ciocnirii oblice plane a două corpuri.

Cazul particular pentru ciocnirea normală a două rigide se obţine uşor făcînd $\sigma = 0$ în rezultatele precedente. Procedînd astfel, relaţia (30) capătă forma simplificată

$$\frac{\Delta E}{E_p} = \frac{1-k_\nu}{1+k_\nu} \tag{32}$$

obţinută de C. Iacob [2], pe o cale directă, aplicînd metode vectoriale.

Primit în redacţie la 3 octombrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. STAICU, *Aplicaţii ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1986.
2. C. IACOB, *Asupra axiomelor mecanicii şocurilor şi a generalizării teoremei lui Lazare Carnot*, St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 2 (1985).
3. R. VOINEA, *O expresie generală a energiei cinetice a vitezelor pierdute în cazul ciocnirii a două corpuri solide*, Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Institutului Politehnic Bucureşti, mai 1984.
4. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUŞU, *Mecanica*, Edit. Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
5. N. PANDREA, *Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul vectorilor duali*, St. Cerc. Mec. Apl., **36**, 6 (1977).
6. M. MUNTEANU, *Asupra ciocnirii a două corpuri într-o mişcare generală*, St. Cerc. Mec. Apl., **37**, 4 (1978).

ASUPRA DESPRINDERII DINAMICE ÎN TURBOMAŞINI

de H. DUMITRESCU şi AL. DUMITRACHE

INCREST — Bucureşti

Palele turbomaşinilor sînt supuse la excitaţii foarte diverse care constituie un zgomot de fond de nivel ridicat, putînd uneori să devină periculos prin întreţinerea unor mişcări vibratorii permanente a palelor. În afara riscului de rezonanţă, a cărui origine poate fi evidentă sau foarte dificil de depistat, aceste vibraţii pot fi stabile, adică amortizate, sau pot să se amplifice şi să conducă la ruperi. Dintre comportările vibratorii posibile: rezonanţe, vibraţii de încovoiere pură, vibraţii de torsiune, vibraţii cuplate de încovoiere-torsiune, vibraţii complexe, în lucrare se analizează cazul vibraţiilor de încovoiere pură pentru condiţii de funcţionare în care apare fenomenul de desprindere dinamică.
Se prezintă un exemplu concret în care acest fenomen a condus la avarii foarte importante.

1. INTRODUCERE

Desprindere dinamică sau „dynamic stall" este o denumire folosită să descrie o succesiune complexă de evenimente avînd drept urmare întîrzierea apariţiei regimului critic pe profile şi aripi cu mişcări nestaţionare, la incidenţe ce depăşesc valoarea critică, statică. Această întîrziere a regimului critic este însoţită în mod obişnuit de variaţii pe intervale mari ale portanţei şi momentului de tangaj. Fenomenul apare pe palele rotorului de elicopter, pe aripile avioanelor în timpul execuţiei rapide a manevrelor, pe palele turbinelor de vînt rapide, pe palele turbomaşinilor axiale, şi chiar pe aripioarele insectelor. În multe cazuri desprinderea dinamică reprezintă factorul principal care limitează performanţele vehiculului sau structurii asociate.

Mecanismul desprinderii dinamice a fost prima oară identificat în cazul elicopterelor, cînd predicţia performanţelor elicopterelor de mare viteză pe baza metodelor aerodinamice convenţionale n-a corespuns încercărilor în zbor. S-a observat că valoarea mai mare a portanţei globale a rotorului de elicopter ar putea fi explicată dacă portanţa palei în timpul în care se mişcă în sens opus direcţiei de zbor (condiţia de retragere a palei) ar fi mai mare decît cea prezisă considerînd mişcarea staţionară. De asemenea s-a observat că un surplus de portanţă s-ar mai putea produce prin variaţia rapidă a incidenţei profilelor, fiind în legătură cu formarea unui nucleu de vîrtej pe profil, în timpul mişcării nestaţionare.

Astfel, caracteristica principală a fenomenului care apare pe un rotor tridimensional poate fi reprezentată experimental prin formarea unui nucleu de vîrtej la bordul de atac al unui profil căruia i s-a imprimat o mişcare oscilatorie [2]. Multe informaţii despre desprinderea dinamică au fost obţinute din experimentări pe diverse profile pentru o gamă largă de variaţie a unghiului mediu de incidenţă, a amplitudinii oscilaţiei, a frecvenţei mişcării (ω rad/s), a numărului Reynolds şi a numărului Mach [1].

Interesul pentru îmbunătăţirea manevrabilităţii avioanelor militare a extins domeniul de aplicabilitate al desprinderii dinamice. Astfel, la avioanele moderne care au posibilitatea să efectueze schimbări ultra-

rapide în dinamica zborului se va simți din plin efectul mișcării nestaționare asupra caracteristicilor regimului critic. Extinderea la maximum a posibilităților de mărire a performanțelor oferite de aerodinamica nestaționară este legată tocmai de controlul acestor curgeri desprinse, nestaționare. Controlul pozitiv, al curgerii desprinse, nestaționare presupune însă cercetări pentru cunoașterea efectelor produse asupra desprinderii dinamice, de o serie de parametri ca : tridimensionalitatea, compresibilitatea, tipul mișcării, numărul Reynolds.

Majoritatea cercetărilor aerodinamice referitoare la desprinderea dinamică au fost întreprinse pentru aplicațiile militare (elicoptere și avioane). Recent acest domeniu de cercetare a fost extins și asupra altor aplicații cum a fi turbinele de vînt pentru producerea energiei electrice, montate în zone climaterice care favorizează apariția acestui fenomen. Desprinderea dinamică se produce atît la turbinele de vînt cu ax orizontal (TVAO), cît și la turbinele de vînt cu ax vertical (TVAV), cercetările respective avînd drept scop limitarea portanței maxime la o valoare acceptabilă din punct de vedere al rezistenței la oboseală. În regim dinamic, o eroare de 30% în aprecierea sarcinilor aerodinamice, pe palele turbinei poate avea drept rezultat o reducere a duratei de funcționare a acesteia printr-un factor de 1/70 [1]. Cum însă din cauza efectelor desprinderii dinamice aceste erori pot fi de pînă la 100%, perfecționarea modelelor de aerodinamică nestaționară a devenit o condiție importantă pentru dezvoltarea tehnologiei turbinelor de vînt.

Deși mai rar întîlnită, desprinderea dinamică poate să apară și pe palele ventilatoarelor axiale care funcționează în condiții foarte severe, adică în domenii puternic afectate de desprinderea dinamică. La fel ca în cazul turbinelor de vînt problema principală o reprezintă corelația dintre valoarea maximă predeterminată a forței de portanță și limita admisă pentru rezistența la oboseală.

2 VIBRAȚII DE ÎNCOVOIERE PURĂ

La turbomașini, palele fiind în general mai puțin rigide la încovoiere decît la răsucire, ele vibrează în majoritatea cazurilor corespunzător primului mod de încovoiere [3]. Aceasta spre deosebire de aripile de avion și palele de elicopter la care cel mai des sînt întîlnite vibrațiile cuplate de încovoiere—răsucire [6].

Cînd în cadrul curgerii palele sînt antrenate într-o mișcare vibratorie de încovoiere pură din cauza unei excitații locale (șoc), a unei perturbații a curgerii principale etc., este important să se cunoască dacă mișcarea sa va amortiza sau se va amplifica, adică dacă în intervalul unei perioade a mișcării pala cedează energia perturbatoare fluidului, sau din contră o primește. Pentru aceasta în cele ce urmează se va analiza cu un model simplu procesul de transfer energetic care are loc între fluid și pală.

Să considerăm cazul unui profil aparținînd unei pale care vibrează pe direcția perpendiculară pe coardă. Atunci forța aerodinamică de portanță P depinde de viteza relativă a curgerii, care la rîndul ei variază în funcție de poziția instantanee a profilului. Presupunînd pentru simpli-

ficare că la fiecare moment se atinge starea de echilibru a mișcării (ipoteza de cvasistaționaritate), cu referire, la figura 1, se găsește

$$d\alpha \simeq \operatorname{tg}(d\alpha) = \dot{X} \cos\alpha / W, \tag{1}$$

$$dW = \dot{X} \sin\alpha, \tag{2}$$

în care α este unghiul de incidență al profilului în curgere staționară, $\overrightarrow{W}$ este viteza relativă a curgerii staționare și $\overrightarrow{\dot{X}}$ este viteza palei în mișcarea de vibrație de elongație, $X = X_0 \sin 2\pi f\ t$, X_0 și f fiind amplitudinea și respectiv frecvența.

Variația portanței datorită modificării modulului vitezei relative și unghiului de incidență este

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial P}{\partial W} dW, \tag{3}$$

iar energia înmagazinată de pală în cursul unei perioade se poate scrie :

$$e = -\int_0^{1/f} dP\, \dot{X} dt. \tag{4}$$

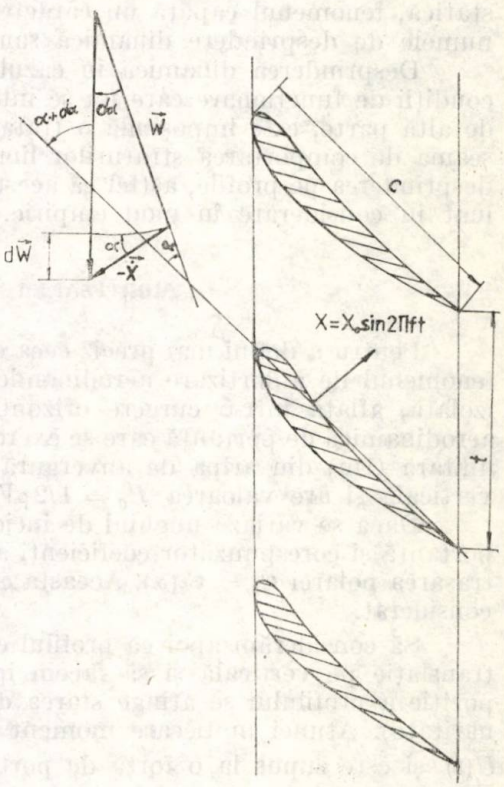


Fig. 1

Introducînd în (4) expresia cunoscută pentru forța de portanță

$$P = 1/2\ \rho W^2 c C_z' \tag{5}$$

în care ρ — densitatea fluidului, c — coarda profilului și C_z' — coeficientul de portanță al profilului în rețea, și ținînd seama de (1), (2) și (3), se găsește

$$e = -\pi^2 f X_0^2 \rho W c \left[\frac{\partial C_z'}{\partial x} \cos\alpha + \left(W \frac{\partial C_z'}{\partial w} + 2 C_z' \right) \sin\alpha \right]. \tag{6}$$

În funcționare normală, unghiul de incidență este mic astfel că al doilea termen poate fi neglijat în raport cu primul. Se vede atunci că dacă panta polarei este pozitivă $\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} > 0 \right)$, rezultă o amortizare aerodi-

namică foarte puternică. În schimb, în zona în care polara are o pantă negativă $\left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} < 0\right)$, deci cînd profilul este în regim de desprindere, amortizarea este negativă și fluidul transmite energie palei, mișcarea vibratorie amplificîndu-se. Aceste vibrații autoexcitate constituie fenomenul de vibrații de desprindere sau fluturare de tip „stall". În literatura de specialitate mai apar și alte denumiri mai mult sau mai puțin explicative ca de exemplu fluturare neliniară la incidențe mari [6] sau fluturare de desprindere [3]. La palele turbomașinilor, mai ales predomină vibrațiile de încovoiere [3], spre deosebire de suprafețele portante aviatice la care predominante sînt vibrațiile de răsucire [6].

Dacă acțiunile perturbatoare produc mișcări nestaționare, profilele și aripile avînd unghiuri de incidențe ce depășesc cu mult valoarea critică statică, fenomenul capătă un caracter dinamic mai complex de unde și numele de desprindere dinamică sau „dynamic stall".

Desprinderea dinamică în cazul turbomașinilor se produce pentru condiții de funcționare care nu se întîlnesc decît în mod excepțional. Pe de altă parte, este imposibilă o tratare teoretică corectă fără să se țină seama de comportarea straturilor limită nestaționare care condiționează desprinderea pe profile, astfel că acest fenomen este în general evitat sau luat în considerare în mod empiric.

3. AMORTIZAREA AERODINAMICĂ

Pentru a defini mai precis ceea ce în mod convențional se numește fenomenul de amortizare aerodinamică să considerăm un profil de pală izolată, aflată într-o curgere orizontală uniformă de viteza $\vec{V}_0$. Forța aerodinamică de portanță care se exercită asupra unei porțiuni de lungime unitară (1m) din aripa de anvergură infinită cu profilul respectiv, este verticală și are valoarea $P_0 = 1/2\,\rho V_0^2 C_z c$ (c este coarda profilului).

Dacă se variază unghiul de incidență al profilului se obțin forțe de portanță și corespunzător coeficienți adimensionali C_z diferiți care permit trasarea polarei $C_z = C_z(\alpha)$. Aceasta este o dată caracteristică a profilului considerat.

Să considerăm apoi că profilul este supus unei mișcări vibratorii de translație pe verticală și să facem ipoteza simplificatoare că la fiecare poziție a profilului se atinge starea de echilibru (ipoteza de cvasistaționaritate). Atunci în fiecare moment t profilul are o viteză instantanee $\vec{U}(t)$ și este supus la o forță de portanță $P(t)$ perpendiculară pe viteza $\vec{W}(t)$ a curgerii relative la profil, de componente $\vec{V}_0$ și $-\vec{U}(t)$ (fig. 2).

Se observă că în domeniul în care portanța este o funcție crescătoare de incidență, cînd profilul în mișcarea sa pe verticală urcă, viteza sa instantanee se compune cu viteza curgerii uniforme $\vec{V}_0$ pentru a da viteza relativă $\vec{W}(t)$ a cărei direcție face cu coarda profilului un unghi $\alpha(t) < \alpha_0$ care diminuează forța de portanță, opunîndu-se mișcării. Asemănător, cînd profilul coboară, $\vec{W}(t)$ face un unghi $\alpha(t) > \alpha$, care sporește forța de portanță, opunîndu-se de asemenea mișcării. Astfel, cînd profilul vibrează portanța cvasistaționară tinde să-l readucă în repaus. Fenomenul

rămîne adevărat și în cazul real al forțelor nestaționare care acționează asupra profilului și este ceea ce se cheamă amortizare aerodinamică.

În domeniul în care portanța scade cînd unghiul de incidență crește, rezultatul este invers, existînd o autoexcitație a profilului aflat în curgere. În acest caz ipoteza de cvasistaționaritate nu mai este valabilă, în fluid real fiind vorba de fenomenul numit vibrații de desprindere sau „stall

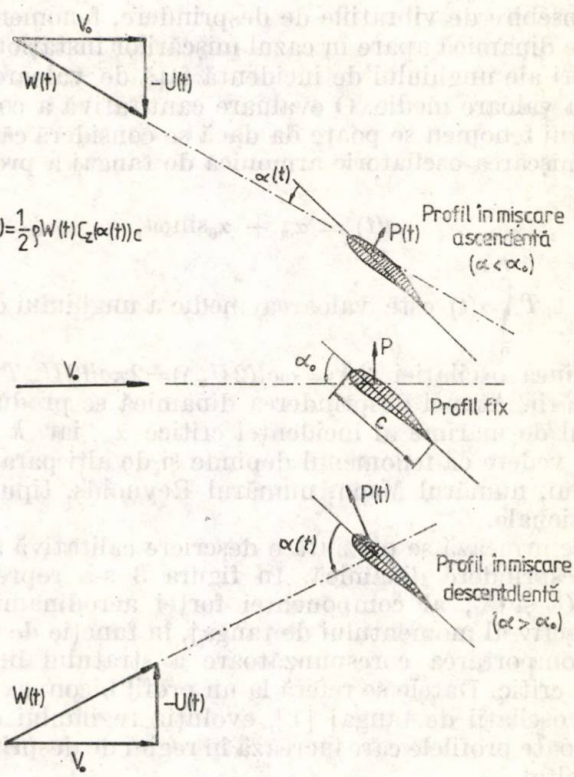


Fig. 2

flutter". Acest fenomen este periculos numai pentru acele regimuri de funcționare ale turbomașinilor în care poate să apară pe pale regimul critic de desprindere.

Pentru profilele palelor unui rotor de turbomașină fenomenele se petrec în mod identic ca în cazul palei izolate numai dacă pasul relativ este foarte mare. Astfel este greșit să se asimileze un profil de pală izolat cu un element al unei rețele de pale pentru care există efecte de interacțiune, la o perturbație a curgerii mișcarea fiecărei pale modificînd cîmpul curgerii din jurul palelor vecine.

Există teorii riguroase [3], [4] și [5], care permit un calcul general al forțelor nestaționare ce acționează asupra palelor unei rețele plane, dar aplicarea lui în cazul concret al unui rotor este foarte dificilă și nu se

poate face decît cu ajutorul multor ipoteze suplimentare. De regulă o asemenea problemă se rezolvă printr-un studiu experimental, chiar foarte parțial.

4. SCENARIUL DESPRINDERII DINAMICE

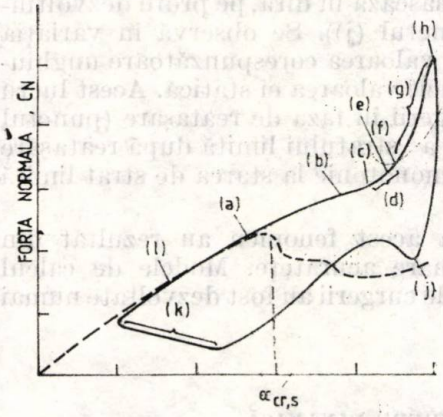
Spre deosebire de vibrațiile de desprindere, fenomenul mai complex de desprindere dinamică apare în cazul mișcărilor instaționare care conduc la variații mari ale unghiului de incidență față de valoarea critică statică considerată ca valoare medie. O evaluare cantitativă a condițiilor de producere a acestui fenomen se poate da dacă se consideră că modelul acestor mișcări este mișcarea oscilatorie armonică de tangaj a profilului de forma

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin \omega t, \tag{7}$$

în care $\alpha_m = 1/T \int_0^T \alpha(t)$ este valoarea medie a unghiului de incidență, α_0 este amplitudinea oscilației și $k = \omega c/(2U_\infty)) = 2\pi c/(2U_\infty T)$ este frecvența redusă a mișcării. Atunci desprinderea dinamică se produce cînd α_m și α_0 sînt de ordinul de mărime al incidenței critice α_m, iar $k \geqslant 0{,}05$. Trebuie avut totuși în vedere că fenomenul depinde și de alți parametri cum ar fi forma profilului, numărul Mach, numărul Reynolds, tipul mișcării, efectele tridimensionale.

În cele ce urmează se prezintă o descriere calitativă a evenimentelor asociate cu desprindere dinamică. În figura 3 s-a reprezentat variația coeficienților C_N și C_M, al componentei forței aerodinamice normală pe coardă și respectiv al momentului de tangaj, în funcție de unghiul de incidență α, și comportarea corespunzătoare a stratului limită pentru un profil în regim critic. Datele se referă la un profil biconvex simetric NACA 0012 care are oscilații de tangaj [1], evoluția regimului critic fiind însă tipică pentru toate profilele care lucrează în regim de desprindere dinamică, complet dezvoltat.

Caracteristica principală a desprinderii dinamice o constituie procesul formării și desprinderii vîrtejurilor concentrate, al cărui studiu a necesitat mult efort. În momentul în care se sesizează modificări ale distribuției de presiuni datorită acestui proces, desprinderea dinamică este deja începută. De aceea pentru înțelegerea procesului de întîrziere a apariției regimului critic trebuie să se analizeze secvențele fenomenului cu mult înainte de momentul apariției modificărilor în evoluția forțelor aerodinamice. Succesiunea cronologică a evenimentelor desprinderii dinamice începe în punctul (a) (fig. 3) în care incidența profilului depășește valoarea critică, statică, $\alpha > \alpha_v$ fără însă vreo modificare sesizabilă în curgerea din jurul profilului (atît vîscoasă, cît și potențială). În punctul (b) ($\alpha \sim 1{,}25\alpha_{cr}$ apare prima indicație de perturbație în curgerea vîscoasă (în stratul limită), cînd lîngă suprafața profilului la bordul de fugă curgerea se inversează. Procesul de inversare a curgerii avansează spre bordul de atac al profilului (punctul (d)), iar apoi la o incidență care depinde de mulți parametri (forma profilului, viteza de variație a incidenței, frecvența, numărul



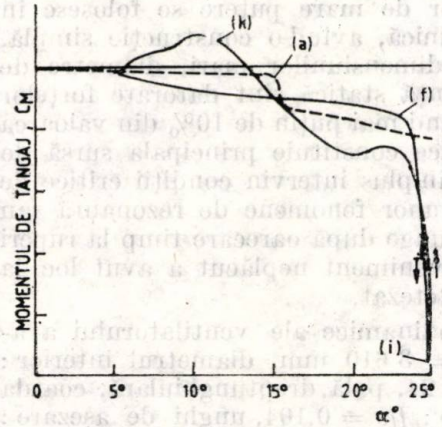
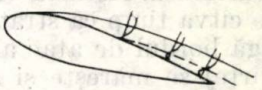


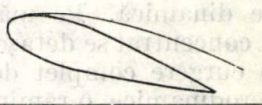
Fig. 3

(a) $\alpha > \alpha_{cr,s}$

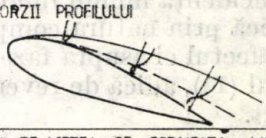
(b) PRIMA APARIȚIE A CURGERII INVERSE PE SUPRAFAȚĂ



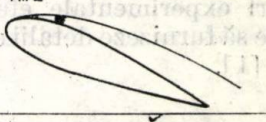
(c) VÎRTEJURI MARI APAR ÎN STRATUL LIMITĂ



(d) CURGEREA INVERSĂ SE ÎNTINDE PE CEA MAI MARE PARTE A CORZII PROFILULUI

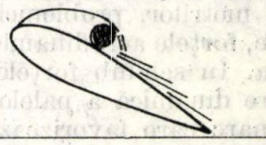


(e) UN NUCLEU DE VÎRTEJ SE FORMEAZĂ LÎNGĂ BORDUL DE ATAC



(f) PANTA CURBEI DE PORTANȚĂ CREȘTE

(g) SE PRODUCE SCĂDEREA CRITICĂ A MOMENTULUI

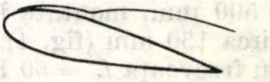


(h) ÎNCEPE SCĂDEREA CRITICĂ A PORTANȚEI

(i) VALOARE MAXIMĂ NEGATIVĂ A MOMENTULUI

(j) REGIM CRITIC COMPLET

(k) STRATUL LIMITĂ SE REATAȘEAZĂ ÎNCEPÎND DE LA BORDUL DE ATAC



(l) REVENIRE LA VALORILE SUBCRITICE

Reynolds, numărul Mach, efectele tridimensionale), stratul limită nu mai rămîne subțire și atașat, dezvoltîndu-se o curgere de tip dîră cu vorticitate foarte puternică. Această vorticitate generată lîngă suprafața profilului se menține cîtva timp ca strat de frecare pentru a deveni apoi vîrtej concentrat lîngă bordul de atac al profilului (punctul (e) în fig. 3). Mai departe acest vîrtej se mărește și se deplasează spre bordul de fugă, producînd variații rapide ale momentului de tangaj (punctele (f) și (i)). Totalitatea acestor evenimente constituie fenomenul cunoscut sub numele de desprindere dinamică. Pe măsură ce unghiul de incidență se micșorează, vîrtejul concentrat se detașează și se deplasează în dîră, pe profil dezvoltîndu-se o curgere complet desprinsă (punctul (j)). Se observă în variația forței aerodinamice, o rămînere în urmă, valoarea corespunzătoare unghiului de incidență minim fiind mai mică decît valoarea ei statică. Acest lucru se explică prin natura complicată a curgerii în faza de reatașare (punctul (k)) și efectul ei asupra fazei de relaxare a stratului limită după reatașare (punctul (1)), adică de revenire lentă nemonotonic la starea de strat limită obișnuit.

Majoritatea datelor referitoare la acest fenomen au rezultat din cercetări experimentale efectuate cu mare acuratețe. Modele de calcul capabile să furnizeze detalii echivalente ale curgerii au fost dezvoltate numai recent [1].

5. UN CAZ DE DESPRINDERE DINAMICĂ

Pentru răcirea hidrogeneratoarelor de mare putere se folosesc în general ventilatoare axiale cu turație mică, avînd o construcție simplă, cu pale drepte, neprofilate. Datorită dimensiunilor mari, diametre de ordinul metrilor, problemele de rezistență statică sînt datorate forțelor inerțiale, forțele aerodinamice reprezentînd mai puțin de 10% din valoarea acestora. În schimb forțele aerodinamice constituie principala sursă de solicitare dinamică a palelor, iar dacă în plus intervin condiții critice de funcționare care favorizează apariția unor fenomene de rezonanță sau ca cele descrise în secțiunile 3 și 4 se ajunge după oarecare timp la ruperi de pale prin oboseală. Un asemenea eveniment neplăcut a avut loc la unul din generatoarele hidrocentralei Retezat.

Caracteristicile geometrice și aerodinamice ale ventilatorului avariat au fost : diametrul exterior : $D_e = 3\,610$ mm, diametrul interior : $D_i = 3100$ mm, numărul de pale : $z = 24$, pală dreptunghiulară, coarda palei : $c = 360$ mm, profil subțire, curb : $f/c = 0{,}104$, unghi de așezare : $\delta = 21°$, pasul : $t = 439$ mm, pasul relativ : $t/c = 1{,}22$, turația nominală : $N = 500$ rot/min, debitul volumic : $Q = 44$ m^3/s, înălțimea de sarcină : $\Delta p = 230$ mm H_2O.

Structura de rezistență a suportului de susținere a hidrogeneratorului cuprinde șase brațe radiale, echidistante, profil dublu T cu talpa lată de 500 mm, montate în amontele ventilatorului, foarte aproape de rotor, circa 150 mm (fig. 4). Dîra formată de obstacolul din amonte excită palele cu frecvența $f_e = 50$ Hz, producînd un regim staționar al vibrațiilor forțate. Cu toate acestea, dacă variația incidenței profilului și corespun-

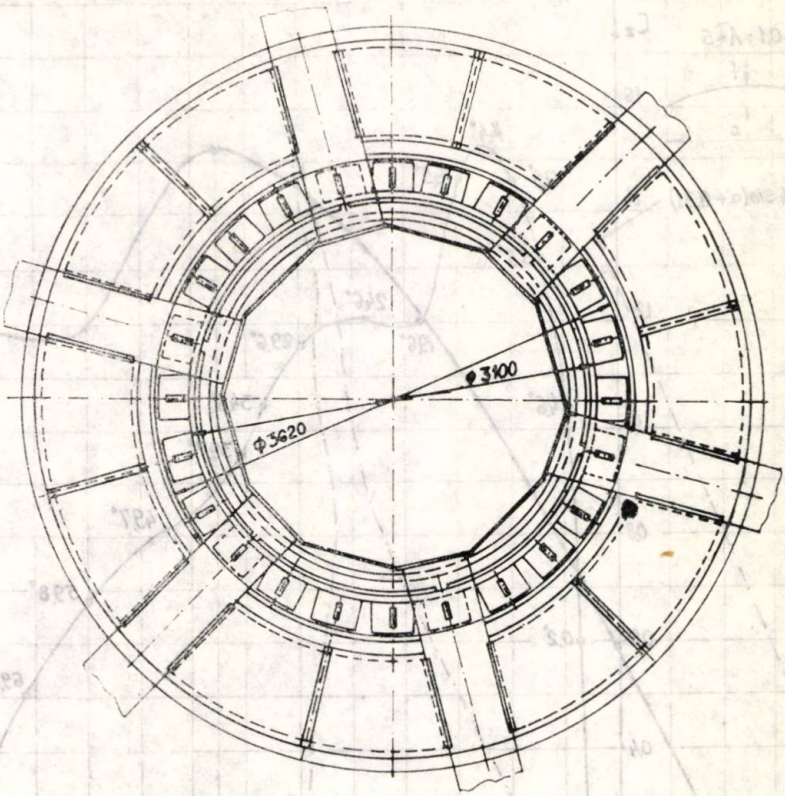


Fig. 4

zător a forțelor aerodinamice, ar fi avut loc în domeniul subcritic, $\alpha < \alpha_{cr} \simeq 15°$ (fig. 5) s-ar fi putut beneficia de efectul favorabil al fenomenului de amortizare aeridinamică și astfel să se mărească limita rezistenței la oboseală și implicit durata sa de funcționare. Din nefericire, după cum se vede din caracteristica aerodinamică statică a profilului utilizat (fig. 5), domeniul de variație a incidenței palei, 10° (zona liberă) $< \alpha \leqslant 21°$ (zona din dîră), corespunde condițiilor de apariție a fenomenului de desprindere dinamică. Aplicînd modelul mișcării oscilatorii de tangaj a profilului,

$$\alpha° = 16° + 5° \sin \ 100 \ \pi t, \ k = 0{,}628 \tag{8}$$

se vede într-adevăr că valorile existente în acest caz pentru unghiul mediu de incidență, amplitudinea și frecvența redusă a mișcării aparțin fără nici-un dubiu domeniului de producere a desprinderii dinamice.

Mai mult, măsurînd și frecvențele proprii ale palelor s-a găsit că pentru primul mod acestea se situează în domeniul $f_p = (150 - 185)$ Hz, ceea ce arată că unele pale ar fi putut să fie supuse și unui fenomen de

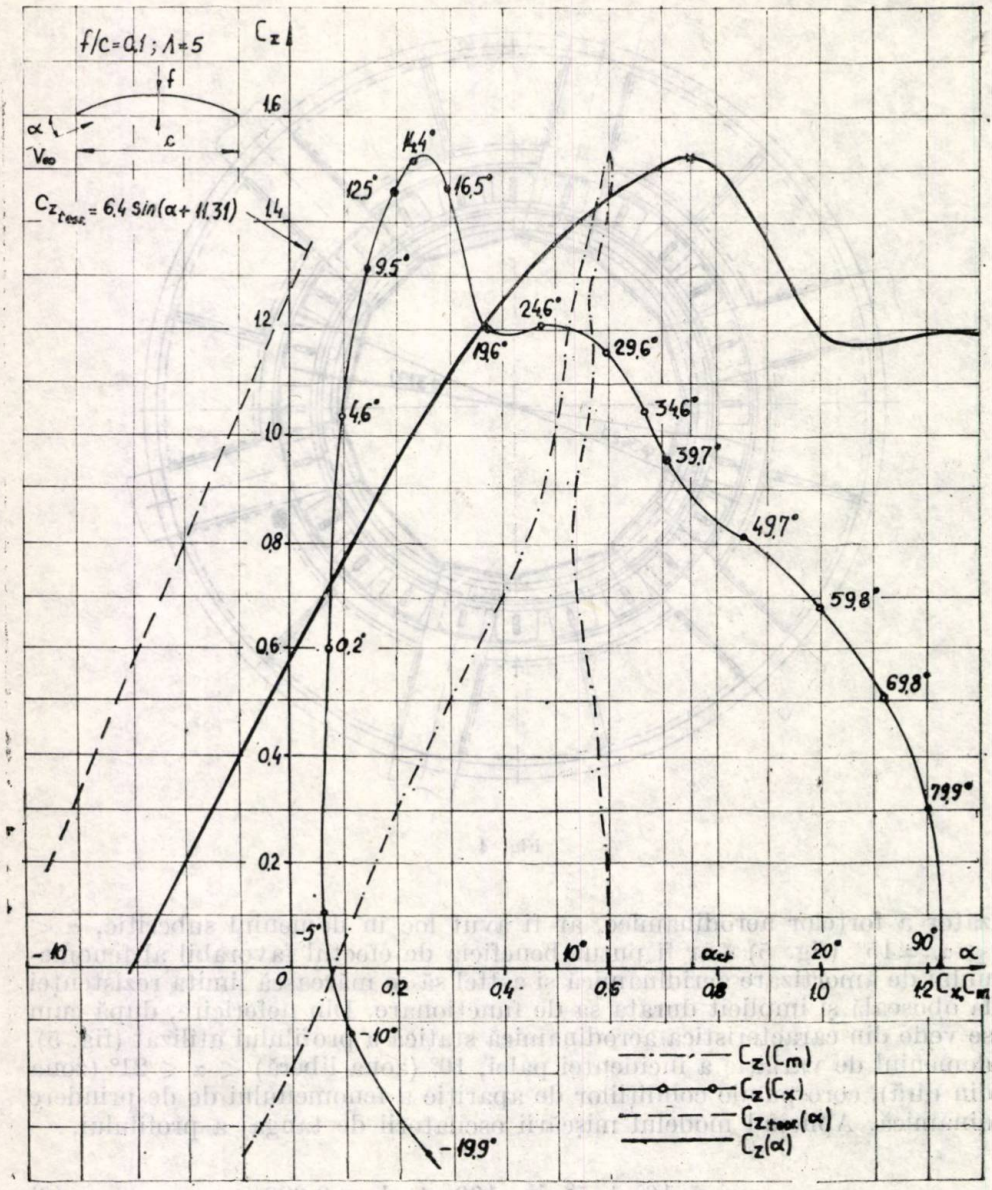


Fig. 5

rezonanță ; la un număr întreg (trei) de vibrații ale palci faza vibrațiilor palei este de fiecare dată, aceeași în momentul cînd ea este excitată de dîră (fig. 6).

Ca urmare a acestor fenomene asociate, de rezonanța și desprindere dinamică, după 1714 ore de funcționare, patru pale s-au fisurat și una s-a rupt prin oboseala materialului. În afară de ruperea în sine, partea supă-

rătoare a evenimentului a constituit-o mai ales avarierea generatorului de către pala ruptă și antrenată de curent.

Soluția de remediere propusă, în condițiile imposibilității modificării structurii de rezistență, deci a menținerii obstacolului din amonte, a constat, pe de o parte, în micșorarea unghiului de așezare a palelor

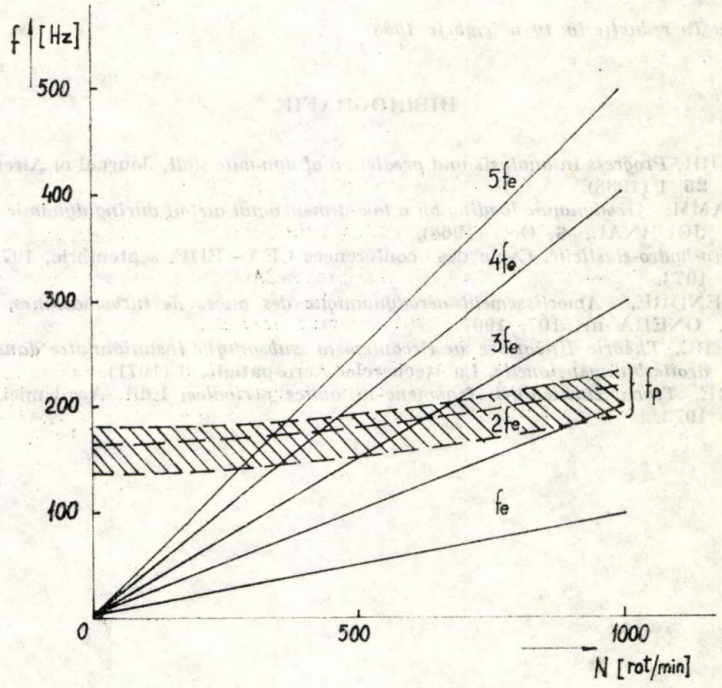


Fig. 6

astfel ca să se asigure permanent funcționarea în regim subcritic, iar pe de altă parte, în modificarea frecvenței proprii a palelor prin îngroșarea și mărirea curburii profilului, și mărirea numărului de pale, pentru a se evita fenomenul de rezonanță.

6. CONCLUZII

În cazul turbomașinilor sursele de excitație sînt numeroase, fenomenele aeroelastice sînt foarte variate și pot antrena pagube importante. Considerarea tuturor acestor fenomene este dificilă, astfel că în cel mai bun caz se ține seama de ele parțial, și mai ales în mod empiric. În majoritatea cazurilor însă se neglijează aspectele dinamice, considerîndu-se suficient numai calculul în regim permanent. Dar în aceste condiții este important să se cunoască faptul că riscurile de avarie sporesc substanțial cu gabaritul mașinilor, viteza și debitul de fluid, ceea ce corespunde evoluției actuale a mașinilor de mare putere.

În ceea ce privește cercetarea în domeniul desprinderii dinamice aceasta a făcut progrese importante în ultimii cinsprezece ani, nivelul

de înțelegere a fenomenelor depășind faza conjecturilor calitative. În prezent pe baza măsurătorilor cantitative ale mărimilor locale, instantanee ale curgerii vîscoase în timpul procesului de desprindere dinamică sînt dezvoltate modele empirice cantitative care să pună în evidență variațiile sarcinilor critice în timpul ciclului [1].

Primit în redacție la 10 noiembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. L. W. CARR, *Progress in analysis and prediction of dynamic stall*, Journal of Aircraft. **25**, 1 (1988).
2. N. D. HAMM, *Aerodynamic loading on a tow-dimensional airfoil during dynamic stall*, AIAA JOURNAL, **6**, Oct. (1968).
3. * * * *Aéro-hydro-elasticité*, Cycle des conférences CEA—EDF, septembrie, 1972, Eyrolles, 1973.
4. R. LEGENDRE, *Amortissement aérodynamique des aubes de turbomachines*, Note technique, ONERA nr. 107, 1967.
5. J. LECLERC, *Théorie linéarisee de l'ecoulement subsonique instationnaire dans une grille droite bidimensionelle*, La Recherche Aerospatiale, 3 (1971).
6. A. PETRE, *Teoria elasticității, fenomene dinamice periodice*, Edit. Academiei, București, 1973.

CALCULUL EFORTURILOR DE MEMBRANĂ ÎN TURNURILE DE RĂCIRE HIPERBOLICE

de. M. V. SOARE și D. IORDACHE

Institutul de Construcții București

Teoria de membrană rămîne un mijloc de investigare eficient pentru predimensionarea plăcilor curbe subțiri de beton armat în formă de turn hiperbolic. Se consideră două funcții de eforturi din care derivă apoi eforturile N_φ, N_θ și $N_{\varphi\theta}$. Rezolvarea este redusă, prin introducerea diferențelor finite, la relații de recurență. Pentru rezolvarea automată au fost elaborate două programe HIP 1 și HIP 2, scrise în limbaj FORTRAN. Un exemplu de calcul însoțit de diagrame de variație ale eforturilor ilustrează complet teoria dezvoltată.

1. INTRODUCERE

Condensatorii centralelor termice și nuclearo-electrice necesită o circulație abundentă a apei de răcire, care nu poate fi luată totdeauna dintr-un rîu sau canal. Sîntem deci adesea obligați să prevedem un sistem de răcire în circuit închis, în care apa de aducțiune servește doar pentru compensarea pierderilor prin evaporare. Un mod foarte avantajos de răcire constă în a face apa caldă să cadă de la o înălțime de cîteva zeci de metri, sub forma unei ploi fine, într-un curent de aer ascendent.

Acesta ia naștere, prin tiraj natural, într-un turn imens de secțiune variabilă, care acoperă sistemul de scurgere.

Primele turnuri din beton armat-materialul prin excelență utilizat pentru construcția turnurilor de răcire- copiau turnurile construite din lemn, cu sau fără schelet metalic și nu depășeau o înălțime de 40 m; ele constau dintr-o structură de rezistență aparentă, cu panouri de umplutură.

Utilizarea plăcilor curbe subțiri de tip hiperbolic, din beton armat, pentru turnurile de răcire cu tiraj natural a fost introdusă pentru prima dată de Van Herson în 1910. Primele turnuri de acest fel au fost construite cîțiva ani mai tîrziu la Emma Pit, Herleen (Olanda 1916).

Creșterea permanentă a puterii centralelor termice și nuclearo-electrice a făcut necesară construcția unor turnuri de dimensiuni din ce în ce mai mari. Turnuri depășind 160 metri înălțime au fost deja construite, iar turnuri de răcire avînd înălțimea de 200 m sau chiar mai mult sînt luate în considerare de diferiți autori.

Odată cu creșterea dimensiunilor generale au început să se pună noi și noi probleme. Ele sînt cu atît mai stringente, cu cît turnurile de răcire din beton armat moderne sînt poate cele mai mari structuri din plăci curbe subțiri construite în întreaga lume.

Reluînd o idee a lui D. P. Billington dintr-un studiu intitulat „Două decade de proiectare a turnurilor de răcire în S.U.A." [1], vom distinge, în această privință, trei perioade și anume

— perioada I (1952—1972) cînd proiectarea s-a făcut pe baza teoriei de membrană; ea a fost inițiată prin lucrările lui M. Soare [5] și R. Rabich [3];

— perioada a II-a (1972—1978) cînd a fost introdusă în calcule metoda elementelor finite și a început studiul voalării și al comportării dinamice a turnurilor;

— perioada a III-a (după 1978) cînd sînt abordate probleme neliniare, efectul imperfecțiunilor, încărcări limită și altele.

Deși teoria de membrană reprezintă cea mai simplificată metodă de calcul pentru plăcile curbe subțiri și nu permite determinarea corectă a stării de eforturi și de deformații în zonele marginale, ea rămîne un mijloc de investigare de prim ordin pentru predimensionarea plăcilor curbe subțiri de rotație în formă de turn și chiar pentru evaluarea siguranței la stabilitatea formei echilibrului.

Metoda diferențelor finite a fost aplicată sistematic de M. V. Soare [6], utilizînd, în principal, o funcție de eforturi F. Lucrarea citată conține și o bibliografie detaliată la care trimitem cititorul interesat.

Noi date privind acțiunea vîntului, creșterea considerabilă a înălțimii, variația grosimii peretelui turnului, fac ca soluțiile analitice să devină practic imposibile. În plus, implementarea calculatoarelor electronice a schimbat în largă măsură optica abordării calculului.

În studiul de față, primul dintr-o suită mai cuprinzătoare tratînd despre problemele proiectării turnurilor de răcire, am reluat calculul numeric în teoria de membrană, prin aplicarea diferențelor finite în metoda trapezului și metoda Runge-Kutta.

În locul unei funcții de eforturi unice, satisfăcînd o ecuație diferențială de ordinul al doilea, este mai simplu să se considere două funcții de eforturi, satisfăcînd un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul întîi. Fiind vorba de o problemă de valori inițiale, în ambele metode numerice de calcul se ajunge la relații de recurență (ușor de aplicat și manual). Pentru rezolvarea automatizată au fost elaborate două programe scrise în limbaj FORTRAN.

Ecuațiile diferențiale ale problemei sînt prezentate în paragraful al 2-lea, aplicarea metodei trapezului, respectiv metodei Runge-Kutta în paragrafele 3 și 4. Un exemplu de calcul relativ la un turn de răcire hiperbolic este dat în paragraful al 6-lea, iar în anexă sînt date notațiile și codificările și organigrama celui de-al doilea program de calcul.

2. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU DE MEMBRANĂ ALE PLĂCILOR SUBȚIRI DE ROTAȚIE

Ecuațiile de echilibru sînt scrise cel mai simplu în coordonatele unghiulare φ și θ; ele sînt bine cunoscute (vezi de exemplu [6]) și pot fi scrise sub forma

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_{\varphi\theta} r_0)}{\partial \varphi} + N_{\theta\varphi} r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_\varphi r_0)}{\partial \varphi} - N_\theta r_1 \cos\varphi + Y r_0 r_1 = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z, \tag{1c}$$

în care φ reprezintă unghiul pe care normala la suprafața mediană într-un punct oarecare îl face cu axa de rotație,

θ — unghiul pe care planul meridian trecînd prin punctul considerat îl face cu un plan meridian de referință,

r_0 — raza cercului paralel,

$r_1 = \dfrac{1}{\cos\varphi} \cdot \dfrac{dr_0}{d\varphi}$ raza de curbură a curbei meridiane (prima rază de curbură principală a suprafeței mediane),

$r_2 = \dfrac{r_0}{\sin\varphi}$ a doua rază de curbură principală a suprafeței mediane,

N_φ — efortul meridian.

N_θ — efortul inelar,

$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ — eforturile de lunecare,

X, Y, Z — componentele încărcării exterioare după tangenta la cercul paralel, tangenta la curba meridiană, respectiv după normală.

Convențiile de semne sînt cele utilizate în lucrarea [6].

Explicitînd pe N_θ din (1c)

$$N_\theta = -N_\varphi \frac{r_2}{r_1} - Zr_2, \tag{2}$$

și introducîndu-l în (1a), (1b), se ajunge la sistemul

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(N_{\varphi\theta} r_0^2) - \frac{r_0}{\sin^2\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(N_\varphi r_0 \sin\varphi) =$$

$$= \left(-X\sin\varphi + \frac{\partial Z}{\partial\theta}\right) r_0 r_1 r_2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(N_\varphi r_0 \sin\varphi) + \frac{r_1 \sin\varphi}{r_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}(N_{\varphi\theta} r_0^2) =$$

$$= -(Y\sin\varphi + Z\cos\varphi) r_0 r_1.$$

Un procedeu obișnuit de integrare a sistemului (1) sau (3) constă în dezvoltarea expresiilor componentelor încărcării exterioare și a eforturilor interioare în serii trigonometrice în raport cu variabila θ; rezultă astfel separarea variabilelor, găsirea soluției unui sistem de ecuații cu derivate parțiale fiind redusă la găsirea soluțiilor unor sisteme de ecuații diferențiale ordinare. Dezvoltările în serie sînt de forma

$$X = \Sigma X_n \sin n\theta,$$

$$Y = \Sigma Y_n \cos n\theta, \tag{4}$$

$$Z = \Sigma Z \cos n\theta;$$

$$N_\varphi = \Sigma N_{\varphi n} \cos n\theta,$$

$$N_\theta = \Sigma N_{\theta n} \cos n\theta, \tag{5}$$

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = \Sigma N_{\varphi\theta n} \sin n\theta$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

în care X_n, Y_n, Z_n sînt funcții bine determinate de unghiul φ, în timp ce $N_{\varphi n}$, $N_{\theta n}$, $N_{\varphi\theta n}$ sînt funcții pure de φ care urmează să fie determinate analitic sau numeric.

Introducînd seriile (4), (5) în sistemul (2), (3), rezultă *pentru fiecare armonică* n :

$$N_{\theta n} = -N_{\varphi n}\frac{r_2}{r_1} - Z_n r_2, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}(N_{\varphi\theta n} r_0^2)}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{n r_0}{\sin^2\varphi}(N_{\varphi n} r_0 \sin\varphi) = -(X_n r_0 + n Z_n r_2) r_0 r_1, \tag{7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}(N_{\varphi n} r_0 \sin\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{n r_1}{r_0 r_2}(N_{\varphi\theta n} r_0^2) = -(Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi) r_0 r_1. \tag{7b}$$

La plăcile subțiri de rotație în formă de turn este caracteristic faptul că ele sînt *deschise* la marginea superioară. Forma alungită pe verticală face ca să fie mai indicată utilizarea cotei z (în lungul axei de rotație) în locul unghiului meridian φ. În acest scop este folosită relația diferențială

$$r_1 \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\sin\varphi},$$

care permite trecerea de la variabila unghiulară φ, la cota z.

Cu ajutorul acestei relații, sistemul (7) ia forma

$$\frac{d(N_{\varphi\theta n} r_0^2)}{\mathrm{d}z} + \frac{n r_0}{r_1 \sin^3\varphi}(N_{\varphi n} r_0 \sin\varphi) = -(X_n r_0 + n Z_n r_2) r_2, \tag{8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}(N_{\varphi n} r_0 \sin\varphi)}{\mathrm{d}z} + \frac{n}{r_0^2}(N_{\varphi\theta n} r_0^2) = -(Y_n \sin\varphi + Z_n \cos\varphi) r_2. \tag{8b}$$

Pentru simplificarea scrierii și a calculelor se exprimă eforturile $N_{\varphi n}$ și $N_{\varphi\theta n}$ prin intermediul a două funcții de eforturi, conform relațiilor :

$$N_{\varphi\theta n} = -\frac{n F_n}{r_0^2}, \tag{9a}$$

$$N_{\varphi n} = \frac{G_n}{r_0 \sin\varphi}; \tag{9b}$$

cu acestea, ecuațiile (8) devin :

$$\frac{dF_n}{dz} = \frac{r_0}{r_1 \sin^3 \varphi} G + \left(\frac{1}{n} X_n r_0 + Z_n r_2 \right) r_2, \tag{10a}$$

$$\frac{dG_n}{dz} = \frac{n^2}{r_0^2} F - (Y_n \sin \varphi + Z_n \cos \varphi) r_2. \tag{10b}$$

Sistemul precedent îl vom particulariza pentru două cazuri de încărcare importante și anume încărcări axial simetrice și încărcări normale la suprafața mediană.

1° Cazul încărcărilor axial simetrice presupune $n = 0$ și $X_0 \equiv 0$. Rezultă că eforturile de lunecare sînt nule $N_{\varphi 00} = 0$; ecuația (10a) este identic verificată, iar (10b) se scrie

$$\frac{dG_0}{dz} = - (Y_0 \sin \varphi + Z_0 \cos \varphi) r_2. \tag{11}$$

Ea este aplicabilă în cazul greutății proprii și al armonicei $n = 0$ din acțiunea vîntului.

2° Cazul încărcărilor normale la suprafața mediană presupune $X_n, Y_n = 0$. Sistemul (10) se reduce la următorul :

$$\frac{dF_n}{dz} = \frac{r_0}{r_1 \sin^3 \varphi} G_n + Z_n r_2^2, \tag{12a}$$

$$\frac{dG_n}{dz} = \frac{n^2}{r_0^2} F_n - Z_n r_2 \cos \varphi \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12b}$$

O ultimă simplificare intervine în cazul cînd curba meridiană este o hiperbolă de ecuație

$$\frac{r_0^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

(cu a semiaxa reală și b semiaxa imaginară).

Este demonstrat (vezi [6], p. 226) că între elementele geometrice ale hiperboloidului există relația

$$\frac{r_0}{r_1 \sin^3 \varphi} = - \frac{a^2}{r_0^2 \operatorname{tg}^2 A}$$

în care $\operatorname{tg} A = b/a$ (A unghiul asimptotelor hiperbolei meridiane cu axa Or_0).

Atunci ecuația (10a), respectiv (12a) se scriu :

$$\frac{dF_n}{dz} = - \frac{a^2}{r_0^2 \operatorname{tg}^2 A} G_n + \left(\frac{1}{n} X_n r_0 + Z_n r_2 \right) r_2, \tag{13a}$$

respectiv

$$\frac{dF_n}{dz} = -\frac{a^2}{r_0^2 \operatorname{tg}^2 A} G_n + Z_n r_2^2. \tag{13b}$$

3. APLICAREA METODEI TRAPEZULUI

Utilizarea *diferențelor progresive*, la transcrierea ecuațiilor diferențiale în ecuații cu diferențe finite, permite obținerea imediată a relațiilor de recurență.

Renunțînd, pentru simplificarea scrierii, la indicele n care caracterizează armonicele succesive din seriile trigonometrice (4) și (5) și împărțind placa în formă de turn în tronsoane de înălțime egală cu Δz, vom nota rosturile succesive 0, 1, 2, ..., $m-1$, m, $m+1$, ...

Pentru un rost curent m se va putea scrie

$$\frac{dF_m}{dz} \approx \frac{F_{m+1} - F_m}{\Delta z}, \quad \frac{dG_m}{dz} \approx \frac{G_{m+1} - G_m}{\Delta z}.$$

Atunci sistemul de ecuații (10a), (10b) poate fi scris sub forma

$$F_{m+1} = F_m - \frac{a^2 \Delta z}{r_{0,m}^2 \operatorname{tg}^2 A} G_m + \left(\frac{1}{n} Y_m r_{0,m} + Z_m r_{2,m} \right) r_{2,m} \Delta z, \tag{14a}$$

$$G_{m+1} = G_m + \frac{n^2 \Delta z}{r_{0,m}} F_m - (Y_m \sin \varphi_m + Z_m \cos \varphi_m) r_{2,m} \Delta z. \tag{14b}$$

Analog, sistemul de ecuații (13b), (12b) se transformă în

$$F_{m+1} = F_m - \frac{a^2 \Delta z}{r_{0,m}^2 \operatorname{tg}^2 A} G_m + Z_m r_{2,m}^2 \Delta z, \tag{15a}$$

$$G_{m+1} = G_m + \frac{n^2 \Delta z}{r_{0,m}^2} F_m - Z_m r_{2,m} \cos \varphi_m \Delta z. \tag{15b}$$

Fiind vorba de o *problemă de valori inițiale*, dacă F_0 și G_0 sînt cunoscuți, relațiile (14) sau (15) constituie *relații de recurență* care permit determinarea, din aproape în aproape, a valorilor F și G în toate rosturile plăcii. Calculul va fi oprit la penultimul rost $(p-1)$, cînd vor fi determinate valorile F_p și G_p în ultimul rost (inferior).

În lipsa unor forțe liniare aplicate la marginea superioară ($m = 0$), valorile inițiale sînt $F_0 = 0$ și $G_0 = 0$.

Odată cunoscute valorile F_m și G_m, eforturile de membrană rezultă din relațiile (9) și (6), care iau forma

$$N_{\varphi\theta,m} = -\frac{nF_m}{r_{0,m}^2},$$

$$N_{\varphi,m} = \frac{G_m}{r_{0,m}\sin\varphi_m}, \tag{16}$$

$$N_{\theta,m} = -N_{\varphi,m}\frac{r_{2,m}}{r_{1,m}} - Z_m r_{2,m}.$$

Erorile implicate în utilizarea metodei trapezului sînt proporționale cu $\frac{1}{2}\Delta z$; la o împărțire suficient de densă rezultatele vor fi absolut satisfăcătoare.

4. APLICAREA METODEI RUNGE-KUTTA

Metoda Runge-Kutta este adaptată prin excelență problemelor de valori inițiale în care intervin ecuații sau sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi ; se demonstrează că erorile sînt de ordinul $O(\Delta z)^5$, ceea ce reprezintă o precizie excelentă.

Pentru aplicarea metodei, vom pleca de la sistemul de două ecuații (13a), (10b).

Vom nota

$$f(z,F,G) = -\frac{a^2}{r_0^2\operatorname{tg}^2 A}G + \left(\frac{1}{n}Xr_0 + Zr_2\right)r_2, \tag{17a}$$

$$g(z,F,G) = \frac{n^2}{r_0^2}F - (Y\sin\varphi + Z\cos\varphi)r_2, \tag{17b}$$

$$F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}, \quad G' = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}.$$

Sistemul de integrat numeric devine atunci

$$F' = f(z,F,G) \quad \text{și} \quad G' = g(z,F,G) \tag{18}$$

cu condițiile inițiale

$$F = F_0 \quad \text{și} \quad G = G_0 \quad \text{pentru} \quad z = z_0.$$

În această metodă, calculele numerice intermediare implică determinarea funcțiilor F și G și în punctele situate la jumătatea fiecărui interval, pe care le vom nota 1/2, 3/2, 5/2 etc.

Mersul calculului este următorul, începînd din origine. Se notează valorile inițiale

$$F_I = F_0, \quad G_I = G_0$$

și apoi din (18) se calculează tangentele corespunzătoare, care, multiplicate cu pasul rețelei Δz, dau creșterile lui F și G :

$$\begin{aligned} F'_I &= f(z_I, F_I, G_I) = f_I, \\ G'_I &= g(z_I, F_I, G_I) = g_I, \\ k_I &= f_I \Delta z, \\ l_I &= g_I \Delta z. \end{aligned} \tag{19a}$$

Cu aceste creșteri se merge liniar pînă la mijlocul intervalului (punctul 1/2)

$$\begin{aligned} z_{II} &= z_0 + \frac{1}{2}\Delta z, \\ F_{II} &= F_0 + \frac{1}{2} k_I, \\ G_{II} &= G_0 + \frac{1}{2} l_I, \end{aligned}$$

și se calculează din nou tangentele și creșterile k_{II} și l_{II} :

$$\begin{aligned} F'_{II} &= f(z_{II}, F_{II}, G_{II}) = f_{II}, \\ G'_{II} &= g(z_{II}, F_{II}, C_{II}) = f_{II}, \qquad (19b) \\ k_{II} &= f_{II} \Delta z, \qquad (19b) \\ l_{II} &= g_{II} \Delta z. \end{aligned}$$

Se pleacă din nou din punctul inițial 0 și se ajunge numai pînă la mijlocul intervalului (punctul 1/2) :

$$\begin{aligned} z_{III} &= z_{II} = z_0 + \frac{1}{2}\Delta z, \\ F_{III} &= F_0 + \frac{1}{2} k_{II}, \\ G_{III} &= G_0 + \frac{1}{2} l_{II} \end{aligned}$$

și se calculează tangentele și creșterile

$$\begin{aligned} F'_{III} &= f(z_{III}, F_{III}, G_{III}) = f_{III}, \\ G'_{III} &= g(z_{III}, F_{III}, G_{III}) = g_{III}, \\ k_{III} &= f_{III}\Delta z, \\ l_{III} &= g_{III}\Delta z \end{aligned} \tag{19c}$$

Pentru a patra oară se ajunge la capătul intervalului (în nodul 1):

$$\begin{aligned} z_{IV} &= z_0 + \Delta z = z_1, \\ F_{IV} &= F_0 + k_{III}, \\ G_{IV} &= G_0 + l_{III} \end{aligned}$$

și se calculează

$$\begin{aligned} F'_{IV} &= f(z_{IV}, F_{IV}, G_{IV}) = f_{IV}, \\ G'_{IV} &= g(z_{IV}, F_{IV}, G_{IV}) = g_{IV}, \\ k_{IV} &= f_{IV}\Delta z, \\ l_{IV} &= g_{IV}\Delta z. \end{aligned} \tag{19d}$$

Cu valorile creșterilor obținute pe baza relațiilor (19), se evaluează valorile medii

$$k = \frac{1}{6}(k_I + 2k_{II} + 2k_{III} + k_{IV}),$$

$$l = \frac{1}{6}(l_I + 2l_{II} + 2l_{III} + l_{IV}).$$

În punctul 1, de cotă $z_1 = z_0 + \Delta z$, valorile funcțiilor vor fi

$$F_1 = F_0 + k, \qquad G_1 = G_0 + l.$$

Setul de valori (z_1, F_1, G_1) servește ca *valori inițiale* pentru determinarea valorilor funcțiilor F_2 și G_2 și așa mai departe.

5. ACȚIUNEA VÎNTULUI

Presiunea cvasi-statică a vîntului este dată de expresia

$$p_v = q_{10} C_h \cdot C_0 \cdot C_g$$

în care

$$q_{10} = \frac{1}{2} \rho v_{10}^2$$

este presiunea dinamică de bază a vîntului la 10 metri deasupra nivelului terenului, obținută din viteza medie orară a vîntului, bazată pe teoria valorii extreme pentru o anumită perioadă de revenire;

C_h este un factor de expunere, indicînd distribuţia verticală a presiunii, care depinde de înălţimea faţă de nivelul terenului şi de rugozitatea terenului; presupunînd un teren plan şi deschis, se poate lua

$$C_h = \left(\frac{h}{10}\right)^{0,28} \quad \text{însă} \quad C_h \geqslant 1,$$

unde h este înălţimea deasupra nivelului terenului.

Coeficientul de distribuţie a presiunii exterioare circumferenţiale C_θ se admite că este independent de z. Se va admite exprimarea sub formă trigonometrică (limitată pentru teoria de membrană)

$$C_\theta = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta,$$

în care [6]

— pentru suprafeţe netede

$$\lambda_0 = -0,804\,; \quad \lambda_1 = +0,140\,; \quad \lambda_2 = +1,380\,;$$

— pentru suprafeţe rugoase

$$\lambda_0 = -0,258\,; \quad \lambda_1 = +0,488\,; \quad \lambda_2 = +0,476.$$

Factorul de rafală C_g include influenţa turbulenţei şi este apreciat [7] la valoarea $C_g = 1,86$.

Luînd $\rho = 1/8$ (densitatea aerului la nivelul mării) şi $v_{10} = 40$ m/s, ezultă $q_{10} = 100$ daN/m^2.

Alegînd originea cotelor z la cercul colier, expresia coeficientului C_h care va putea fi utilizată în continuare devine:

$$C_h = (0,1H_c - 0,1z)^{0,28},$$

în care H_c este înălţimea cercului colier deasupra nivelului terenului.

Presiunea vîntului va fi dată atunci de expresia

$$p_v(z, \theta) = 100 \times 1,86(0,1H_c - 0,1z)^{0,28}(\lambda_0 + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta) = Z_0 + Z_1 \cos\theta + Z_2 \cos 2\theta,$$

în care

$$Z_0 = 186\,\lambda_0(0,1H_c - 0,1\,z)^{0,28},$$

$$Z_1 = 186\,\lambda_1(0,1H_c - 0,1\,z)^{0,28},$$

$$Z_2 = 186\,\lambda_2(0,1H_c - 0,1\,z)^{0,28},$$

(H_c şi z în metri, p_v, Z_0, Z_1, Z_2 în daN/m^2).

6. PROGRAME DE CALCUL AUTOMAT. EXEMPLU DE CALCUL

Rezolvarea analitică şi numerică prezentată în paragrafele 2, 3 şi 4 este relativ simplă, însă necesită un volum de calcul foarte mare şi, corespunzător, ar răpi un timp de lucru îndelungat pentru un calcul manual. De aceea au fost elaborate programele de calcul automat HIP 1 şi HIP 2

corespunzătoare calculului în ipoteza de membrană a turnurilor hiperbolice supuse acțiunii greutății proprii și vîntului, aplicînd metoda trapezului și respectiv metoda Runge-Kutta.

Notațiile folosite au fost sistematizate, codificate și definite în Anexa 1.

Pe baza organigramelor construite pentru determinarea eforturilor de membrană au fost scrise programele de calcul HIP 1 și HIP 2, în limbaj FORTRAN. Datorită aproximației superioare este redată în Anexa 2 doar organigrama celui de-al doilea program.

Datele de intrare sînt următoarele:

$$a,\ b,\ C_g,\ h_i,\ h_s,\ H_c,\ q_{10},\ \Delta z,\ \gamma,\ \Delta\theta,\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ d_i,\ d_s,\ d_1,\ d_2,\ h_1,\ h_2,\ h_3.$$

Unitățile de măsură folosite sînt: m pentru lungimi, daN/m^2 pentru presiuni, daN/m pentru eforturile de membrană.

În funcție de datele inițiale, programul furnizează următoarele:

1° Eforturile de membrană N_φ și N_θ din greutatea proprie, în lungul meridianelor.

2° Eforturile de membrană N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ datorite armonicelor $n = 0$, *1* și *2* din acțiunea vîntului, în lungul meridianelor, precum și eforturile totale N_φ și N_θ din acțiunea vîntului, în lungul meridianului de stagnare.

3° Eforturile de membrană N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ din acțiunea vîntului, pentru diferite cote z și diferite secțiuni meridiane θ.

4° Eforturile meridiane în lungul meridianului de stagnare ($\theta = 0$) pentru combinația de încărcări $0{,}9\,G + 1{,}3\,V$, necesare pentru calculul de fisurare al plăcii de beton armat (G și V reprezintă eforturile datorite greutății proprii, respectiv vîntului).

Pentru exemplificare a fost considerat un turn hiperbolic avînd următoarele date numerice:

$H = 125$ m înălțimea totală a turnului,

$H_{st} = 27$ m înălțimea stîlpilor,

$H_c = 115$ m înălțimea cercului colier deasupra nivelului terenului,

$H_p = 98$ m înălțimea totală a plăcii, din care

$h_i = 88$ m sub cercul colier,

$h_s = 10$ m deasupra cercului colier,

$a = 33{,}50$ m raza cercului colier,

$b = 88{,}32$ m semiaxa imaginară a hiperbolei meridiane.

$\gamma = 2500$ daN/m^3 greutatea tehnică a betonului armat.

Pasul rețelei a fost $\Delta z = 2{,}5$ m pe înălțimea turnului (intervalul de la bază a rezultat de 0,5 m), iar secțiunile meridiane (care precizează poziția punctelor pe cercurile paralele) au fost luate multiplu de $\pi/12$, începînd de la meridianul de stagnare.

Pentru comparație au fost considerate atît suprafața netedă, cît și suprafața rugoasă.

Datorită pasului mic considerat pe înălțime, rezultatele obținute prin cele două metode sînt foarte apropiate.

Pe baza rezultatelor obținute prin rularea programului de calcul HIP 2 au fost reprezentate în figura 1*a* ... *e* curba meridiană, variația grosimii plăcii, variația coeficientului C_h pe înălțimea turnului și diagramele N_φ și N_θ provenind din greutatea proprie.

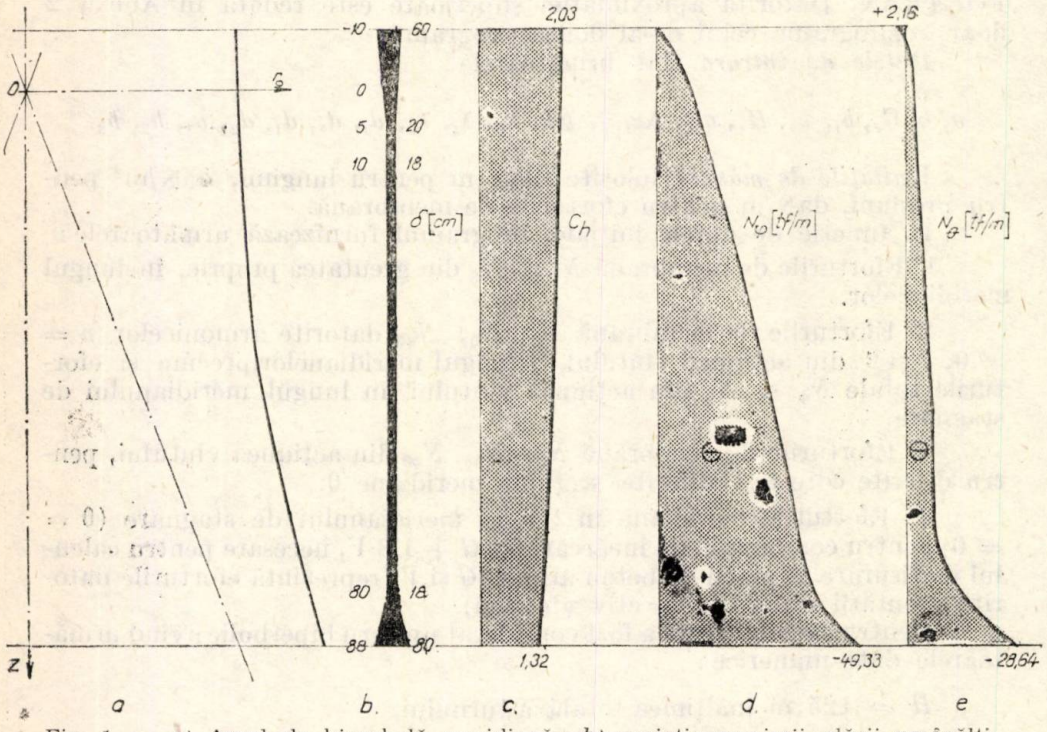


Fig. 1. — *a)* Arcul de hiperbolă meridiană ; *b)* variația grosimii plăcii pe înălțimea turnului ; *c)* variația coeficientului C_h cu înălțimea ; *d)* diagrama eforturilor meridiane N_φ datorite greutății proprii ; *e)* diagrama eforturilor inelare N_θ datorite greutății proprii.

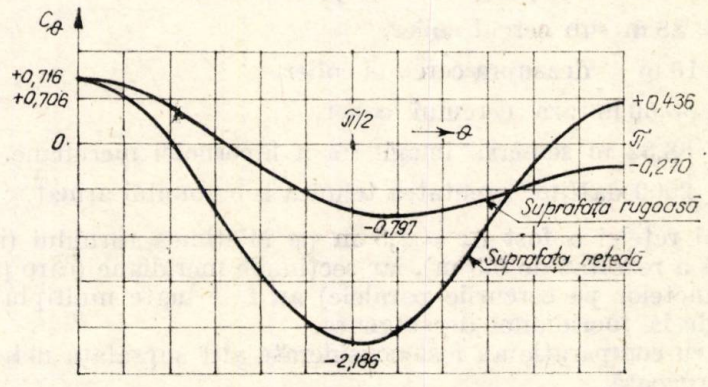


Fig. 2. — Variația coeficientului C_θ cu unghiul θ.

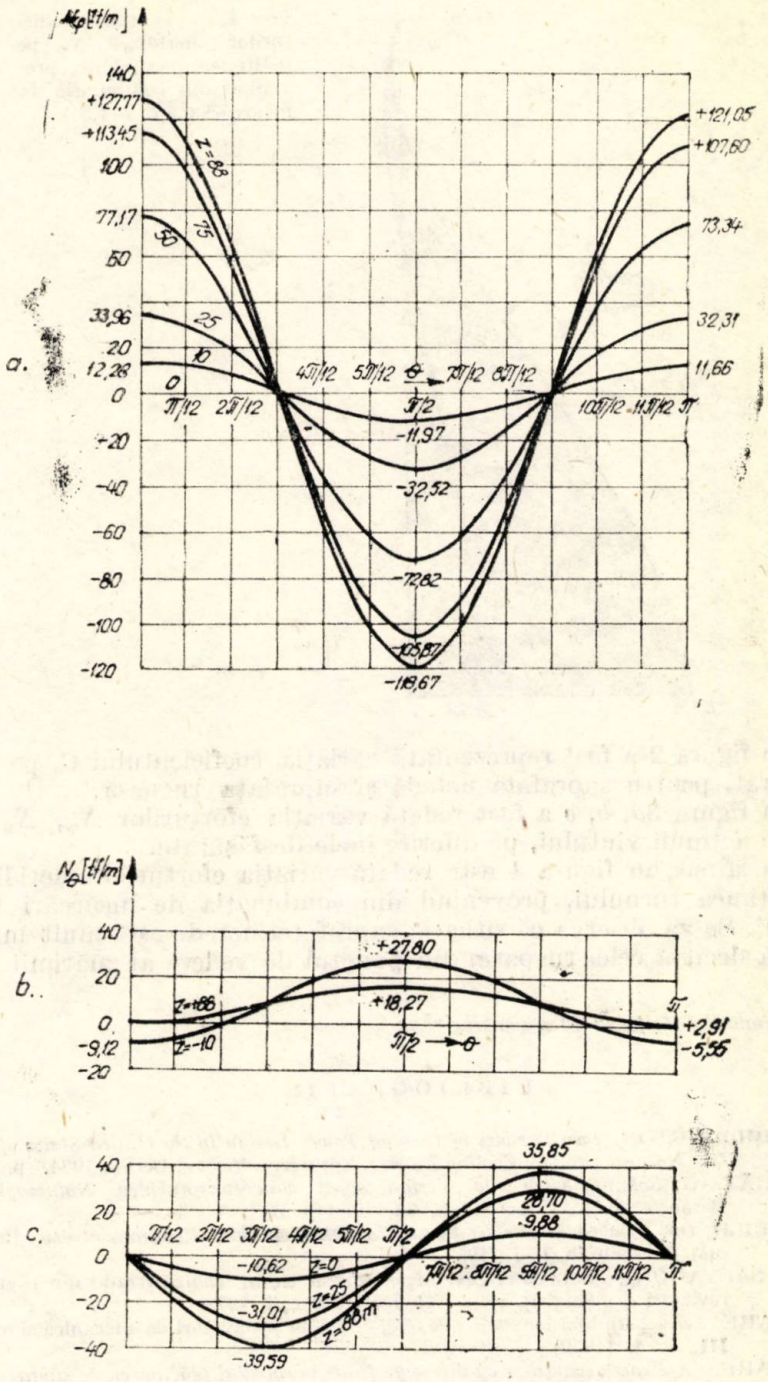


Fig. 3. — *a*) Variaţia eforturilor meridiane N_φ; *b*) variaţia eforturilor inelare N_θ; c) variaţia eforturilor de lunecare $N_{\varphi\theta}$ datorite acţiunii vîntului.

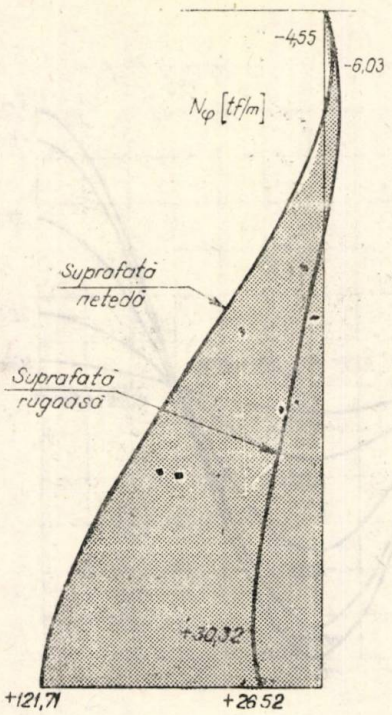


Fig. 4. — Variația eforturilor meridiane N_φ pe înălțimea turnului, provenind din combinația de încărcări $0{,}9\,G + 1{,}3\,V$.

În figura 2 a fost reprezentată variația coeficientului C_θ pe un inel desfășurat, pentru suprafața netedă și suprafața rugoasă.

În figura 3*a*, *b*, *c* a fost redată variația eforturilor N_φ, N_θ și $N_{\varphi\theta}$ datorite acțiunii vîntului, pe diferite inele desfășurate.

În sfîrșit, în figura 4 este redată variația eforturilor meridiane N_φ pe înălțimea turnului, provenind din combinația de încărcări $0{,}9\,G + 1{,}3\,V$. Se va observa că situația suprafeței netede este mult mai defavorabilă decît a celei rugoase, din punctul de vedere al mărimii eforturilor.

Primit la redacție la 10 noiembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. D. P. BILLINGTON, *Two Decades of Cooling Tower Design in the United States of America.* In : *Natural Draught Cooling Towers*, Springer—Verlag, Berlin, 1984, p. 351—361.
2. W. KRÄTZIG, *Schnittgrössen und Verformungen windbeanspruchten Naturzugkühltürme.* Beton — und Stahlbetonbau, **61**, 10, (1966).
3. R. RABICH, *Die Membrantheorie der Einschalig hyperbolischen Rotationsschalen.* Bauplanung und Bantechnih **7**, 7, (1953).
4. M. G. SALVADORI, M. L. BARON, *Metode numerice în tehnică* (trad. din l. engleză, cu revizuiri și adăugiri), Edit. Tehnică București, 1972.
5. M. SOARE, *Teoria suprafețelor subțiri de rotație*, Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **III**, 3—4, (1952).
6. M. SOARE, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri.* ed. a II-a, Edit. Academiei, București, 1968.
7. * * * *Recommendations for the Design of Hyperbolic or Other Similarly Shaped Cooling Towers.* I.A.S.S. Working Group Nr. 3, Brüssels, 1977.

ANEXA 1

Notaţii	Codificări	Definiţii
a	A	Semiaxa reală a hiperbolei meridiane
—	AK, AL	Creşterile funcţiilor F_n, respectiv G_n
—	AR	Valoarea raportului $\frac{h_s + h_i}{\Delta z} + 1$ necesară pentru determinarea numărului de secţiuni de calcul
b	B	Semiaxa imaginară a hiperbolei meridiane
$\cos \varphi$	CØFI(Z)	Funcţia cos φ
C_g	CG	Factorul de rafală
—	CV	Valoarea expresiei $CV = \frac{C_g q_{10}}{1\,000}$
d_i	DI	Grosimea peretelui la bază
d_s	DS	Grosimea peretelui la partea superioară
d_1, d_2	D1, D2	Grosimi intermediare pornind de sus în jos
F_n	FN (I, J)	Valoarea expresiei $F_n = -\frac{1}{n} N_{\varphi 0 k} r_0^2$; I = indicele armonicei pentru care se face calculul, J = indicele secţiunii de calcul
—	F (I)	Valoarea expresiei $F = t_z \cdot r_2$ în secţiunea de calcul
G_n	GN (I, J)	Valoarea expresiei $G_n = N_{\varphi n} r_0 \sin \varphi$; I = indicele armonicei pentru care se face calculul, J = indicele secţiunii de calcul
h_c	HC	Înălţimea de la baza turnului pînă la cercul colier
h_i	HI	Înălţimea de la baza hiperbolei pînă la cercul colier
h_s	HS	Înălţimea de la cercul colier pînă la partea superioară a hiperbolei
h_1, h_2, h_3	H1, H2, H3	Cote măsurate de la partea superioară a hiperbolei pînă în punctele de schimbare de lege de variaţie a grosimii peretelui
n	N	Indicele armonicei de calcul
—	NR	Numărul de secţiuni de calcul
N_θ	ANTETA	Efortul inelar N_θ
$1{,}3N_{\theta,\text{vînt}} + 0{,}9N_{\theta,g}$	ANTEG	Efortul inelar din combinaţia de încărcări
N_φ	ANFI	Efortul meridian N_φ
$1{,}3N_{\varphi,\text{vînt}} + 0{,}9N_{\varphi g}$	ANFIG	Efort meridian din combinaţia de încărcări
$N_{\varphi\theta}$	ANFIT	Efort de lunecare $N_{\varphi\theta}$
q_{10}	Q_{10}	Presiunea de bază a vîntului la 10 m deasupra nivelului terenului
r_0	RO(Z)	Raza unui cerc paralel curent
r_1	R1(Z)	Prima rază de curbură a suprafeţei mediane
r_2	R2(Z)	A doua rază de curbură principală a suprafeţei mediane
$\sin\varphi$	SIFI(Z)	sin φ
tg A	TA	tg $A = \frac{b}{a}$, unde A este unghiul asimptotelor hiperbolei meridiane cu axa Or_0
t_z	TZ (I)	Grosimea peretelui turnului într-o secţiune curentă
z	Z	Cota secţiunii de calcul (variabila independentă)
—	ZR2(Z)	Funcţie (încărcarea din vînt multiplicată cu r_2. $ZR2(Z) = CV \cdot (HC/10 - 0{,}1Z)^{0{,}28} \cdot R2(Z)$
$\theta = (k-1)\theta_0$ $(k = 1, \ldots 13)$	FI	Unghiul la centru pe un cerc paralel, dintre meridianul de stagnare ($\theta = 0$) şi meridianul pe care se calculează eforturile

1	2	3
γ	GAMA	Greutatea specifică a materialului din care este realizat peretele
Δz	H, PAS	Pasul rețelei
$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$	AL1 AL2, AL3	Coeficienți de multiplicare pentru acțiunea circumferențială a vîntului
π	PI	$\pi = 3{,}1415927\ldots$
ρ	RØZ(Z)	Raportul $\rho = r_2/r_1$
—	RØSI(Z)	Produsul $r_0 \sin\varphi$
—	TRØSi(Z)	Valoarea raportului $\dfrac{\text{RØZ(Z)}}{\text{RØSI(Z)}}$
	Notații suplimentare în subrutine	
	Subrutina RKG pentru evaluarea eforturilor ce apar din greutatea proprie a structurii	
—	AK(I) $i = 1, \ldots 4$	Valori intermediare ale creșterii funcției F(I)
—	F(Z)	Funcție ajutătoare $F(Z) = \dfrac{t \cdot r_0}{\sin\varphi}$
t_z	T	Grosimea peretelui turnului
	Subrutina RKV	
	Funcții ajutătoare	
$A_1(x)$	AI (X)	$A_1(x) = \dfrac{r_0(x)}{r_1(x) \cdot \sin^3\varphi}$; $B_1(x) = \dfrac{1}{r_0^2(x)}$
$B_1(x)$	B1(X)	
$C_1(x)$	(X)	$C_1(x) = ZR2(X)$; $D_1(x) = \dfrac{C_1(x) \cdot \cos\gamma}{r_2(x)}$
$D_1(x)$	DI (X)	
	AK(I) AL(I)	Valori intermediare ale creșterilor funcțiilor F_n, respectiv G_n
	AKA, ALA	Valoarea creșterilor funcțiilor F_n, respectiv G_n pentru creșterea cotei cu Δz
	Subrutina TEZET pentru calculul grosimii peretelui turnului	
	AR1	Valoarea diferitelor rapoarte $\dfrac{H}{\Delta z}$
	NR1	Numărul secțiunilor cuprinse în interiorul intervalelor pe care grosimea peretelui turnului are aceeași lege de variație
	DELTA	Restul împărțirii întregi $\dfrac{H}{\Delta z}$
	N2, NR2	Variabile contor

Subrutina TEZET calculează grosimea peretelui unui turn, de la partea superioară a turnului către baza lui, considerînd că pe înălțimea turnului, pornind de sus în jos, există patru intervale și anume :

— două intervale în care grosimea peretelui are o variație liniară, cu pante diferite,

— un interval în care grosimea peretelui este constantă,

— intervalul de la baza turnului pe care grosimea peretelui are o variație deasemenea liniară.

Numărul maxim de secțiuni în care pot fi calculate eforturile cu ajutorul programului HIP 2 este 100.

ANALIZA EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR DINAMICI LA CIURUL VIBRATOR CU FUNCȚIONARE ÎN REZONANȚĂ

de P. BRATU

INCERC București

Se prezintă problematica analizei experimentale pentru stabilirea parametrilor dinamici funcționali ai ciururilor vibratoare cu funcționare în rezonanță. Pentru regimul de lucru prezintă importanță deosebită stabilirea experimentală a tuturor valorilor parametrilor constructivi și funcționali ai mașinii. În lucrare se arată metodele de investigare experimentală pentru un ciur cu funcționare în rezonanță cu particularități multiple în tehnica de încercare și interpretare a rezultatelor.

1. PROBLEMATICA ANALIZEI EXPERIMENTALE

Ciurul vibrator bimasic cu funcționare în rezonanță prezentat în figura 1, se compune din următoarele elemente : cadru superior 1, cadru inferior 2, balancier 3, grup elastic al bielei de acționare 4, arbore de antrenare 5, grup elastic de legătură 6, suport 7. Structura constructivă cît și funcționarea au fost prezentate în lucrările [2] și [3].

Elementele tehnologice de clasare a materialelor granulare sînt sitele, amplasate în interiorul cadrului superior și inferior. Ca urmare, se are în vedere realizarea nivelului de vibrații pe direcția bielei sub unghiul de atac pe care-l formează aceasta cu poziția orizontală. Pentru a menține regimul de funcționare în domeniul rezonanței s-a adoptat sistemul constructiv cu bielă elastică și perturbare cu bucșa excentrică fixată pe arborele de antrenare 5.

Pentru a verifica realizarea parametrilor de performanță ai ciurului sînt necesare determinări experimentale capabile să individualizeze atît corectitudinea execuției cu încadrarea în limite, cît și stabilirea sau verificarea parametrilor funcționali globali.

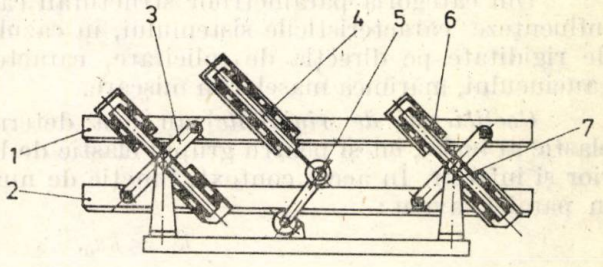


Fig. 1. — Ciur vibrator cu funcționare în rezonanță.

Parametrii dinamici ce caracterizează nivelul de performanță al unui ciur cu funcționare în rezonanță, perturbat prin sistem bielă elastică — bucșe excentrică, se împart în următoarele grupe :

a) parametrii structurali, care definesc caracteristicile dinamice ale sistemului (coeficienți de rigiditate, factori de amortizare, mase în mișcare de vibrare);

b) parametrii cinematici ai regimului staționar, care stabilesc funcționarea mașinii în domeniul rezonanței delimitat, în mod convențional [8], astfel :

— anterezonanță pentru raportul $0{,}7 \leqslant \frac{\omega}{p} < 0{,}95$;

— postrezonanță pentru raportul $1{,}15 < \frac{\omega}{p} \leqslant 1{,}5$.

Se menționează că prin ω s-a notat pulsația vibrațiilor forțate, iar cu p s-a notat pulsația proprie a sistemului [8].

c) parametrii vibrațiilor tehnologice, care determină direct procesul tehnologic de clasare a materialelor granulare (amplitudinea mișcării vibratorii pe direcția de atac a bielei, frecvența vibrațiilor forțate, amplitudinea accelerației mișcării vibratorii pe direcția de atac a bielei) ;

d) parametrii de perturbare și acționare, ce caracterizează generarea și menținerea regimului stabilizat de funcționare tehnologică a mașinii.

2. INVESTIGAREA EXPERIMENTALĂ

Măsura satisfacerii exigențelor de performanță ale noului produs se bazează pe determinări experimentale adecvate, specializate domeniului abordat. Astfel, ținîndu-se seama de gruparea parametrilor, cît și de testarea individuală „pe element" și globală „pe mașină" parametrii specifici ai ciurului cu funcționare în rezonanță pot fi analizați în ordinea prezentată în continuare.

a) PARAMETRII STRUCTURALI

Din categoria parametrilor structurali capabili să determine sau să influențeze caracteristicile sistemului, în cazul ciurului, sînt : coeficienții de rigiditate pe direcția de solicitare, caracteristicile de amortizare ale cauciucului, mărimea maselor în mișcare.

Coeficienții de rigiditate au fost determinați atît pentru grupul elastic al bielei, cît și pentru grupul elastic de legături dintre cadrul superior și inferior. În acest context, funcție de numărul de elemente grupate în paralel, avem :

$$k_0 = ks_0, \qquad k_1 = ks_1, \tag{1}$$

în care k_0, k_1 sînt coeficienții de rigiditate echivalenți corespunzători grupului elastic al bielei și respectiv al grupului de legătură ; s_0, s_1 — numărul elementelor din cauciuc legate în paralel ale celor două grupuri elastice ; k este coeficientul de rigiditate al unui singur element din cauciuc.

Coeficientul de rigiditate k a fost stabilit ca fiind valoarea cea mai apropiată dintr-un șir de valori experimentale prelucrate statistic. Aceste

valori au fost obținute prin încercări ale unui lot de 50 bucăți elemente din cauciuc, prin înregistrarea forței deformatoare la patru trepte de deformare pentru solicitarea de lunecare (forfecare). În acest mod, pentru un element antivibratil de formă paralelipipedică cu dimensiunile 160 × × 125 × 65 mm, din cauciuc SAB 31 cu duritatea 45°Sh A, în urma încercărilor, s-a obținut valoarea cea mai probabilă $k = 178 \cdot 10^3$ N/m.

Numărul total de elemente din fiecare grup elastic este $s_0 = 2 \times \times 8 = 16$ bucăți pentru bielă și $s_1 = 8 \times 4 = 32$ bucăți pentru grupul

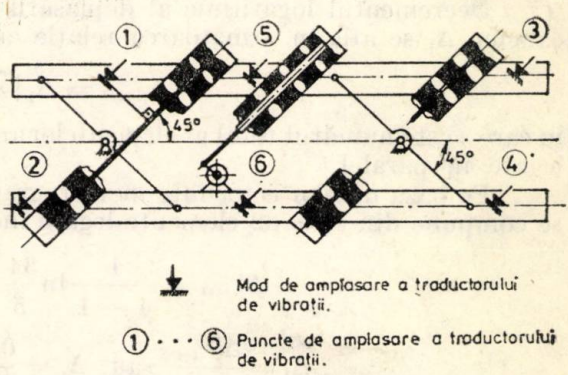


Fig. 2. — Modul de amplasare a traductoarelor de măsurare la vibrații pe mașină.

de legătură. Pe această bază, coeficienții de rigiditate echivalenți, corespunzători celor două grupuri elastice sînt $k_0 = 2848 \cdot 10^3$N/m și $k_1 = = 5696 \cdot 10^3$ N/m.

Masa părților mobile, în mișcare de vibrare, se compune din masa totală m_1 a cadrului superior și masa totală m_2 a cadrului inferior. Experimental s-au determinat prin cîntărire, în mod individual, rezultînd valorile $m_1 = 1\,450$ kg și $m_2 = 1\,680$ kg.

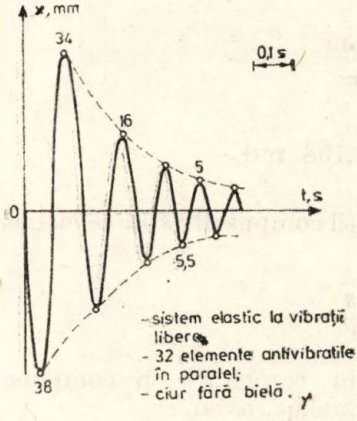


Fig. 3. — Vibrograma la oscilația liberă.

Caracteristicile de amortizare au fost determinate folosind metoda răspunsului sistemului la vibrația liberă. În figura 2 se prezintă schema de amplasare a traductorului de vibrații, pe direcția unghiului de atac a bielei.

Pentru a obține vibrația liberă a sistemului s-a imprimat un impuls inițial, în diverse puncte pe direcția bielei. În acest mod s-au obținut diverse vibrograme pentru mai multe combinații ale sistemului elastic. Prin modificarea numărului de elemente din cauciuc s-a constatat schimbarea valorii decrementului logaritmic al deplasării vibrației libere. În figura 3 se prezintă un exemplu de vibrogramă obținută cu un lanț de aparate Brüel & Kjaer (Danemarca) completat cu magnetofon profesional RACAL (S.U.A.).

MISKOLCI EGYETEM KÖNYVTÁRA

Decrementul logaritmic al deplasării sistemului format din s elemente de cauciuc legate în *paralel* se notează cu $\Delta_{p\,sist}$ și are expresia :

$$\Delta_{p\,sist} = \frac{1}{j-1} \ln \frac{x_1}{x_j}, \tag{2}$$

unde x_1 este deplasarea maximă a sistemului, considerată la momentul inițial $t_1 = 0$; x_j — deplasarea maximă a sistemului la momentul t_j ; j — numărul de ordine al deplasării maxime a sistemului.

Decrementul logaritmic al deplasării pentru un singur element din cauciuc Δ_1 se află în următoarea relație cu $\Delta_{p\,sist}$ [1] :

$$\Delta_{p\,sist} = \Delta_1 \sqrt{s} \tag{3}$$

în care s este numărul total al elementelor antivibratile identice din cauciuc legate în paralel.

Pe baza datelor conținute în vibrograma din figura 3, unde sistemul se compune din $s' = 32$ elemente legate în paralel, se obține :

$$\Delta'_{p\,sist} = \frac{1}{4-1} \ln \frac{34}{5} = 0{,}63,$$

$$\Delta_1 = \frac{\Delta'_{p\,sist}}{\sqrt{s'}} \quad \text{sau} \quad \Delta_1 = \frac{0{,}63}{\sqrt{32}} = 0{,}11.$$

Unghiul de pierdere internă δ ce reflectă disiparea energiei este dat de relația :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta}{\pi}. \tag{4}$$

Pentru sistemul antivibratil, compus din $s' = 32$ elemente, se aplică formula sub forma :

$$\delta'_{sist} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta'_{p\,sist}}{\pi}$$

sau

$$\delta'_{sist} = \operatorname{arc\,tg} \frac{0{,}63}{3{,}14} = 0{,}198 \text{ rad.}$$

În cazul întregului sistem antivibratil compus din $s = 48$ elemente, se va obține decrementul $\Delta_{p\,sist}$, astfel :

$$\Delta_{p\,sist} = \Delta'_{p\,sist} \sqrt{\frac{s}{s'}}. \tag{5}$$

Deci pentru ciurul cu funcționare în rezonanță în componența căruia intră 48 elemente antivibratile din cauciuc, avem :

$$\Delta_{p\,sist} = 0{,}63 \sqrt{\frac{48}{33}} = 0{,}77,$$

$$\delta_{sist} = \operatorname{arc\,tg} \frac{0{,}77}{3{,}14} = 0{,}240 \text{ rad.}$$

Unghiul de pierdere δ_1 pentru un singur element antivibratil din cauciuc va fi :

$$\delta_1 = \text{arc tg}\frac{\Delta_1}{\pi} \quad \text{sau} \quad \delta_1 = \text{arc tg}\frac{0{,}11}{3{,}14} = 0{,}035 \text{ rad.}$$

b) PAREMETRII CINEMATICI AI REGIMULUI STAȚIONAR

Deoarece utilajul funcționează în domeniul rezonanței, au fost determinați experimental următorii parametri :

— pulsația de anterezonanță ;
— pulsația de funcționare în regim tehnologic ;
— pulsația de rezonanță.

Pentru a determina zonele caracteristice de funcționare s-a utilizat un sistem de acționare hidrostatic cu debit variabil care a permis modificarea continuă a vitezei unghiulare la arborele ciurului. În vederea stabilirii zonelor caracteristice s-a realizat baleierea pulsației în domeniul 20 — 150 rad/s. Astfel, s-a obținut curba caracteristică (spectrală) amplitudine-pulsație de unde a rezultat pulsația de rezonanță $p = 100$ rad/s, iar din curba spectrală forță-pulsație la biela de acționare, a rezultat pulsația anterezonanță $p_a = 84$ rad/s. Pulsația vibrațiilor tehnologice $\omega = 70$ rad/s, s-a obținut atît din măsurarea directă, cît și din prelucrarea spectrală a semnalului înregistrat. Coeficientul de reglaj al regimului de funcționare este $\alpha = \frac{\omega}{p} = 0{,}7$.

c) *Parametrii vibrațiilor tehnologice* la ciurul cu funcționare în rezonanță sînt :

— amplitudinea A_1 a deplasării cadrului superior ;
— amplitudinea A_2 a deplasării cadrului inferior ;
— amplitudinea accelerației a_1 corespunzătoare cadrului superior ;
— amplitudinea accelerației a_2 corespunzătoare cadrului inferior.

Determinarea pe cale instrumentală a parametrilor vibrațiilor tehnologice s-a realizat prin amplasarea traductorului de vibrații, pe direcția bielei, în punctele notate de la 1 la 6 din figura 2. Semnalul a fost înregistrat și prelucrat în timp real cu ajutorul analizorului spectral cu lățimea de bandă de 1/12 octavă.

În tabelul 1 se prezintă valorile parametrilor vibrațiilor tehnologice determinate experimental.

d) *Parametrii de perturbare și acționare* în regim stabilizat sînt :

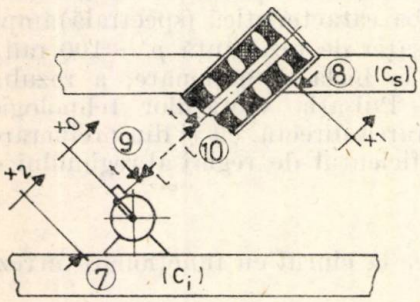
— deformația de lunecare (forfecare) a elementelor elastice ale bielei ;
— forța axială din bielă la acționare ;
— deplasarea pe transversală a capetelor lamelei din bielă ;
— puterea de acționare ;
— momentul de pornire.

Tabelul 1

Parametrii vibrațiilor tehnologice

Denumirea parametrului / Locul de măsurare (figura 2)		Amplitudinea accelerației, în m/s²	Amplitudinea deplasării, în mm	Valoarea medie *) a amplitudinii deplasării, în mm
Cadrul superior	1	23,17	4,73	4,62
	5	19,89	4,06	
	3	25,00	5,10	
Cadrul inferior	2	23,00	4,89	4,48
	6	21,00	4,28	
	4	22,10	4,49	

*) În practica determinărilor experimentale se stabilește valoarea parametrului global caracteristic ca medie aritmetică a tuturor valorilor măsurate.



Amplasare traductor de vibrații.

⑦ ··· ⑩ Puncte de amplasare a traductorului de vibrații.

t – transversal

l – longitudinal

Fig. 4. — Modul de amplasare a traductoarelor de măsurare în zona bielei elastice.

În figura 4 se prezintă schema de amplasare a traductorului de vibrații, în care porțiunea cuprinsă între punctele 9 și 10 este o lamelă din oțel. În punctul 10 s-au aplicat mărci tensometrice pentru determinarea forței axiale.

Valorile parametrilor vibrațiilor măsurate la grupul elastic de perturbare sînt prezentate în tabelul 2.

Cu ajutorul semnalelor deplasărilor x_1 și x_2 s-a determinat defazajul φ, prin trasarea elipsei din figura 5. În mod analog, s-a determinat defazajul φ_1 dintre semnalele deplasărilor x_0 și x_1 și defazajul φ_2 dintre semnalele deplasărilor x_0 și x_2.

Tabelul 2

Parametrii vibrațiilor la grupul elastic al bielei

Denumirea parametrului	Punctele de măsurare					
	7	8	9 l	9 t	10 l	10 t
Amplitudinea accelerației, în m/s²	21,56	22,54	9,40	12,50	7,84	0,56
Amplitudinea deplasării, în mm	4,41	4,60	1,92	2,55	1,58	0,11

Folosind reprezentarea Fresnel pentru vectorii rotitori, în figura 6 se prezintă poziția relativă a vectorilor $\bar{A}_1$ și $\bar{A}_2$ față de vectorul $\bar{A}_0$ cu defazajele corespunzătoare.

Rezultă că *deformația maximă* a elementelor elastice pe direcția bielei (a vectorului $\bar{A}_0$) este :

$$x_{max} = A_1 \cos \varphi_1 + \\ + |A_2 \cos (180 - \varphi_2)|. \quad (6)$$

Folosind datele din tabelele 1 și 2, precum și cele din figura 6, avem :

$$x_{max} = 4{,}6 \cos 16 + \\ + |4{,}4 \cos (180 - 154)| = \\ = 8{,}37 \text{ mm}.$$

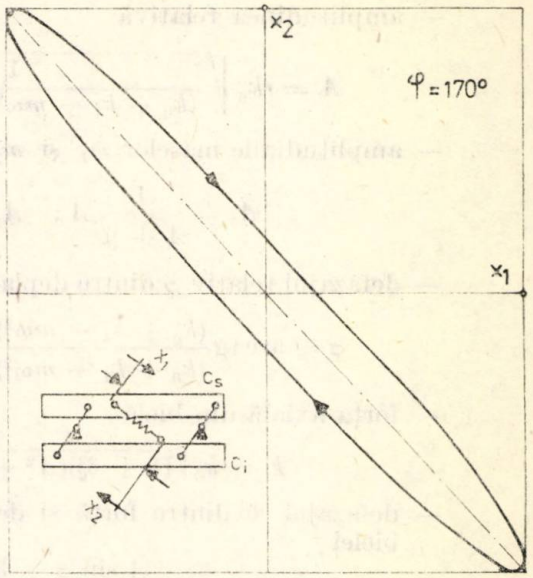


Fig. 5. — Elipsă obținută cu semnalele de deplasare x_1 și x_2.

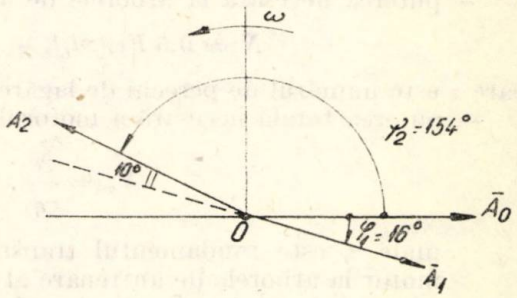


Fig. 6. — Reprezentarea fazorială a mărimilor armonice care definesc deplasările x_0, x_1 și x_2.

3. VERIFICAREA PARAMETRILOR FUNCȚIONALI FOLOSIND REZULTATELE EXPERIMENTALE

Pentru a verifica ipotezele și fundamentarea teoretică se utilizează formulele stabilite în lucrarea [1] în care se notează $\lambda_0 G_0 = k_0$, iar $\lambda_1 G_1 = k_1$, precum și relațiile din lucrarea [3].

Pentru a verifica realizarea concordanței parametrilor măsurați cu valorile determinate prin calcul este necesar să se stabilească relațiile parametrilor specifici. Astfel, trebuie stabilite următoarele date inițiale care vor fi utilizate în calcul și anume :

— excentricitatea bucșei de perturbare r, în m ;

— raportul maselor $\mu = \dfrac{m_1}{m_2}$;

— coeficientul de rezistență al căii de rulare f_r ;

— diametrul echivalent al căii de rulare la rulmenții arborelui, d_r, în m.

Relaţiile de calcul determină următorii parametri:

— amplitudinea relativă

$$A = rk_0 \sqrt{\frac{1 + \delta_0^2}{(k_0 + k_1 - m\omega^2)^2 + (k_0\delta_0 + k_1\delta_1)^2}};$$

— amplitudinile maselor m_1 şi m_2

$$A_1 = \frac{1}{1 + \mu} A; \quad A_2 = \frac{\mu}{1 + \mu} A;$$

— defazajul relativ φ dintre deplasările maselor m_1 şi m_2

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{(k_0 + k_1 - m\omega^2)\delta_0 - (k_0\delta_0 + k_1\delta_1)}{(k_0 + k_1 - m\omega^2) + (k_0\delta_0 + k_1\delta_1)\delta_0};$$

— forţa axială din bielă

$$F = k_0 \sqrt{(1 + \delta_0^2)(A^2 + r^2 - 2Ar\cos\varphi)};$$

— defazajul θ dintre forţă şi deformaţia elementelor elastice ale bielei

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{A\sin\varphi + \delta_0 A\cos\varphi - \delta_0 r}{A\cos\varphi - \delta_0 A\sin\varphi - r};$$

— puterea necesară la arborele de antrenare a ciurului vibrator

$$N = 0{,}5\, F\omega(zd_r f_r + r\sin\theta),$$

în care z este numărul de perechi de lagăre identice;

— puterea totală necesară a motorului de acţionare

$$N_m = \frac{N}{\eta},$$

unde η este randamentul transmisiei fluxului energetic de la motor la arborele de antrenare al ciurului;

— momentul maxim de pornire al maşinii,

$$M_p^{max} = 0{,}5 \frac{k_0 k_1}{k_0 + k_1} r^2;$$

— condiţia de realizare a pornirii

$$\left.\frac{M_p^{max}}{M_{reg}}\right|_{nec} < \left.\frac{M_p}{M_n}\right|_{motor}$$

în care $M_{reg} = 9550\, N_m/n_{nom}$ este momentul cuplului în regim de lucru stabilizat al motorului, în N_m, unde n_{nom} este turaţia în regim stabilizat a motorului, în rot/min, iar N_m este puterea motorului în kW. Raportul $(M_p/M_n)_{motor}$ este caracteristica de pornire a motorului, dată în catalog.

Pe baza rezultatelor experimentale şi a datelor calculate cu formulele de mai sus, în tabelul 3 se prezintă, comparativ, parametrii construc-

Tabelul 3

Parametrii constructivi, funcţionali şi dinamici ai ciurului cu funcţionare în rezonanţă CR 2×7,5

Nr. crt.	Denumirea parametrului	U.M.	Valoarea	
			Documentaţie	Experimental
0	1	2	3	4
1	*M a s a*			
	— masa totală	kg	3 960	3 130
	— masa cadrului superior		1 500	1 450
	— masa cadrului inferior		2 460	1 680
2	*Cote funcţionale*			
	— excentricitate bucşe	mm	7	7
	— unghi de atac bielă faţă de orizontală	grad	45	45
	— lungime arbore de antrenare	mm	2 275	2 280
	— diametru maxim arbore de antrenare	mm	45	45
	— diametru roţi curea	mm		
	⊚ la motor		137	137
	● la arbore antrenare		324	324
3	*Rigiditatea echivalentă a legăturilor elastice*	$\frac{daN}{cm}$		
	a) grup bielă (2×8 elemente)		2 560	2 848
	b) grup legătură cadru superior şi cadru inferior		5 120	5 696
4	*Caracteristicile unui element antivibratil*			
	a) dimensiuni	mm		
	— lungime		160	160
	— lăţite		125	125
	— înălţime		65	65
	b) coeficient de rigiditate	$\frac{daN}{cm}$	160	178
	c) duritate cauciuc	°Sh	45±5	46
	d) unghi de pierdere mecanică internă	rad	0,030	0,035
5	*Parametrii vibraţiilor tehnologice*			
	— frecvenţa	Hz	11,5	11,12
	— amplitudinea	mm		
	● cadru superior		5,17	4,62
	● ● cadru inferior		4,44	4,48
	— acceleraţia maximă	$\frac{m}{s^2}$		
	● cadru superior		25	22,25
	● ● cadru inferior		22	21,05
6	*Forţa axială în bielă*	daN	2×800	2×750
7	*Parametrii grupului de acţionare*			
	— puterea absorbită	kW		
	⊚ în gol		3,25	3 10
	⊚ ⊚ în sarcină		5,00	4,80
	— momentul maxim la pornire	N·m	46 5	42 80
	— momentul nominal la motor	N·m	3 66	3 20

tivi și funcționali ai ciurului CR 2 × 7,5 cu funcționare în domeniul rezonanței la $\frac{\omega}{p} = 0{,}70$ caracteristic zonei de anterezonanță.

Din analiza rezultatelor experimentale obținute se remarcă o bună concordanță cu valorile obținute din calcul și înscrise în documentația tehnică a produsului.

4. CONCLUZII

Metodele de investigare experimentală a parametrilor constructivi și funcționali acoperă necesarul de date pentru stabilirea nivelului de performanță a ciururilor cu funcționare în rezonanță. De asemenea, cu ajutorul metodelor de calcul utilizate este posibilă corectarea relațiilor de calcul pentru un astfel de produs.

Identificarea cît mai exactă a parametrilor masici, de rigiditate și amortizare asigură încadrarea, cu precizia impusă, în regimul de funcționare la rezonanță, în domeniul tehnologic de interes, adică în regim anterezonant sau postrezonant așa cum s-a arătat la punctul 1.b. Se menționează că pot fi estimați și parametrii de influență care dau tendința scoaterii sistemului din domeniul tehnologic impus.

Ca urmare a datelor teoretice și experimentale s-au stabilit unele relații de calcul și metode de testare, pentru ciururile cu funcționare în rezonanță, cu bună concordanță față de realizările practice.

Primit în redacție la 12 octombrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. P. BRATU, *Izolarea și amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții*, Editor, Redacția publicațiilor pentru construcții, INCERC, București, 1982.
2. P. BRATU, *Optimisation constructive et fonctionnelle des cribles vibrants à fonctionnement en résonance*, Proceedings of the conference „Vibration in mechanical engineering", Timișoara, 1985.
3. P. BRATU, *Dinamica ciurului vibrator bimasic cu funcționare în rezonanță*, St. cerc. mec. apl., **47**, 6 (1988).
4. GH. BUZDUGAN, R. MIHĂILESCU, M. RADEȘ, *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei, București, 1979.
5. M. MUNTEANU, *Introducere în dinamica mașinilor vibratoare*, Editura Academiei, București, 1986.
6. M. RADEȘ, *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei București, 1979.
7. GH. SILAȘ, *Mecanica. Vibrații mecanice*, București, Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
8. F. VIRGILIU, *Mecanică teoretică și rezistența materialelor*, Editura didactică și pedagogică, București, 1982.

REȚELE DE DISCRETIZARE CU ÎNDESIRI LOCALE

de R. FRIEDRICH

Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timișoara

Lucrarea se ocupă cu îndesirea locală a rețelelor dreptunghiulare, punîndu-se în evidență trei posibilități : introducerea directă a restricțiilor, utilizarea multiplicatorilor Lagrange și apelarea la elemente finite h-ierarhice. Exemplificările se referă la elemente de tip Lagrange și Hermite utilizabile în probleme de tensiuni sau deformații plane respectiv de încovoiere a plăcilor.

Îndesirile locale ale unei rețele de discretizare permit rezolvări eficiente în cadrul metodei elementelor finite. Cele ce urmează se referă la domenii bidimensionale discretizabile prin elemente dreptunghiulare, în varianta h a metodei ; aceasta realizează apropierea de soluția exactă prin reducerea—în zonele cu erori mari—a dimensiunilor elementelor finite.

Ținînd seama de configurația din figura 1, continuitatea geometrică cere ca deplasările nodului j—ce aparține elementelor e—să fie compatibile cu deplasările laturii ik a elementului E. Aceste restricții geometrice pot fi impuse în trei moduri : direct, cu ajutorul multiplicatorilor Lagrange și utilizînd elemente finite h-ierarhice.

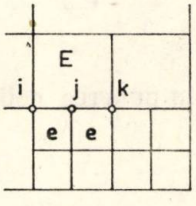
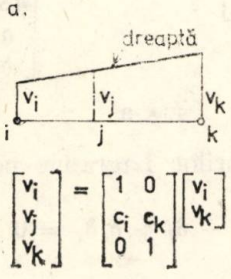


Fig. 1



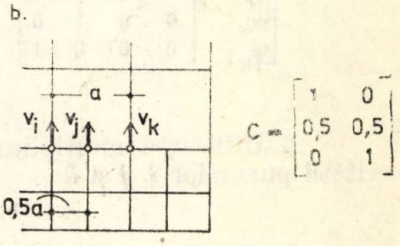


Fig. 2

1. Pentru ca introducerea directă a restricțiilor să nu distrugă simetria matricei rigidităților, eliminarea deplasărilor nodului j se tratează ca o schimbare a sistemului de parametri nodali :

$$\delta_{ijk} = C\delta_{ik}, \tag{1}$$

astfel încît matricea rigidităților devine :

$$\mathbf{k}_{ik} = \mathbf{C}^T \mathbf{k}_{ijk} \mathbf{C}, \tag{2}$$

iar vectorul forţelor nodale :

$$\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{C}^T \mathbf{F}_{ijk}. \tag{3}$$

Spre exemplu în cazul interpolării Lagrange cu :

$$v_j = c_i v_i + c_k v_k. \tag{4}$$

relaţia (1) ia forma din figura 2a, iar în cazul particular cînd nodul j este situat la mijlocul laturii ik matricea de transformare $\mathbf{C}$ este cea din figura 2b. La interpolarea Hermite se elimină parametrii w_j şi φ_j :

$$w_j = c_{31} w_i + c_{32} \varphi_i + c_{35} w_k + c_{36} \varphi_k, \tag{5}$$

$$\varphi_j = c_{41} w_i + c_{42} \varphi_i + c_{45} w_k + c_{46} \varphi_k,$$

relaţia (1) luînd forma din figura 3a. Matricea $\mathbf{C}$ pentru cazul nodului j plasat la mijlocul laturii ik este dată în figura 3b.

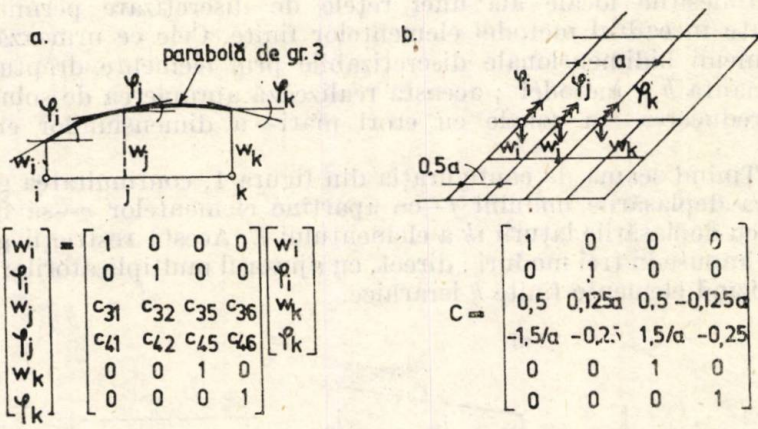


Fig. 3

2. Utilizarea multiplicatorilor Lagrange pentru impunerea coliniarităţii punctelor i, j şi k :

$$c_i \delta_i - \delta_j + c_k \delta_k = 0 \tag{6a}$$

sau

$$a_2 \delta_i - a \delta_j + a_1 \delta_k = 0, \tag{6b}$$

conduce la sistemul de ecuaţii din figura 4a [1]; s-a ţinut seama de deplasările u şi v. Determinarea efectivă a multiplicatorilor Lagrange nefiind necesară, aceştia pot fi eliminaţi prin condensare statică

$$\mathbf{k}^*_{ijk} = \mathbf{k}_{ijk} + \mathbf{k}_c, \tag{7}$$

$$\mathbf{F}^*_{ijk} = \mathbf{F}_{ijk}, \tag{8}$$

obţinîndu-se spre exemplu pentru trecerea la elemente finite cu o latură înjumătăţită matricea $\mathbf{k}_c$ din figura 4b. Aceasta poate fi considerată că se referă la un element finit imaginar ijk şi se adaugă matricei $\mathbf{k}_{ijk}$.

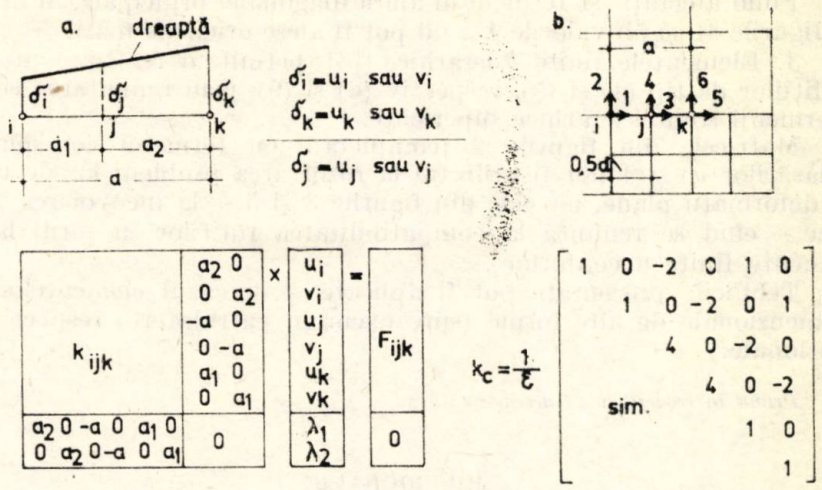


Fig. 4

În cazul interpolării Hermite, nodul j fiind central, restricțiile sînt — figura 5a :

$$4w_i + a\varphi_i - 8w_j + 4w_k - a\varphi_k = 0,$$

$$-6w_i - a\varphi_i - 4a\varphi_j + 6w_k - a\varphi_k = 0, \qquad (9)$$

iar matricea corecțiilor $\mathbf{k}_c$ este cea din figura 5b[2].

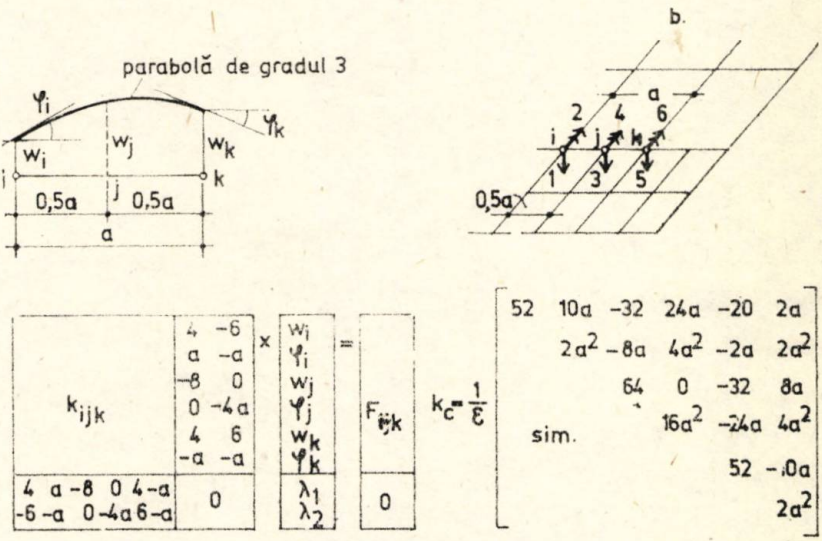


Fig. 5

Fiind afectați și termeni în afara diagonalei principale, în matricele din figurile 4b și 5b valorile $1/\varepsilon$ nu pot fi alese oricît de mari.

3. Elementele finite h-ierarhice [3] permit o realizare ușoară a condițiilor de tip (4) și (5), respectiv (6) și (9), prin renunțarea selectivă la termenii treptei ierarhice superioare.

Matricele din figurile 2 (completate cu termenii corespunzători deplasărilor u) și 4 pot fi utilizate la rezolvarea problemelor de tensiuni sau deformații plane, iar cele din figurile 3 și 5 — la încovoierea plăcilor plane — cînd se renunță la compatibilitatea rotirilor în jurul laturilor (elemente finite neconforme).

Tehnicile prezentate pot fi aplicate și în cazul elementelor finite bidimensionale de alte forme (spre exemplu patrulatere) respectiv tridimensionale.

Primit în redacție la 27 decembrie 1988

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, *Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite. Teoria echivalențelor*, Editura Academiei, București, 1984.
2. R. FRIEDRICH, *Analiza elementelor structurale rezemate elastic*, Simpozionul „Soluții noi, eficiente în proiectarea și execuția structurilor", ICCPDC Timișoara, 1986.
3. R. FRIEDRICH, *Funcții de formă pentru elemente finite ierarhice*, St. cerc. mec. apl., **48**, 2 (1989).

C. A. MASON (sub red.), *Teleoperation and Control* (Teleoperare și comandă), *Proceedings of the International Symposium, Bristol, England, 12 — 15 july 1988*, IFS (Publications), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 397 p.

Lucrarea analizată cuprinde textele celor 36 de comunicări științifice prezentate în cadrul Simpozionului internațional organizat între 12 și 15 iulie 1988 de către Ergonomics Society în colaborare cu British Robot Association și Society of Underwater Technology.

Dat fiind caracterul *interdisciplinar* al tematicii simpozionului — fapt evidențiat și de numele societăților organizatoare — acesta și-a propus ca scop reunirea unor specialiști din diferite domenii și sfere de interes (civil, militar, nuclear, spațial, subacvatic, ș.a.) pentru a discuta realizările obținute și a fixa obiective comune ale cercetărilor viitoare.

O atenție specială este acordată problemei *factorilor umani*, în contextul sistemelor de teleoperare și comandă.

În lucrarea introductivă a simpozionului, după ce este analizată evoluția sistemelor de teleoperare, sînt evidențiate unele tendințe viitoare în acest domeniu.

Capitolul dedicat *aplicațiilor nucleare* prezintă unele concluzii privind eficiența și cerințele sistemelor de robotică și teleoperare utilizate de către Organizația Europeană pentru Cercetări Nucleare (CERN), precum și în contextul accidentului nuclear de la Cernobîl.

Capitolul următor este dedicat sistemelor de *telemanipulare subacvatică*. După ce evidențiază unele particularități funcționale și constructive ale unor sisteme operaționale existente, lucrările prezentate reliefează stadiul cercetărilor în acest domeniu în cadrul unor laboratoare specializate din Italia și Anglia.

O pondere deosebită în cadrul volumului o au lucrările referitoare la multiplele probleme ce privesc realizarea *roboților* pentru diferite categorii de aplicații (industriale, militare, spațiale), precum și *teleoperarea* și *telecomanda* acestora.

Menționăm în mod special grupul de lucrări asupra sistemelor de orientare („vederii") — monoculară, respectiv stereoscopică (utilizînd sisteme de televiziune 3 D) — ale roboților, precum și cele privind comanda vocală a roboților.

Un alt capitol al lucrării evidențiază realizări obținute în cadrul laboratoarelor din S.U.A., Canada și Anglia în domeniul *comenzii* sistemelor de telemanipulare.

Sînt analizate, totodată, probleme ergonomice și legate de siguranța sistemelor robotice teleoperate destinate handicapaților.

Problema evaluării particularităților operatorilor umani, în contextul unei proiectări optimale a sistemelor om-mașină, face obiectul mai multor lucrări prezentate.

Abordînd un domeniu de mare actualitate și importanță practică, lucrarea recenzată reușește să evidențieze stadiul actual și tendințele cercetărilor în sfera sistemelor de teleoperare și telecontrol. Aceasta o face deosebit de utilă tuturor celor care au tangență cu acest domeniu modern, chiar dacă unele dintre lucrări au doar un caracter descriptiv.

I. C. Bacivarof

K. McGUIGAN (sub red.), *Flexible Manufacturing for Small to Medium Entreprises* (Sisteme de fabricație flexibile pentru întreprinderi mici și medii), IFS (Publications), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, London, Tokyo, Hong Kong, 1988, 234 p. *Proceedings of a European Conference, Dublin, 1 — 2 june, 1988.*

Volumul prezintă lucrările unei conferințe organizate la nivel european, cu o tematică de mare actualitate, aceea a sistemelor flexibile de producție/prelucrare (SFP), adaptată însă cerințelor specifice întreprinderilor mici și medii. Această tematică a fost inspirată editorului pe timpul unei documentări cuprinzătoare privind SFP în Japonia, în special în companii de mari dimensiuni, observînd că implementările de SFP în astfel de companii (secții de fabricație) nu corespund ca soluții practice cerințelor companiilor de dimensiuni mici și medii,

care constituie de fapt majoritatea în țări mici, cum sînt cele europene și în particular Irlanda, gazda conferinței (prin Agenția de știință și tehnologie : EOLAS — The Irish Science and Technology Agency).

Lucrările cuprinse în volum se pot prezenta în următoarele grupe tematice, acoperind întreaga problematică a SFP : analiza implementării SFP în Europa, comparativ cu alte țări/grupe de țări ; metode și recomandări privind introducerea mijloacelor de producție cu nivel înalt de automatizare și flexibilitate ; concepția, proiectarea și ingineria produselor în condițiile utilizării SFP ; realizări și perspective în construcția mașinilor unelte și celulelor flexibile de producție ; pregătirea specialiștilor și personalului necesar în realizarea și utilizarea SFP ; dezvoltarea producției flexibile în întreprinderi mici—medii în perspectiva anului 2000.

Analiza implementării SFP, corelată cu dezvoltările tehnologice actuale, arată orientarea obiectivă către fabricația flexibilă, cu nivel înalt de automatizare, electronizare și informatizare către ceea ce se numește pe scurt fabricație integrată pe bază de calculator. Această tendință este arătată atît de implementările actuale de celule de fabricație/producție conectate în sisteme/rețele de fabricație/producție (aproximativ 200 în 1985), cît și de tendința în realizare a unor astfel de sisteme/rețele.

În mai multe lucrări se abordează problematica realizării modulare a CFP și SFP, cu posibilitatea implementării lor treptate (pas-cu-pas), ilustrîndu-se aceste abordări prin exemple de implementare, prin concepția de realizare a mașinilor unelte și prin modificările care apar în sistemul de fabricație/producție, în sensul raționalizării/optimizării lui. În același context este abordată și schimbarea care se produce în concepția, proiectarea și reproiectarea produselor, în modul în care trebuie abordată planificarea introducerii noilor mijloace de producție, în special în întreprinderile mici și medii.

Pregătirea specialiștilor este abordată în raport cu cerințele impuse de noile tehnologii avansate de fabricație/producție, într-un context foarte larg : recunoașterea informării despre toate domeniile ce concură la realizarea SFP („Awarness"), dezvoltarea și înțelegerea acestor domenii („Education"), cu realizarea unor deprinderi specifice, pentru cazuri particulare („Training"), rezultînd prezentarea AET, ca domeniu care trebuie să constituie o prioritate atît la nivel național și de întreprindere, cît și al individului.

Prezentînd perspectiva domeniului abordat în volum pînă în anul 2000, pe lîngă tendințele de ordin general, se subliniază noțiunile de bază ce definesc o întreprindere a viitorului, cu produsele potențiale pe care trebuie să le realizeze.

Se precizează noțiunile de celulă (CFP), sistem (SFP) și fabrică automatizată (FA) realizată în condițiile unei fabricații integrate pe bază de calculator (CIM), scoțîndu-se în evidență, ca sugestie, caracteristicile produsului viitorului, care va fi un „produs orientat către om/de tip uman" *(human-oriented product)*. De asemenea, se prezintă în anexe elemente informative asupra unor programe și proiecte guvernamentale care susțin aceste tendințe (în Japonia).

Toate lucrările din volum au referințe și sînt bogat ilustrate, putînd fi parcurse cu ușurință de un cerc larg de specialiști : cercetători, proiectanți, ingineri tehnologi, cadre didactice și studenți din anii superiori, doctoranzi, care sînt legați de producția automatizată, proiectare și fabricație asistată de calculator, informatică în general.

M. Guran

G. PUENTE, P. MacCONAILL (sub red.), *Computer Integrated Manufacturing* (Sisteme de fabricație integrate pe bază de calculator), *Proceedings of the 4th CIM Europe Conference, 18 — 20 May 1988, Madrid, Spain*, IFS (Publication), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 300 p.

Volumul cuprinde lucrările celei de-a 4-a Conferințe europene privind sistemele de fabricație integrate pe bază de calculator (CIM), în cadrul programului ESPRIT, susținut de țările CEE, pe timp de zece ani (1984—1993), în domeniul tehnologiei prelucrării informației (Information Technology — I.T.). În domeniul IT, CIM reprezintă o aplicație cheie, fiind legat de viitorul dezvoltării industriale a țărilor ce compun CEE.

Volumul este organizat pe 11 secțiuni :

1. În secțiunea introductivă se abordează problematica realizării unei comunități tehnologice europene în cadrul CEE, ca replică a dezvoltării tehnologice în S.U.A. și Japonia, cu prezentarea unei analize a rezultatelor obținute în cadrul programului ESPRIT, în domeniul

CIM, subdivizat în opt grupe de interes special subliniază opțiunile pentru acele direcții de cercetare și proiecte care vin efectiv în sprijinul unor realizări practice, în dezvoltarea industrială.

2. Intitulată „Orizonturi în fabricație", această secțiune prezintă implementarea CIM în industria chimică supusă unor restricții de ordin economic și ecologic, dezvoltării sistemelor de tip rețea de calculatoare în mediu industrial pe linia compatibilității MAP, precum și a transferului de tehnologii CIM din universități în industrie, pe baza experienței universității din S.U.A. (Carnegie Mellon University).

3. În această secțiune (ESPRIT în acțiune) se prezintă rezultatele obținute în trei direcții de cercetare :

— standardizarea/unificarea interfețelor în schimbul de informații privind produsele (de exemplu, datele privind geometria) ;

— dezvoltarea senzorilor vizuali și tactili la roboții folosiți în fabricația flexibilă, la manipularea pieselor de forme și dimensiuni diferite ;

— mijloace de testare a componentelor unui sistem CIM : calculatoare controlere de diferite tipuri (NC, CNC, DNC, AP) și mijloace de comunicație și transmisie a datelor, atît sub aspect Radware, cît și software, pentru a facilita integrarea acestor componente în CIM.

4. Această secțiune prezintă trei studii de caz : implementarea unui sistem CIM la firma de automobile Jaguar (UK), înțelegerea factorilor umani în toată complexitatea lor în cazul implementării CIM, pe baza unor evidențe care depășesc granițele naționale, precum și problematica toleranței la defecte în cadrul CIM.

5. Prin „Interfețe în cadrul sistemelor CIM" în această secțiune se prezintă trei subiecte :

— tehnicile de creare și manipulare a modelelor pentru produse, ca tehnici avansate de modelare ;

— transferul de date pentru controlul și programarea roboților în cadrul CIM, cu o propunere de interfață neutrală între sisteme de programare și unitățile de control ale roboților (IRDATA — Industrial Robot Data) ;

— transferul de date și interconectarea sistemelor de proiectare asistată (CAD) cu sistemele bazate pe modelarea cu elemente finite (FEM), în experimentele de analiză dinamică.

6. În această secțiune se prezintă evaluări de ordin strategic și economic în cazuri concrete de implementare a CIM pentru producția de articole din plastic (prin injecție), pentru industria prelucrătoare din Anglia, cu aspectele economice ale sistemelor CIM în țările capiraliste dezvoltate.

7. Tehnologia roboților în CIM prezintă două teme : un sistem de control pentru un robot cu capacități speciale de manipulare și un ansamblu mobil de montaj, robotizat.

8. În această secțiune este abordată problematica realizării CIM nu prin conceptul de „arhitectură de sistem deschis", ca model pentru o întreprindere industrială, cu un punct de vedere asupra implementării lui și cu o propunere de limbaj orientat pe obiect pentru ca un prim pas pentru crearea mediului care să permită activitatea de inginerie asistată de calculator la nivelul întregii întreprinderi.

9. Această secțiune se referă la proiectarea și implementarea unor sisteme de fabricație în industria grea (controlul fluxului de materiale, prin identificarea obiectelor), a unui sistem CIM pentru axele cutiilor de viteză, precum și aplicarea metodelor bazate pe element finit în modelarea proceselor de fabricație (ex. forjare și tratament termic).

10. În această secțiune se prezintă în metode ale inteligenței artificiale folosite în sisteme CIM : sisteme de baze de cunoștințe distribuite, acumularea de cunoștințe pentru un sistem de planificare și modelarea orientală pe obiect pentru sisteme de control a producției.

11. În cadrul prezentării efectelor sistemelor CIM asupra viitorului, industriei, se analizează o dezvoltare a organizării întreprinderii în cadrul conceptului de „arhitectură a sistemelor deschise", ca o condiție obligatorie a implementării sistemelor integrate pe bază de calculator.

Toate lucrările au numeroase referințe bibliografice, ilustrații și grafice.

Toți autorii sînt prezentați într-o anexă cu adresele instituțiilor în care lucrează.

Temele abordate în volum se adresează unui cerc larg de specialiști în domeniile CAD/CAM și CIM, informatică (automatică), organizare, cadrelor didactice și studenților, doctoranzilor care studiază tematicile prezentate.

M. Guran

M. M. ANDREASEN, T. AHM, *Flexible Assembly Systems* (Asamblarea flexibilă automată), IFS (Publication), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 250 p.

Lucrarea abordează un domeniu de mare actualitate, asamblarea flexibilă automată, în conexiune cu subsistemele de care este legată și condiționată în cadrul sistemelor de producție moderne : proiectarea și fabricația. Autorii folosesc în lucrare cercetări proprii în cadrul Institutului pentru dezvoltarea producției (Danemarca), precum și pe rezultatele obținute în alte țări. Organizată în opt capitole, cu 101 referințe bibliografice repartizate pe fiecare capitol și un index alfabetic, lucrarea prezintă un deosebit interes pentru un cerc larg de specialiști.

În capitolul 1 se face o analiză a noilor condiții impuse asamblării, odată cu dezvoltarea sistemelor flexibile de fabricație/producție (SFP) și a sistemelor de fabricație integrate pe bază de calculator (CIM). Plecînd de la diversitatea produselor, se introduce cu motivație necesitatea flexibilității în producție, prin SFP și CIM cu caracteristicile de bază ale noilor tehnologii față de cele tradiționale. În final se subliniază obiectivele urmărite și îndeplinite în cadrul lucrării :

- tehnicile care pot fi utilizate pentru a realiza flexibilitatea și calitatea cerute în sistemele automate de asamblare ;
- modul de planificare și dezvoltare a sistemelor automate de asamblare în concordanță cu orientările strategice ale întreprinderii și cu cerințele de flexibilitate.

De asemenea, se dau o serie de motivații și demonstrații privind dezvoltarea produsului, în condițiile folosirii sistemelor de asamblare.

Capitolul 2 tratează noțiunile de variabilitate și flexibilitate pentru produse și sistemele de producție. Se concluzionează că raționalizarea asamblării în condițiile unui nivel ridicat de automatizare și flexibilitate a fabricației, trebuie avute în vedere schimbările atît în conceperea produsului, cît și a dotării cu echipamente necesare producției.

În capitolul 3 se prezintă problema flexibilității pentru sistemele de asamblare, prin descrierea organizării spațiale și temporale a asamblării. Se au în vedere, în special, gradul de automatizare, controlul și tratarea defectelor în sistemele flexibile de asamblare.

Următoarele două capitole (4 și 5) prezintă transportul și alimentarea, inclusiv manipularea obiectelor în sistemele de asamblare flexibile, cu dotările auxiliare presupuse de ultimele cerințe în astfel de sisteme.

În capitolul 6 se tratează problematica privind proiectarea în vederea asigurării unui grad de flexibilitate cerut, cu prezentarea unor indicatori de flexibilitate și a ideii de a concepe sistemele în ideea de a introduce treptat/gradat automatizarea, cu consecințe asupra structurii produsului.

În ultimele două capitole (7 și 8) se tratează dezvoltarea și implementarea sistemelor flexibile atît pe plan tehnic și tehnologic, cît și economic, avîndu-se în vedere considerente de ordin strategic. Ca o concluzie se estimează o creștere mare a sistemelor flexibile de asamblare automată, atît din motive de raționalizare a activităților din întreprindere, cît și datorită progreselor mari care se realizează în tehnologiile suport pentru astfel de sisteme : tehnologiile informatice, robotizarea avansată, microelectronica. Se atrage atenția însă asupra necesității unei analize atente a noilor tehnologii în raport cu obiectivele urmărite pe termen mediu-lung, înainte de a face investiții privind implementarea noilor sisteme.

Lucrarea se adresează și poate fi utilă unui cerc larg de specialiști, în special cercetători, proiectanți și tehnologi preocupați de dezvoltarea industriei constructoare de mașini și prin implementarea sistemelor flexibile automate de asamblare.

În lucrare se dau multe exemple de sisteme flexibile, fiind bogat ilustrată cu tabele, grafice, reprezentări sugestive pentru conceptele noi pe care le promovează, constituindu-se într-o monografie prezentată unitar, ușor de urmărit.

M. Guran

J. MORTIMER (sub red.), *Statistical Process Control, An Executive Briefing* (Controlul statistic al proceselor tehnologice. O informare pentru cadrele de conducere IFS (Publications), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 200 p.

Volumul este o culegere de lucrări privind metodologia asigurării calității prin controlul în sens cibernetic al proceselor tehnologice utilizînd metode statistice.

Demersul întreprins de autori este simptomatic pentru deplasarea actuală a accentului de la controlul prin inspecție la menținerea sub control a proceselor tehnologice în scopul îmbu-

nătăţirii simultane a calităţii şi productivităţii. Metodele statistice contribuie la identificarea surselor de variabilitate, la separarea cauzelor sistematice de cele aleatoare, astfel încît stabilitatea performanţelor să poată fi asigurată.

Spectrul preocupărilor intervenţiilor cuprinse în lucrare este mai larg decît domeniul tradiţional al controlului statistic al calităţii, obiectivul urmărit fiind continua îmbunătăţire a producţiei prin utilizarea metodelor statistice. Impactul acestor metode depăşeşte sfera producţiei, influenţînd cercetarea, proiectarea, desfacerea, pregătirea personalului etc.

Lucrările au un caracter aplicativ, adresîndu-se celor care doresc să introducă metodele statistice în controlul proceselor industriale sau să îmbunătăţească aceste metode beneficiind de experienţa altora.

Prima secţiune grupează cinci lucrări în care se prezintă legătura dintre calitate şi productivitate, principiile şi perspectivele controlului statistic, motivaţia adaptării metodelor statistice.

A doua secţiune, consacrată conducerii în domeniul calităţii, cuprinde cinci lucrări arătînd locul metodelor statistice în conceptul de control total al calităţii, organizarea echipelor direct responsabile cu calitatea producţiei, implicaţii privind învăţămîntul şi educaţia pentru calitate.

Aplicarea metodelor statistice în proiectare este conţinutul celor cinci lucrări grupate în a treia secţiune. Sînt prezentate metodele Taguchi şi aplicarea lor în Marea Britanie şi Statele Unite, experienţa acumulată la firma Philips privind statistica industrială, metode de optimizare şi de utilizare a calculatoarelor, punîndu-se în evidenţă legătura directă dintre controlul statistic şi conducerea cu calculatoare a producţiei (CIM).

O nouă secţiune, conţinînd patru lucrări, este dedicată implementării metodelor statistice de control în contextul unei producţii automatizate, care utilizează pe o scară largă mijloace electronice de calcul. Facilităţile oferite de calculatoare şi programele specifice sînt prezente relativ detaliat.

Situaţii speciale în care aplicarea metodelor statistice a impus o nuanţare a conceptelor şi metodelor sînt descrise în secţiunea a cincea, conţinînd patru lucrări care abordează problema laturilor mici, a automatizării şi a toleranţelor.

Secţiunea a şasea conţine două studii de caz din industriile de proces, referitoare la fabricarea polimerilor şi a berii.

Ultima secţiune conţine trei lucrări care abordează legătura dintre aprovizionare şi controlul statistic al proceselor, ilustrînd-o cu experienţa unor întreprinderi mecanice din Marea Britanie.

Volumul este auto-consistent prin diversitatea preocupărilor şi prin echilibrul dintre aspectele teoretice şi cele aplicative. Dacă baza teoretică este în general familiară specialiştilor, modalitatea eficientă de aplicare a principiilor în întreprinderile moderne, rezultatele spectaculoase obţinute prin utilizarea tehnicilor electronice de calcul în vederea controlului statistic, constituie o informaţie preţioasă şi un bun îndreptar de acţiune.

A. Mihalache

A. LASCHET, *Simulation von Antriebssystemen. Modellbildung der Schwingungssysteme und Beispiele aus der Antriebstechnik* (Simularea sistemelor de acţionare. Modelarea sistemelor cu vibraţii şi exemple din tehnica acţionărilor) vol. 9, din seria : *Fachberichte Simulations* (Referate din domeniul simulării), sub red. D. MÖLLER şi B. SCHMIDT, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988, 440 p., 268 fig.

Lucrarea, constituind volumul 9 al seriei *Fachberichte Simulation*, editată de D. Möller şi B. Schmidt, a fost elaborată în cadrul secţiei de organe de maşini şi modelarea maşinilor din Institutul Politehnic din Achen, unde autorul, ca bursier, a fost colaborator ştiinţific.

Conţinutul volumului (440 pagini) este structurat în 13 capitole, urmate de concluzii finale pertinente, o anexă cu momentele perturbatoare ale diferitelor motoare cu piston şi o bibliografie bogată.

În cadrul lucrării sînt utilizate tehnici evoluate de simulare şi se folosesc cele mai noi pachete de programe şi echipamente de calcul.

Capitolele volumului : 1. Introducere ; 2. Aplicarea tehnicilor de simulare ; 3. Simularea vibraţiilor ; 4. Modul de construire al modelelor ; 5. Metode de soluţionare a ecuaţiilor diferenţiale asociate mişcării ; 6. Elemente perturbatoare ; 7. Elemente de transmisie ; 8. Determinarea încărcării şi estimarea duratei de funcţionare ; 9. Analiza vibraţiilor în domeniul frecvenţelor

10. Simularea inversă a vibraţiilor ; 11. Dezvoltarea modelului de vibraţii torsionale, aplicat la un model de vibraţii de torsiune-încovoiere ; 12. Structura software-lui pentru simularea vibraţiilor ; 13. Exemple de simulări ale vibraţiilor cu suprapunerea mai multor elemente perturbatoare şi transmisie ; 14. Concluzii, dau o imagine cuprinzătoare asupra conţinutului.

Partea fundamentală a lucrării o constituie simularea vibraţiilor în domeniul timpului şi studierea vibraţiilor de torsiune ale arborilor şi ale altor sisteme de transmisie, deosebit de importante în funcţionarea maşinilor. Procedeele de modelare folosite permit atît luarea în consideraţie a caracteristicilor reale ale elementelor, uneori neliniare, cît şi soluţionării analitice adecvate. O importanţă deosebită se acordă factorilor perturbatori şi metodelor de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale care descriu mişcările vibratorii.

Tehnica de simulare dezvoltată este finalizată remarcabil prin aplicaţii practice importante, iar rezultatele obţinute sînt verificate pe baza unor măsurători experimentale riguroase, efectuate cu aparatură modernă.

Toate acestea conferă lucrării un caracter ingineresc de prim ordin.

În concluzie, lucrarea este originală şi deosebit de valoroasă atît prin dezvoltările teoretice, cît mai ales prin cele aplicative şi experimentale, care constituie modele remarcabile de cercetare şi finalizare ale unei probleme tehnice importante.

N. Posea şi *V. Marinoiu*

B. B. MANDELBROT, *Die fraktale Geometrie der Natur* (Geometria fractală a naturii), Birkhauser Verlag, Basel/Boston, 1987, 492 pagini, numeroase figuri şi indicaţii bibliografice.

Geometria standard nu poate descrie adecvat cele mai multe forme întîlnite în natură, considerînd obiectele corespunzătoare ca fiind „fără formă" sau „amorfe". Noua geometrie a profesorului Mandelbrot de la Universitatea Harvard caracterizează multe din aceste forme utilizînd noţiunea de mulţime fractală sau fractal. În colaborare cu fizicieni, chimişti, biologi, meteorologi, astronomi, statisticieni şi economişti autorul cărţii a ajuns la convingerea că multor fenomene pînă în prezent incomplet descriptibile le este comun principiul autosimilitudinii, cu o imagine grafică regulată, însă la un înalt nivel decît cel standard, „euclidian". Pentru descrierea mulţimilor fractale prof. Mandelbrot utilizează, pe lîngă parametrii autosimilitudinii, dimensiunile fractale (dimensiunile Hausdorff).

Geometria fractală datează din anul 1975, unele din noţiunile ei au fost însă dezvoltate anterior — în alte scopuri. Lucrarea de faţă, dedicată acestei noi ramuri, este bogat ilustrată cu imagini realizate pe calculator. Nu este însă propriu-zis o carte de matematici şi nu presupune cunoştinţe speciale ale cititorului ci doar dispoziţia acestuia de a urmări autorul la analize „fractale" privind sisteme dinamice, relieful terestru, turbulenţa, structura universului, creşterea biologică, macromolecule, etiajul, fluctuaţia preţurilor ş.a. Cu toate că volumul ei este mare — 12 capitole cu 43 subcapitole — nu reprezintă o monografie ci un eseu ştiinţific ce propune soluţii pentru o varietate mare de probleme inabordabile pînă în prezent. Forme pentru care s-au utilizat denumiri ca răsucit, cutat, grăunţos, arborescent, straniu etc. pot fi cercetate acum riguros, iar mulţimile considerate ca fiind excepţii se dovedesc a reprezenta regula.

Marele număr de probleme abordate face ca această carte, cu o prezentare grafică foarte îngrijită, să se adreseze unui cerc larg de cercetători ; în acelaşi timp ea constituie un manifest : Geometria naturii este fractală !

R. Friedrich

P. CSONKA, *Theory and Practice of Membrane Shells* (Teoria şi practica plăcilor curbe subţiri în starea de membrană), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987, 726 pagini, 553 figuri, 125 tabele, numeroase indicaţii bibliografice.

Plăcile curbe subţiri oferă soluţii economice şi estetice, pentru realizarea unei mari varietăţi de acoperişuri. Proiectarea acestora face obiectul cărţii de faţă : primul capitol se ocupă de concepte geometrice şi statice de bază, capitolele 2 pînă la 15 — de studiul stării de membrană, iar capitolul 16 de starea de încovoiere. Metodele de calcul prezentate nu apelează la cunoştinţe speciale de matematici, iar capitolele cărţii pot fi studiate independent.

Capitolul 2 tratează pe larg plăcile curbe subțiri de rotație de tip cupolă și turn sub acțiuni axial-simetrice, antisimetrice și periodice. Se dau și reguli de proiectare privind forme și rezemări rezonabile respectiv asigurarea compatibilității deformațiilor plăcii curbe și a inelelor marginale. Plăcile cilindrice pentru acoperișuri fac obiectul capitolului 3, cuprinzînd studiul acestora în cazul diferitelor profiluri transversale cît și reguli de proiectare.

Bazele teoretice pentru calculul plăcilor curbe subțiri de formă oarecare sînt cuprinse în capitolul 4. Spre deosebire de capitolele anterioare se lucrează cu coordonate, încărcări și eforturi proiectate în planul bazei și cu funcții de tensiuni. Majoritatea capitolelor următoare beneficiază de aceste noțiuni. Astfel capitolul 5 se referă la plăci curbe subțiri triunghiulare denumire utilizată mai ales pentru paraboloizi de rotație pe un contur triunghiular (echilateral, isoscel sau format din trei arce de cerc) rezemați pe arce semirigide. Pentru integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale se utilizează metoda diferențelor finite. Plăcile curbe pe contur dreptunghiular fac obiectul capitolului 6, cel mai dezvoltat al cărții. Se studiază paraboloidul eliptic cu ajutorul seriilor Fourier duble și simple cît și al metodei diferențelor finite. Tabelele cu valori numerice ușurează proiectarea acestor plăci. La sfîrșitul capitolului se reia placa cilindrică din capitolul 3, în coordonate proiectate. Capitolul 7 cuprinde studiul plăcilor curbe pe un contur sub formă de paralelogram, cu simetrie dublă și cuadruplă.

Plăcile conoidale și elicoidale sînt tratate în capitolul 8, iar cele sub formă de paraboloizi hiperbolici delimitați de generatoare rectilinii respectiv paraboloizi hiperbolici în șa, în capitolul 9. Capitolul 10 se referă la plăci curbe sectoriale cu simetrie ciclică, iar capitolul 11 la plăci curbe poligonale și anume paraboloizi de rotație pe contur poligonal. În capitolul 12 forma suprafeței mediane a plăcilor curbe rezemate punctual se determină astfel încît să nu fie necesare elemente marginale. Plăcile curbe stelate ș.a. paraboloizii de rotație pe un contur sub formă de poligon stelat sînt tratate în capitolul 13. Capitolul 14 se referă pe scurt la paraboloizi și cilindri pe contur eliptic iar capitolul 15 la plăci curbe sub formă de abside derivate din paraboloizi, cilindri și sfere.

Cartea se încheie cu un scurt capitol privind teoria de încovoiere a plăcilor curbe subțiri, dezvoltîndu-se doar varianta simplificată aplicabilă plăcilor pleoștite. În critica teoriei plăcilor curbe din ultimul paragraf se pune în evidență faptul că dintre toate metodele de calcul — mai mult sau mai puțin aproximative — cea bazată pe teoria de membrană are o semnificație deosebită cerînd doar satisfacerea condițiilor de echilibru. Acesta fiind însă un aspect fundamental, teoria de membrană se remarcă pe lîngă simplitate prin fiabilitate și poate fi utilizată atît pentru compararea diferitelor variante de structuri cît și la proiectare, cu eventuale corecturi ce țin seama de perturbarea ei.

Valoarea cărții lui P. Csonks rezidă în faptul că cuprinde toate rezultatele importante ale teoriei de membrană a plăcilor curbe subțiri utilizate la realizarea acoperișurilor, inclusiv valoroasele contribuții ale autorului în acest domeniu. Expunerea clară este bogat ilustrată, numeroasele tabele și exemple de calcul facilitînd aplicarea practică a teoriei. Se remarcă bibliografia bogată, la obiect, ce cuprinde și principalele publicații ale autorilor români M. Soare, A. Baleș/ M. Soare și V. Gioncu. Metodele analitice tratate în carte oferă posibilitatea obținerii unei priviri de ansamblu asupra legăturii între încărcări, geometria plăcii curbe și distribuția tensiunilor, necesară și utilă inginerului proiectant, chiar dacă acesta poate apela la rezultate numerice oferite de un calcul cu metoda elementelor finite pentru orice geometrie, încărcare și material.

R. Friedrich

L. SORȘ, I. BALÁSZ, *Design of Plastic Moulds and Dies* (Proiectarea matrițelor pentru mașinile de injecție și extrudere), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.

Volumul celor doi autori constituie o colecție exhaustivă de matrițe pentru mașini de injecție și extrudere, selectate cu grijă dintr-un mare număr de forme uzuale, în multe cazuri, oferind chiar variante, pentru a permite studii comparative și alegerea tipului optim.

Sînt oferite datele esențiale pentru dimensionare, schițele sînt trasate la scară și, acolo unde sînt necesare, sînt tratate, și metodele de calcul, clar și succint, într-un mod ce facilitează elaborarea de programe pentru proiectarea asistată de calculator.

Cantitatea neobișnuită de informație dovedește experiența îndelungată a autorilor în proiectarea matrițelor, volumul fiind indispensabil proiectantului, cît și în alegerea materia-

lului pentru cursurile de specialitate. De asemenea, în colaborare cu specialiști în informatică, conține material suficient pentru elaborarea de programe-expert în proiectarea cu ajutorul sistemelor de calcul existente.

R. Vâlceanu

Lucrările Simpozionului internațional „*Fundații de mașini cu sarcini dinamice — Leningrad '89*"

În organizarea Institutului de cercetări și proiectări „Leningradsky Promstroiproekt" a avut loc, în intervalul 22 — 27 mai 1989, Simpozionul de fundații de mașini cu titlul de mai sus.

Lucrările Simpozionului au fost publicate în două volume, conținînd 56 referate, în două ediții — una în limba engleză și alta în limba rusă. Circa trei sferturi din autori au fost specialiști din cercetare, proiectare și învățămînt din U.R.S.S., iar 42 de autori au fost din alte 14 țări. Au participat și două persoane din România. Pot cita o serie de specialiști bine cunoscuți și în cercurile noastre (cu scuza de a fi omis pe alții) : din U.R.S.S. : V. A. Ilyichev, B. G. Korenev, V. M. Pjatetsky, O. A. Savinov, I. S. Sheinin, A. I. Tseitlin ; din alte țări : M. Bata, D. Makovička (Cehoslovacia) ; K. Ishihara, Y. Yoshida (Japonia) ; M. Novak (Canada) ; R. Cieselski (Polonia) ; S. Prakash (S.U.A.) ; D. Weiner (Suedia) etc.

Lucrările Simpozionului, expuse timp de 4 zile, au fost împărțite în patru secțiuni : I. Proprietăți dinamice ale solului și tasări sub acțiunea vibrațiilor. II. Cercetări teoretice și experimentale ale vibrațiilor fundațiilor de mașini rezemate pe sol sau pe piloți. III. Fundațiile de mașini ale zilelor de azi — experiențe în proiectare și exploatare. IV. Căi de reducere a vibrațiilor și de consolidare a fundațiilor de mașini.

Unele lucrări, depuse prea tîrziu, nu au mai fost incluse în cele două volume, dar au fost expuse.

Tot în cadrul Simpozionului a avut loc o masă rotundă, în timpul căreia mulți participanți au expus activitățile care au loc la institutiile de unde provin, s-au pus întrebări, s-au purtat discuții.

Prin noutățile care s-au prezentat, prin bogăția de informații aduse, Simpozionul a constituit o manifestare științifică reușită.

Organizatorii au manifestat o atenție deosebită față de participanți, făcîndu-le agreabile atît manifestarea științifică, cît și aspectul turistic al ședерii la Leningrad.

Eventuale relații, sau procurări ale volumelor de comunicări pot fi obținute scriind pe adresa : V. M. Pjatetsky, Leningradsky Promstroiproekt, 160 Leninsky prospekt, 196247 Leningrad.

Gh. Buzdugan

R
F 25574

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

6

TOMUL 48

noiembrie—decembrie

1989

1990 -05- 16

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. Radu C. BOGDAN
Prof. VIRGILIU N. CONSTANTINESCU
Prof. NICOLAE CRISTESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. LAZĂR DRAGOŞ
Prof. CONSTANTIN IAMANDI
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Prof. GHEORGHE SILAŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri :

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. DAN MATEESCU
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R.S. România se vor adresa la : ROMPRESFILATELIA, sectorul export-import presă, P.O. Box 12—201, telex : 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România ; în ţară, abonamentele se primesc la oficiile poştale.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Colegiului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti, 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 48, nr. 6 noiembrie — decembrie 1989

SUMAR

ELENA UNGUREANU-DAVID, Un algoritm de calcul pentru mişcarea tridimensională a unui fluid într-un mediu poros stratificat 539

N. POSEA şi AL. PUPĂZESCU, Metode de estimare a durabilităţii la solicitări multiaxiale în domeniul oligociclic, cu aplicaţii la compensatori lenticulari 547

AL. D. STAN, Regimul pulsatoriu la scurgerea fluidului bifazic prin elementul de măsură 561

G. ONU, Efectul lunecării la bare cu pereţi subţiri 581

W.W. KECS, Asupra vibraţiilor longitudinale în bare elastice omogene, având forma de trunchi de con circular 597

INDEX ALFABETIC 605

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Articolele, originale și de înalt nivel științific, vor fi redactate într-un stil concis, evitîndu-se introducerile foarte lungi. Articolele vor fi dactilografiate la două rînduri, pe hîrtie albă de bună calitate, în două exemplare. Prima pagină trebuie să conțină titlul lucrării, numele autorului (autorilor) și locul de muncă precum și un rezumat de cel mult 150 cuvinte. Toate datele științifice și tehnice prezentate trebuie formulate în unități SI. Formulele trebuie dactilografiate sau scrise cu cerneală, clar și indicîndu-se caracterul literelor (aldine, italice etc.) Indicii inferiori și superiori trebuie indicați clar, pentru evitarea confuziilor. Ca semn zecimal se va utiliza virgula. Tabelele vor fi dactilografiate pe foi separate, cu indicarea titlurilor și cu numerotarea în cifre arabe. Desenele și diagramele trebuie executate în tuș, pe hîrtie de calc, la dimensiuni aproximativ duble față de acelea finale și cu litere scrise cu îngrijire și suficient de mari pentru a fi vizibile după reproducere. Referințele bibliografice vor fi menționate, pe cît posibil, în ordine alfabetică, la sfîrșitul articolului. În text vor fi indicate prin numărul din lista referințelor, în paranteze drepte.

Referințele din reviste vor conține inițiala și numele autorului (autorilor), titlul articolului (subliniat cu o linie), numele revistei (prescurtat conform uzanțelor internaționale), numărul volumului (subliniat dublu), numărul fascicului și anul de apariție în paranteză, de exemplu :

1. S. AIZICOVICI, C. FETECĂU, Existence of Couette flows in second grade fluids, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 31, 5 (1986).

Referirea la o carte se face indicînd inițiala și numele autorului (autorilor), titlul cărții (subliniat cu o linie), editura, orașul, anul apariției și numerele paginilor, dacă referirea se face la o parte a cărții, de exemplu :

3. W. FLÜGGE, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heldelberg, New York, 1972, p. 93—99.

Manuscrisele vor fi trimise la adresa : 79717 București, 22, Calea Victoriei 125.

UN ALGORITM DE CALCUL PENTRU MIȘCAREA TRIDIMENSIONALĂ A UNUI FLUID ÎNTR-UN MEDIU POROS STRATIFICAT

de ELENA UNGUREANU-DAVID
Institutul de Matematică, București

În lucrare se determină mișcarea unui fluid către o sursă, într-un mediu poros limitat de două plane paralele impermeabile și format din două strate, cu permeabilitatea constantă într-unul din strate și variabilă în celălalt. De asemenea, se determină timpul minim de parcurs al unei particule fluide pînă la sursă.

1. INTRODUCERE

Mișcarea tridimensională a unui fluid în medii poroase stratificate a fost studiată în mai multe lucrări, în majoritatea lor considerîndu-se că permeabilitatea în fiecare strat este constantă, în unele însă s-a considerat și permeabilitate variabilă ([1] — [6]).

În lucrarea de față se consideră mișcarea unui fluid către o sursă, într-un mediu poros limitat de două plane paralele orizontale impermeabile. Mediul poros este format din două strate separate de un plan orizontal. Coeficientul de permeabilitate este constant în stratul de sus și variabil în cel de jos. Pe frontiera de sus a mediului poros se află o sondă de debit Q, pozitiv sau negativ, după cum sonda este de extracție sau de injecție.

În lucrare se determină presiunea și viteza de filtrație a fluidului în fiecare strat, precum și timpul în care o particulă fluidă parcurge distanța de la un anumit punct din mediul poros pînă la sondă, dacă aceasta este de extracție sau în sens invers, dacă sonda este de injecție.

Algoritmul de calcul pentru problema propusă constă în rezolvarea unui sistem de ecuații cu derivate parțiale prin metoda separării variabilelor, iar soluția se dă cu ajutorul unor funcții de tip Bessel.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Un mediu poros ocupă domeniul cuprins între două plane paralele orizontale impermeabile și este saturat cu un fluid incompresibil, de viscozitate μ și greutate specifică γ. Distanța dintre plane este L, iar în partea de sus a mediului poros, chiar pe frontiera acestuia, se află o sondă de extracție, de debit constant Q și presupusă punctiformă. La mari distanțe, în direcție orizontală, presiunea fluidului se menține constantă, egală cu p_0. Admitem că Q este pozitiv. Dacă sonda este de injecție, atunci Q este considerat negativ și problema poate fi formulată analog.

Se alege sistemul de axe ortogonale $Oxyz$ astfel încît originea să se găsească în punctul unde se află sonda, axele Ox și Oy se iau în planul orizontal impermeabil de sus, iar axa Oz după verticala descendentă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 6, 1989, P. 539—546

Mediul poros este format din două strate avînd coeficientul de filtraţie egal cu

$$k = \begin{cases} k_1 = \text{const:} & \text{pentru} \quad 0 < z < l, \\ k_2 = a + bz & \text{pentru} \quad l < z < L, \end{cases} \tag{1}$$

unde a şi b sînt constante, $a > 0$, $b \neq 0$ şi $a + bz > 0$.

Notăm cu p_1 şi p_2, respectiv cu $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$, presiunile şi vitezele de filtraţie din cele două strate. Legea lui Darcy, în absenţa forţelor masice, se scrie ([7], [8]).

$$\mathbf{v}_i = -\frac{k_i}{\gamma} \operatorname{grad} p_i, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Aceste relaţii, împreună cu ecuaţiile de continuitate $\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0$, ne conduc la ecuaţiile

$$\Delta p_1 = 0,$$

$$k_2 \Delta p_2 + \frac{\partial k_2}{\partial z} \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace.

Mişcarea fluidului este axial simetrică şi putem folosi coordonatele cilindrice $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi z. Atunci ecuaţiile (3) se scriu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + \frac{1}{z + c} \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0, \quad c = \frac{a}{b}. \tag{4}$$

Condiţiile la limită pe frontiera domeniului de mişcare şi pe frontiera de separare a celor două strate, unde trebuie să existe o continuitate a presiunilor şi a componentelor verticale v_{1z} şi v_{2z} ale vitezelor de filtraţie, sînt :

$$v_{1z} = 0 \quad \text{pentru} \quad z = 0, \; v_{2z} = 0, \quad \text{pentru} \quad z = L,$$

$$p_1 = p_2, \; v_{1z} = v_{2z} \quad \text{pentru} \quad z = l, \tag{5}$$

$$p_i = p_0 \quad \text{pentru} \quad r \to \infty, \; i = 1,2.$$

Folosind (2), aceste condiţii se scriu numai în funcţie de presiuni

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \quad \text{pentru} \quad z = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0 \quad \text{pentru} \quad z = L,$$

$$p_1 = p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial z} \quad \text{pentru } z = l, \tag{6}$$

$$p_i = p_0 \quad \text{pentru} \quad r \to \infty, \; i = 1,2.$$

Prezența sondei în originea sistemului de axe este pusă în evidență prin existența unui termen singular în expresia funcției de presiune p_1, avînd forma $-(Q/2\pi)(r^2+z^2)^{-1/2}$, ca și în mecanica fluidelor libere [9]. Singularitatea fiind chiar pe frontiera domeniului, peretele sondei prin care intră sau iese debitul Q este o semisferă, de aceea apare $Q/2\pi$ în loc de $Q/4\pi$.

Problema la limită constă în găsirea soluției sistemului de ecuații cu derivate parțiale (4), cu condițiile la limită (6). După aflarea funcțiilor de presiune, se vor determina vitezele de filtrație din (2). De asemenea se va calcula timpul minim în care o particulă fluidă de pe un plan $z = h$ va ajunge la sondă.

3. SOLUȚIA PROBLEMEI LA LIMITĂ

Vom rezolva pe rînd ecuațiile sistemului (4).

Așa cum am spus mai sus, funcția p_1 se ia de forma

$$p_1(r, z) = p_0 - \frac{\gamma}{k_1}\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + P_1(r, z), \tag{7}$$

iar funcția $P_1(r, z)$ satisface o ecuație de aceeași formă ca și p_1, care este scrisă în (4). Pentru rezolvarea ei folosim metoda separării variabilelor

$$P_1(r, z) = R_1(r)\cdot Z(z), \tag{8}$$

de unde se obțin ecuațiile diferențiale

$$Z'' - \alpha^2 Z = 0, \qquad R_1'' + \frac{1}{r}R_1' + \alpha^2 R_1 = 0.$$

Prima ecuație are soluțiile $e^{\alpha z}$ și $e^{-\alpha z}$, iar a doua ecuație, făcînd schimbarea de variabilă $\alpha r = u$, se transformă într-o ecuație de tip Bessel, care are soluțiile $J_0(\alpha r)$ și $Y_0(\alpha r)$, acestea fiind funcțiile lui Bessel de speța întîi, respectiv speța a doua, de ordin zero [10]. Datorită însă condiției de la infinit, numai soluția $J_0(\alpha r)$ este bună. Făcînd integrarea după parametrul real α de la 0 la ∞, din (7) și (8) găsim expresia pentru p_1,

$$p_1(r, z) = p_0 - \frac{\gamma}{k_1}\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \int_0^\infty [A(\alpha)e^{\alpha z} + B(\alpha)e^{-\alpha z}]J_0(\alpha r)\,d\alpha, \tag{9}$$

unde $A(\alpha)$ și $B(\alpha)$ sînt constante de integrare în raport cu r și z, care urmează să fie determinate din condițiile la limită. Folosind reprezentările integrale de la funcțiile Bessel, primul termen se mai poate scrie

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty e^{-\alpha z}J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{10}$$

Pentru integrarea ecuației a doua din sistemul (4)se face o schimbare de variabilă și de funcție

$$u = z + c, \quad c = \frac{a}{b}, \quad p_2(r, z) = p_2(r, u - c) = P_2(r, u). \tag{11}$$

Ecuația cu derivate parțiale pentru P_2 se obține din (4) și folosind din nou metoda separării variabilelor,

$$P_2(r, z) = R_2(r) \cdot U(u), \tag{12}$$

rezultă ecuațiile diferențiale

$$R_2'' + \frac{1}{r} R_2' + \alpha^2 R_2 = 0, \qquad U'' + \frac{1}{u} U' - \alpha^2 U = 0.$$

Prima ecuație are o singură soluție convenabilă, pe $J_0(\alpha r)$, analog cazului de mai înainte. Ecuația în U are ca soluții funcțiile lui Bessel $I_0(\alpha u)$ și $K_0(\alpha u)$, de speța întîi și a doua, modificate, de ordin zero. Înlocuind în (11) și (12) și efectuînd integrarea după parametrul real α de la 0 la ∞, obținem

$$p_2(r, z) = p_0 + \int_0^\infty [C(\alpha) I_0(\alpha(z + c)) + D(\alpha) K_0(\alpha(z + c))] J_0(\alpha r)\, d\alpha, \tag{13}$$

unde $C(\alpha)$ și $D(\alpha)$ sînt constante de integrare în raport cu r și z și urmează să fie determinate din condițiile la limită.

Din (9), (10) și (13) obținem

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\gamma}{k_1} \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\, d\alpha + \int_0^\infty \alpha [A(\alpha) e^{\alpha z} - B(\alpha) e^{-\alpha z}] \cdot J_0(\alpha r)\, d\alpha,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = \int_0^\infty \alpha [C(\alpha)\, I_1(\alpha(z + c)) - D(\alpha) K_1(\alpha(z + c))]\, J_0(\alpha r)\, d\alpha. \tag{14}$$

Aici am folosit faptul că $I_0' = I_1$ și $K_0' = -K_1$.

Din condițiile la limită (6) se determină expresiile

$$A(\alpha) = B(\alpha) = -\frac{\gamma}{2k_1} \frac{Q}{2\pi} \frac{M(\alpha)}{N(\alpha)},$$

$$C(\alpha) = -\gamma \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{N(\alpha) I_1(\alpha(L + c))}, \quad D(\alpha) = -\gamma \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{N(\alpha) K_1(\alpha(L + c))}, \tag{15}$$

unde am notat

$$M(\alpha) = [k_1 S_0 - (a + bl)S_1]\, e^{-\alpha l}; \qquad N(\alpha) = k_1 S_0 \operatorname{sh} \alpha l + (a + bl) S_1 \operatorname{ch} \alpha l,$$

$$S_0 = \frac{K_0(\alpha(l + c))}{K_1(\alpha(L + c))} + \frac{I_0(\alpha(l + c))}{I_1(\alpha(L + c))}, \tag{16}$$

$$S_1 = \frac{K_1(\alpha(l + c))}{K_1(\alpha(L + c))} - \frac{I_1(\alpha(l + c))}{I_1(\alpha(L + c))}.$$

Expresiile funcţiilor de presiune se determină din (9) şi (13)

$$p_1(r, z) = p_0 - \frac{\gamma}{k_1} \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \int_0^\infty M(\alpha) N^{-1}(\alpha) \operatorname{ch} \alpha z \cdot J_0(\alpha r)\, d\alpha \right], \tag{17}$$

$$p_2(r, z) = p_0 - \gamma \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty N^{-1}(\alpha) \left[\frac{K_0(\alpha(z + c))}{K_1(\alpha(L + c))} + \frac{I_0(\alpha(z + c))}{I_1(\alpha(L + c))} \right] J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

4. CALCULUL VITEZELOR DE FILTRAŢIE

Din expresiile presiunilor şi din legea lui Darcy (2), găsim vitezele de filtraţie din cele două strate.

În primul strat componentele v_{1r} şi v_{1z}, după direcţia radială şi după direcţia axei Oz, au expresiile

$$v_{1r}(r, z) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha M(\alpha)}{N(\alpha)} \operatorname{ch} \alpha z \cdot J_1(\alpha r)\, d\alpha, \tag{18}$$

$$v_{1z}(r, z) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha M(\alpha)}{N(\alpha)} \operatorname{sh} \alpha z \cdot J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

Aici am folosit faptul că $J_0' = -J_1$. Dacă se consideră reprezentarea integrală (10) pentru primul termen şi ţinem cont de notaţiile (16), mai putem scrie

$$v_{1r}(r, z) = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha}{N(\alpha)} [k_1 S_0 \operatorname{ch} \alpha(l - z) + (a + bl) S_1 \operatorname{sh} \alpha(l - z)]\, J_1(\alpha r)\, d\alpha, \tag{19}$$

$$v_{1z}(r, z) = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha}{N(\alpha)} [k_1 S_0 \operatorname{sh} \alpha(l - z) + (a + bl) S_1 \operatorname{ch} \alpha(l - z)] J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

Pentru stratul al doilea obținem componentele vitezei de filtrație

$$v_{2r}(r, z) =$$

$$= -(a+bz)\frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{N(\alpha)}\left[\frac{K_0(\alpha(z+c))}{K_1(\alpha(L+c))} + \frac{I_0(\alpha(z+c))}{I_1(\alpha(L+c))}\right] J_1(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$v_{2z}(r, z) = \tag{20}$$

$$= -(a+bz)\frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{N(\alpha)}\left[\frac{K_1(\alpha(z+c))}{K_1(\alpha(L+c))} - \frac{I_1(\alpha(z+c))}{I_1(\alpha(L+c))}\right] J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Din (16) se observă că $S_0 > 0$. Deoarece funcția lui Bessel I_1 este crescătoare, iar funcția K_1 este descrescătoare și deoarece $l < L$, $z < L$, avem $S_1 > 0$, $N(\alpha) > 0$ pentru orice α real pozitiv, iar expresiile din parantezele pătrate din (20) sînt și ele pozitive.

Am presupus $Q > 0$ și din (18) — (20) rezultă că toate componentele vitezelor de filtrație din cele două strate sînt negative, ceea ce înseamnă că fluidul are direcția de curgere spre originea sistemului de axe, unde se află sonda de extracție, așa cum am presupus și noi. Dacă $Q < 0$, sonda este de injecție și fluidul are curgerea în sens invers.

Pentru particulele fluide situate în același plan orizontal $z = h =$ $=$const., componenta după axa Oz a vitezei de filtrație este maximă pentru particula situată chiar pe axa Oz, lucru care se poate verifica ușor din calcule. Acest fapt este în perfectă concordanță cu considerentele de ordin mecanic.

5. CALCULUL TIMPULUI MINIM DE PARCURS

În practică este important să se știe timpul minim în care particulele fluide situate pe un plan $z = h$ ajung la sondă. Acest lucru este important mai ales cînd în mediul poros se află două fluide separate de un plan orizontal la momentul inițial. Prin extracția fluidului de deasupra, înaintează spre sondă și celălalt fluid și este necesar să se știe cînd acesta va ajunge la sondă.

Este evident că dintre particulele fluide situate pe planul $z = h$, cele de pe axa Oz vor ajunge întîi la sondă. De aceea timpul minim se determină calculînd timpul în care particula fluidă care se găsește în punctul $r = 0$, $z = h$ va ajunge în origine.

Din relația cunoscută [7]

$$v_z(0, z) = m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

unde m este porozitatea mediului poros, scoatem

$$t = m\int_h^0 \frac{\mathrm{d}z}{v_z(0, z)} = -m\int_0^h \frac{\mathrm{d}z}{v_z(0, z)}. \tag{21}$$

Distingem două cazuri.

I. Cazul $0 < h \leqslant l$.

În acest caz drumul parcurs de particula fluidă se află în întregime în primul strat, care are coeficientul de porozitate $m_1 = \text{const}$. Din (18) scriem

$$v_{1z}(0, z) = -\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1}{z^2} - G(z)\right], \tag{22}$$

unde

$$G(z) = \int_0^\infty \alpha \operatorname{sh} \alpha z \cdot M(\alpha) N^{-1}(\alpha) \mathrm{d}\alpha, \tag{23}$$

iar timpul este egal cu

$$t_1(h) = \frac{2\pi m_1}{Q} \int_0^h \frac{z^2 \mathrm{d}z}{1 - z^2 G(z)}. \tag{24}$$

Vom arăta că $z^2 G(z) < 1$ și putem face o dezvoltare în serie după z. Scriem relația integrală

$$l^{-2} = \int_0^\infty \alpha \mathrm{e}^{-\alpha l} \mathrm{d}\alpha$$

și calculăm expresia

$$l^{-2} - G(z) = \int_0^\infty \alpha \mathrm{e}^{-\alpha l} N^{-1}(\alpha)[k_1 S_0(\operatorname{sh}\alpha l - \operatorname{sh} \alpha z) + (a + bl) S_1(\operatorname{ch} \alpha l + \operatorname{sh} \alpha z)]\mathrm{d}\alpha.$$

Această expresie este pozitivă, deoarece $S_0 > 0$, $S_1 > 0$, $l > z$, de unde rezultă că

$$z^2 G(z) < \frac{z^2}{l^2} < 1.$$

Atunci putem face dezvoltarea în serie

$$[1 - z^2 G(z)]^{-1} = 1 + z^2 G(z) + \ldots$$

pe care o înlocuim în (24). Schimbînd ordinea de integrare în raport cu α și z, obținem

$$t_1(h) = \frac{2\pi m_1}{Q}\left[\frac{h^3}{3} + \int_0^\infty M(\alpha) N^{-1}(\alpha) H(\alpha, h)\, \mathrm{d}\alpha + \ldots\right], \tag{25}$$

unde

$$H(\alpha, h) = \alpha \int_0^h z^4 \operatorname{sh} \alpha z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\alpha^4}[\alpha^4 h^4 \operatorname{ch} \alpha h - 4\alpha^3 h^3 \operatorname{sh} \alpha h +$$

$$+ 12 \alpha^2 h^2 \operatorname{ch} \alpha h - 24 \alpha h \operatorname{sh} \alpha h + 24 \operatorname{ch} \alpha h - 24]. \tag{26}$$

Pentru $\alpha = 0$, rezultă $H(\alpha, h)$ finit, chiar zero, iar pentru $\alpha \to \infty$, $H(\alpha, h)$ înmulțit cu factorul $e^{-\alpha l}$, din expresia lui $M(\alpha)$, este de asemenea finit.

Primul termen din (25) coincide cu expresia timpului minim $t_0 = 2\pi mh^3/3Q$ din cazul mediului poros omogen, nelimitat în direcția pozitivă a axei Oz [1].

Dacă $h = l$, obținem

$$t_1(l) = \frac{2\pi m_1}{Q}\left[\frac{l^3}{3} + \int_0^\infty M(\alpha)\, N^{-1}(\alpha) H(\alpha, l)\, d\alpha + \ldots\right]. \tag{27}$$

II. Cazul $l < h \leqslant L$.

În acest caz particula fluidă parcurge un drum care se află atît în primul strat, cît și în al doilea. Timpul total de parcurs este

$$t_2(h) = t_1(l) - \int_l^h m_2 \frac{dz}{v_{2z}(0, z)}. \tag{28}$$

În al doilea termen coeficientul de porozitate m_2 poate fi funcție de z, ca și coeficientul de filtrație. Dacă însă se admite că el este constant, atunci iese în afara integralei. Funcția $v_{2z}(0, z)$ se înlocuiește din (20). Dar calculul integralei este foarte complicat, fiind necesară utilizarea dezvoltărilor asimptotice pentru funcțiile lui Bessel. Aici nu facem acest calcul. Facem însă observația că al doilea termen este pozitiv, deoarece funcția $v_{2z}(0, z)$ este negativă. Deci la timpul t_1 se mai adaugă un timp pentru parcurgerea unei anumite distanțe în stratul al doilea.

Primit în redacție la 15 iulie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. I. GHEORGHIȚĂ, *Capitole din teoria mișcărilor în mediile poroase*, Edit. Tehnică, București, 1957.
2. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei, București, 1963.
3. ELENA UNGUREANU, *Asupra generalizării formulei lui Millionșcikov*, Comunicările Academiei R.P. România, **XII**, 10 (1962).
4. ELENA UNGUREANU, *Mișcări ale fluidelor în medii poroase neomogene*, St. și cerc. mat., **18**, 9 (1966).
5. G. V. GOLUBEV, G.G. TUMAȘEV, *Filtrația nesjimaemoi jidcosti v neodnorodnoi poristoi srede*, Izd. Kazanscogo Universiteta, Kazan, 1972.
6. ELENA DAVID-UNGUREANU, S. GOGONEA, H. I. ENE, *Hidrodinamica mediilor poroase neomogene*, Edit. Tehnică, București, 1989.
7. Șt. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
8. H. I. ENE, S. GOGONEA, *Probleme în teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1973.
9. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei — Gauthier-Villars, Bucharest-Paris, 1959.
10. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică*, Edit. Tehnică, București, 1958.

METODE DE ESTIMARE A DURABILITĂȚII LA SOLICITĂRI MULTIAXIALE ÎN DOMENIUL OLIGOCICLIC, CU APLICAȚII LA COMPENSATORI LENTICULARI

de N. POSEA și AL. PUPĂZESCU
Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Se prezintă două procedee de evaluare a duratei de viață, unul bazat pe curba $\sigma - N$ și celălalt bazat pe energia de deformație. Avantajele celor două procedee constau în faptul că folosesc constante de material rezultate din solicitări la oboseală în cazul solicitărilor uniaxiale. Procedeele teoretice analizate au fost aplicate la compensatorii lenticulari. Criteriul energetic a dat rezultate mai apropiate de cele obținute experimental.

În general, încercările la oboseală urmăresc comportarea reperelor studiate la un număr mare de cicluri $N > 10^4 \ldots 10^6$. Pentru anumite componente din utilajul chimic și petrochimic interesează îndeosebi comportarea la solicitări variabile la un număr mic de cicluri $N < 10^4$. În această categorie se încadrează și compensatorii lenticulari.

În prezent, se caută elaborarea unor metode sigure de calcul a durabilității la oboseală pentru starea multiaxială de tensiuni. Metodele trebuie să îndeplinească două cerințe: să se bazeze pe principiile generale ale mecanicii ruperii, iar constantele materialului induse în criteriul adoptat, să fie cele determinate din încercările standard la solicitări uniaxiale

1. CRITERII PRIVIND ESTIMAREA DURABILITĂȚII

Din necesitatea stabilirii legăturii între datele diferitelor încercări la oboseală, au fost propuse mai multe criterii, ceea ce probează atît complexitatea problemei, cît și lipsa unui criteriu cu valabilitate generală.

Cele mai multe criterii se bazează pe tensiuni și se referă la starea de tensiuni biaxială [3].

În ceea ce privește criteriile bazate pe tensiuni în starea biaxială, pentru materiale inițial izotrope, se pot distinge două criterii de bază. Criteriile de primul tip se bazează pe analiza invarianților de tensiune ciclică și pot fi prezentați în următoarea formă generală [10, 11]:

$$G(I_1, I_2, N_f) = 0, \tag{1}$$

unde $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2$; $I_2 = \sigma_1 \sigma_2$ și N_f reprezintă numărul de cicluri.

În criteriile de tipul II, se presupune că ruperea după un număr dat de cicluri are loc atunci cînd tensiunea maximă tangențială cu un oarecare adaos, care depinde de tensiunea normală ce acționează în planul tensiunii maxime tangențiale, atinge valorile tensiunii de rupere la forfecare pură [14]. Acest criteriu poate îmbrăca forma generală:

$$\tau_{max} + f(\sigma_n) = \tau_F \tag{2}$$

în care τ_{max} reprezintă valoarea tensiunii tangențiale maxime, $f(\sigma_n)$ o funcție dependentă de tensiunea σ_n ce se dezvoltă pe planul în care există τ_{max}, iar τ_p o tensiune echivalentă ce înglobează numărul de cicluri.

În domeniul oligociclic pentru oboseala multiaxială criteriul de rupere utilizat este bazat pe deformații, deoarece, în acest caz, sînt urmărite amplitudinile deformațiilor.

Durabilitatea la oboseală poate fi exprimată ca o funcție a componentelor de deformare plană :

$$N_f = f(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \tag{3}$$

sau în funcție de deformarea maximă la forfecare (γ_m) și de deformarea axială normală (ε_n) din planul tensiunii maxime de forfecare :

$$N_f = g(\gamma_{max}, \varepsilon_n). \tag{4}$$

Analiza criteriilor prezentate pune în evidență următoarele [6] :
— criteriile nu iau în considerare interdependența dintre tensiuni și deformații în procesul de deformare al materialului ;
— unele dintre criterii nu posedă proprietatea de invarianță față de modificările sistemului de coordonate.

Durabilitatea la oboseală, atît în domeniul oligociclic, cît și în cel multiciclic, are două stadii de existență : perioada de apariție a fisurilor „inițiale" și perioada de propagare a acestora, pînă la rupere.

Analiza primului stadiu se face cu ajutorul amplitudinii deformării ciclice și/sau tensiunii ciclice în grosimea materialului, pentru piese cu suprafața netedă. Pentru piesele ce prezintă concentratori de tensiuni, geometria acestora este corelată cu tensiunea normală și/sau deformația normală.

În al doilea stadiu al procesului de distrugere, propagarea fisurii pînă la rupere, este necesar să se determine cîmpurile locale de tensiuni și deformații în zona adiacentă vîrfului fisurii.

Elaborarea unui criteriu general constă deci în stabilirea parametrului de distrugere, care să poată fi folosit atît în stadiul apariției fisurii, cît și în cel de propagare al acesteia.

2. ESTIMAREA DURABILITĂȚII ÎN CAZUL OBOSELII MULTIAXIALE, FOLOSIND DATE ALE CURBEI $\sigma-N$

Deoarece deformările plastice datorite forfecării au un rol important în formarea fisurilor și dezvoltarea lor în faza inițială a distrugerii, aproape toate încercările privind analiza fenomenului de oboseală multiaxială se bazează, în general, pe studierea tensiunilor și deformațiilor de forfecare. Dacă constantele de material care intervin sînt cele din experiențele clasice (de la solicitări simple) atunci rezultatele teoriilor bazate pe deformațiile de forfecare devin echivalente cu cele obținute prin teoria deformațiilor principale maxime.

Urmărirea apariției și creșterii fisurilor în stadiul inițial al dezvoltării lor [1], efectuată pe o serie întreagă de materiale, au pus în evidență două tipuri de distrugere. Astfel, pentru oțelul de tip austenitic, în funcție de starea tensiunilor și amplitudinea deformațiilor ciclice, distrugerea

se produce datorită creşterii fisurilor de tip I (smulgere normală) sau fisurilor de tip II (fisuri de forfecare). În cazul solicitării de întindere (fig. 1 *a*) distrugerea de tip I s-a observat pentru toate amplitudinile deformaţiilor. În cazul torsiunii, forma de distrugere prin forfecare (tip II), (fig. 1 *b*) s-a observat pentru amplitudini înalte de deformare, iar pentru nivele joase ale amplitudinilor distrugerea a fost de tip I.

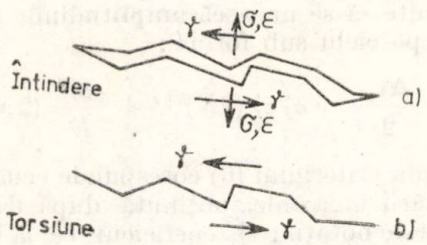


Fig. 1

Tensiunile şi deformaţiile ce acţionează perpendicular pe direcţia propagării fisurilor de forfecare au influenţă asupra vitezei de propagare a fisurilor.

În general, suprafaţa fisurilor are o formă neregulată (fig. 1), deoarece fisura trece prin planurile de separare ale grăunţelor.

În cazul aplicării sarcinii de forfecare se produce o întrepătrundere mecanică a marginilor fisurilor şi ca rezultat apar forţe de frecare considerabile. Ca urmare, tensiunile şi deformaţiile în vîrful fisurii se micşorează, ceea ce determină scăderea vitezei de propagare a fisurii. Tensiunea şi deformaţiile ce sînt perpendiculare pe fisurile de forfecare pot să apară şi în alte cazuri ce diferă de cazul torsiunii pure. În această situaţie este posibilă deschiderea fisurilor pe suprafeţele laterale şi scăderea sau dispariţia forţelor de frecare. În vîrful fisurilor apar, în acest caz, tensiuni şi deformaţii mai mari care conduc la creşterea vitezei de propagare.

Pentru descrierea procesului considerat, în lucrarea [18] a fost propusă utilizarea relaţiei

$$\hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}_n + \frac{\hat{\sigma}_{n0}}{E} = \gamma_f'(2N)^c + \frac{\tau_f'}{G}(2N)^b, \qquad (5)$$

care are în partea stîngă trei parametri referitori la sarcini.

Partea dreaptă a acestei ecuaţii reprezintă expresia în deformaţii a curbei de oboseală la torsiune cu următoarele notaţii:
γ_f' — coeficient ce ţine seama de influenţa plasticităţii la oboseală în cazul forfecării; c, exponentul componentei deformaţiei plastice la oboseală; τ_f', rezistenţa la oboseală la forfecare; G, modulul de elasticitate transversal; $2N$, numărul de cicluri pînă la formarea fisurii superficiale de lungime 1,00 mm; b, exponentul rezistenţei la oboseală din ecuaţia curbei de oboseală.

Termenii încărcării se determină în planul în care amplitudinea deformaţiei ciclice de forfecare are valoare maximă şi au următoarele semnificaţii: $\hat{\gamma}$, amplitudinea deformaţiei maxime de forfecare; $\hat{\varepsilon}_n$, deformaţia de întindere perpendiculară pe direcţia deformaţiei maxime de for-

fecare; $\hat{\sigma}_{n0}$, tensiunea medie normală, perpendiculară pe direcţia deformaţiei maxime de forfecare; E, modulul lui Young.

În urma experienţelor efectuate [18] s-a constatat că în cazul solicitărilor multiaxiale defazate, faţă de solicitările sinusoidale (simple, proporţionale) apare o întărire suplimentară ciclică, care trebuie luată în considerare la aprecierea duratei de viaţă. Criteriul cel mai simplu ce a fost propus în acest scop [17] şi care poartă numele SWT (Smith-Watson-Topper) permite să se unească amplitudinile deformaţiilor ciclice şi tensiunea maximă pe ciclu sub forma:

$$\sigma_1^{max} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_1}{2} = \sigma_f' \varepsilon_f' (2N)^{b+c} + \frac{\sigma_f'^2}{E} (2N)^{2b}. \tag{6}$$

Partea din dreapta criteriului (6) corespunde ecuaţiei curbei de oboseală în cazul deformării uniaxiale, obţinută după datele încercărilor la întindere, cu următoarele notaţii: ε_f', coeficient ce ia în considerare influenţa plasticităţii asupra rezistenţei la oboseală în cazul solicitării uniaxiale; c, exponentul componentei deformaţiei plastice la oboseală; σ_f' rezistenţa la oboseală în cazul încărcării uniaxiale; b, exponentul componentei rezistenţei la oboseală; $2N$, numărul de cicluri pînă la formarea fisurii de 1,00 mm.

Termenii din stînga sînt parametrii încărcării şi reprezintă: $\Delta\varepsilon_1/2$, amplitudinea deformaţiilor principale maxime: σ_1^{max}, tensiunea normală maximă din planul de acţiune al deformaţiilor principale maxime.

3. ESTIMAREA DURABILITĂŢII PRIN CRITERII ENERGETICE

Unul dintre primele criterii energetice de apreciere a durabilităţii prezentat în lucrarea [4] este finalizat prin relaţia

$$\Delta\bar{\sigma}\Delta\bar{\varepsilon} \text{ (sau } \Delta\bar{\varepsilon}^p) = KN_f^{\alpha} \tag{7}$$

n care $\Delta\bar{\sigma}$ şi $\Delta\bar{\varepsilon}$ sînt amplitudinile tensiunii echivalente şi, respectiv, a deformării echivalente în sensul criteriului de rezistenţă al lui Mises. S-a dovedit, de asemenea, că parametrii materialului K şi α depind de raportul tensiunilor principale (deformaţiilor).

În lucrările [5, 9] s-a introdus criteriul de energie specifică de deformare care corespunde scopului propus (vezi § 1). În aceste lucrări, se arată că energia specifică totală de deformare ΔW^t — reprezintă parametrul cel mai cuprinzător pentru analiza fenomenelor de oboseală.

În continuare, se prezintă un criteriu de rupere la oboseală multiaxială bazat pe energia specifică de deformaţie [6].

3.1. EXPRESIA ENERGIEI SPECIFICE TOTALE DE DEFORMARE ÎN CAZUL SOLICITĂRII CICLICE MULTIAXIALE

Deformaţia specifică totală ε impusă unui corp se manifestă prin componenta elastică ε^e care se anulează după înlăturarea acţiunii care a produs-o, respectiv componenta plastică ε^p remanentă după înlăturarea

acțiunii. Componenta elastică ε^e datorită valorilor mici în cazul monoaxial de solicitare se poate aproxima fără a comite o eroare sensibilă prin $\varepsilon = \sigma/E$.

În figura 2*a* se ilustrează caracteristicile de deformare pentru un ciclu complet, alternant simetric, în raport cu deformația specifică ($\varepsilon_{med} = 0$).

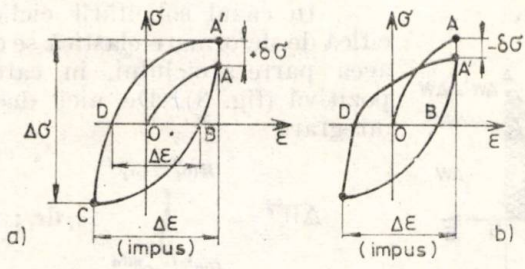


Fig. 2

Aria închisă de conturul $ABCDA'$ — bucla de histerezis — reprezintă energia disipată prin deformații plastice. După cum se observă, la sfîrșitul ciclului, punctul A' se poate plasa deasupra punctului A care a marcat începutul ciclului, ceea ce corespunde unei ecruisări ciclice manifestate prin creșterea tensiunii $+ \delta\sigma$. În alternativa cînd punctul A' se plasează sub punctul inițial A (fig. 2*b*), materialul manifestă o înmuiere ciclică, aspect caracteristic pentru materiale care în stare inițială au fost ecruisate.

La repetarea numărului de cicluri într-o încercare cu deformație impusă, ecruisarea sau înmuierea ciclică progresează pînă cînd se atinge starea de ecruisare saturată [2], cînd $\pm \delta\sigma \to 0$, iar bucla de histerezis este stabilizată și are un contur închis.

În cazul solicitării ciclice, energia se consumă, în principal, datorită deformării plastice. Cea mai mare parte din energia mecanică externă se transformă în căldură, partea rămasă producînd degradarea materialului. În felul acesta degradarea materialului se poate corela cu energia mecanică condiționată de acțiunea forțelor externe. Deci rezistența materialului la rupere la oboseală se poate caracteriza prin capacitatea de a absorbi energia produsă de solicitările exterioare.

Rezultă, deci, necesitatea evaluării componentelor energiei de deformare elastică și plastică la solicitare pînă la rupere.

În ipoteza materialului omogen și izotrop, calculul energiilor specifice de deformare elastică și plastică se face luînd pentru creșterea deformației expresia

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij}. \tag{8}$$

3.1.1. Energia specifică de deformație elastică

Energia specifică de deformație elastică se calculează cu relația

$$\Delta W^e = \int \sigma_{ij}\, d\varepsilon^e_{ij} \tag{9}$$

în care, pentru un material elastic, izotrop, deformaţia elastică este :

$$\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\,, \tag{10}$$

unde δ este simbolul lui Kronecher.

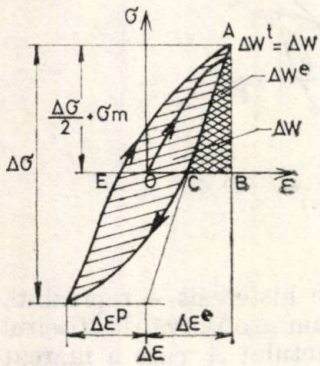


Fig. 3

În cazul solicitării ciclice, energia specifică de deformare elastică se calculează pentru acea parte a ciclului, în care tensiunea este pozitivă (fig. 3). De aici decurg limitele de integrare

$$\Delta W^{e} = \int_{H(\sigma_i^{min})\,\sigma_i^{min}}^{H(\sigma_i^{max})\,\sigma_i^{max}} \sigma_i\,\mathrm{d}\varepsilon_i\,; \qquad i=1,2,3 \tag{11}$$

în care σ_i, ε_i sînt tensiunile principale, respectiv deformaţiile principale : $H(\sigma_i)$ este funcţia Heaviside cu valorile

$$\begin{aligned} H(\sigma_i) &= 1 \quad \text{pentru} \quad \sigma_i \geqslant 0, \\ H(\sigma_i) &= 0, \quad \text{cînd} \quad \sigma_i < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Dacă se adoptă $\sigma_i^{min} < 0$ şi $\sigma_i^{max} > 0$, atunci, înlocuind relaţia (8) în (9) şi efectuînd integrarea, ţinînd seama de (10) şi (12), se obţine

$$\Delta W^{e} = \frac{1}{2E}\,[(I_1^{max})^2 - 2\,(1+\nu) I_2^{max}], \tag{13}$$

unde $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$ — sînt primul şi al doilea invariant al tensorului tensiunilor.

În cazul stării uniaxiale de tensiune relaţia (13) devine :

$$\Delta W^{e} = \frac{1}{2E}\,(\sigma^{max})^2 \tag{14}$$

care este echivalentă cu suprafaţa zonei dublu haşurate din figura 3.

Expresia ΔW^{e}, (13), se poate scrie sub forma :

$$\Delta W^{e} = \frac{1+\nu}{3E}(\bar{\sigma}^{max})^2 + \frac{1-2\nu}{6E}\,(\sigma_{kk}^{max})^2, \tag{15}$$

în care s-a introdus tensiunea echivalentă

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\,[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2] = 3\,J_2. \tag{16}$$

Termenul J_2 este al doilea invariant al deviatorului tensiunilor :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\,. \tag{17}$$

Primul termen din partea dreaptă al relației (15) este energia de deviație a elementului de volum unitar, adică energia acumulată prin schimbarea formei, iar al doilea termen, energia de modificarea volumului.

De multe ori este mai avantajos ca relația (15) să se scrie sub forma:

$$\Delta W^e = \frac{1+\nu}{3E}\left[(\bar{\sigma}_a + \bar{\sigma}_m)^2 + \frac{1-2\nu}{6E}\,(\sigma_{kk}^{max})^2\right], \tag{18}$$

în care $\bar{\sigma}_a$ este componenta cu semn variabil a tensiunii echivalente și care are valoarea medie nulă, iar $\bar{\sigma}_m$, tensiunea medie.

3.1.2. Energia specifică de deformare plastică

Energia specifică de deformare plastică se calculează cu expresia:

$$\Delta W^p = \int_{ciclu} \sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p, \tag{19}$$

unde integrarea se efectuează pe bucla închisă a deformării ciclice. Dacă se face ipoteza incompresibilității materialului la deformarea plastică, $\mathrm{d}\varepsilon_{kk}^p = 0$, relația (19), ținînd seama de (17), se scrie sub forma:

$$\Delta W^p = \int_{ciclu} s_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p. \tag{20}$$

Pentru a pune în evidență relația între tensiuni și deformații, pentru un ciclu staționar, se introduce noțiunea de curbă etalon [7]:

Curba etalon în cazul uniaxial se determină ca înfășurătoare unică a ramurei superioare (corespuzătoare tensiunii normale de întindere) a buclelor de histerezis construite pentru diferite amplitudini de deformare. Pentru început se translatează buclele de histerezis construite față de sistemul σ, ε pînă cînd toate punctele corespunzătoare tensiunii normale minime de compresiune coincid cu punctul 0. După aceea se translatează fiecare buclă de histerezis de-a lungul porțiunii liniare pînă cînd ramurile superioare, corespunzătoare tensiunii normale de întindere, coincid pe o anumită porțiune. Înfășurătoarea superioară a buclelor staționare definește curba etalon.

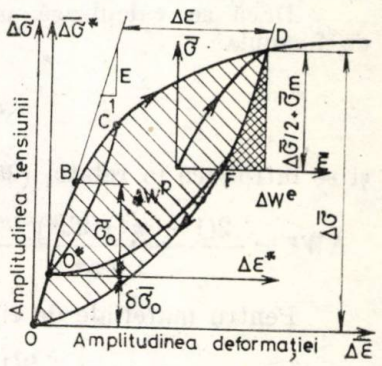


Fig. 4

Se precizează că punctul O (fig. 4) este identic cu cel mai de jos punct al zonei de proporționalitate luînd în considerație toate buclele de histerezis.

Ecuația curbei etalon în sistemul de axe $(\Delta\bar{\sigma}^*, \Delta\bar{\varepsilon}^*)$ are forma:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon^e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon^p}{2} = \frac{\Delta\sigma^*}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2k^*}\right)^{1/n^*}, \tag{21}$$

unde n^* și k^* sînt constante determinate din datele încercărilor uniaxiale. Toate mărimile notate cu steluță (*) se raportează la sistemul de axe cu originea în O^*.

Componenta deformației plastice pentru solicitare proporțională este dată de relația [19]:

$$\varepsilon_{ij}^p = 3(2k^*)^{-1/n^*} (\bar{\sigma}^*)^{(1-n^*)/n^*} s_{ij}^*. \tag{22}$$

Introducînd relația (22) în (20) și notînd:

$$\bar{\sigma}^* = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*\right)^{1/2}, \quad \bar{\varepsilon}_p \left(\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p\right)^{1/2} \tag{23}$$

se obține

$$\Delta W^p = \int_{ciclu} \bar{\sigma}^* \, \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p. \tag{24}$$

Tensiunea echivalentă $\bar{\sigma}^*$ și deformația plastică echivalentă $\bar{\varepsilon}^p$ corespund amplitudinilor tensiunilor și deformațiilor plastice (fig. 4). Pentru a se sublinia aceasta se notează $\bar{\sigma}^* = \Delta\bar{\sigma}^*$ și $\bar{\varepsilon}^p = \Delta\bar{\varepsilon}^p$.

Suprafața $OBCDO$ (fig. 4) este egală cu [8]:

$$\Delta W^p = \frac{1 - n^*}{1 + n^*} (\Delta\bar{\sigma} - \Delta\bar{\sigma}_0) \Delta\bar{\varepsilon}^p + \delta\bar{\sigma}_0 \Delta\bar{\varepsilon}^p \tag{25}$$

în care $\delta\bar{\sigma}_0$ reprezintă creșterea zonei elastice (măsura consolidării-stabilizării ciclice (vezi fig. 2), care se determină cu formula:

$$\delta\bar{\sigma}_0 = \Delta\bar{\sigma} - \Delta\bar{\sigma}^* = \Delta\bar{\sigma} - 2k^* \left(\frac{\Delta\bar{\varepsilon}^p}{2}\right)^{n^*}. \tag{26}$$

Indicele n^* din această ecuație este indicele de stabilizare a curbei etalon, cu originea în O^*. Pentru materiale de tip Masing n^* se înlocuiește cu indicele de stabilizare al curbei ciclice n', $k^* = k'$, $\delta\bar{\sigma}_0 = 0$.

Dacă se calculează amplitudinea deformării plastice echivalente cu formula:

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p = 2 \left(\frac{\Delta\bar{\sigma}^*}{2k^*}\right)^{1/n^*} \tag{27}$$

și se introduce în relația (25), se obține:

$$\Delta W^p = \frac{2(1 - n^*)(2k^*)^{-1/n^*}}{1+n^*} (\Delta\bar{\sigma}^*)^{(n^*+1)/n^*} - 2(2k^*)^{1/n^*} \delta\bar{\sigma}_0 (\Delta\bar{\sigma}^*)^{1/n^*}. \tag{28}$$

Pentru materiale de tip Masing expresia (28) se reduce la

$$\Delta W^p = \frac{2(1 - n')(2k')^{-1/n'}}{1 + n'} \cdot (\Delta\bar{\sigma})^{(n'+1)/n'}. \tag{29}$$

Este de remarcat faptul că în calculul energiei specifice de deformare plastică s-a folosit relația (22) care leagă deformarea plastică de

deviatorul tensorului tensiunilor. Această metodă de calcul corespunde teoriei plasticității de tip „deformant" în cazul solicitărilor proporționale și dă aproape același rezultat ca și teoria curgerii.

Cu ajutorul relațiilor (18) și (28) se poate deci calcula energia specifică totală de deformație

$$\Delta W^t = \Delta W^e + \Delta W^p. \tag{30}$$

3.1.3. Criteriu de rupere la oboseală în starea de tensiuni multiaxială pentru o solicitare proporțională

În general, acest criteriu se exprimă prin egalitatea

$$\Delta W^t(I_1, J_2) = F(N_f), \tag{31}$$

în care N_f reprezintă numărul de cicluri pînă la rupere.

Pe baza rezultatelor experimentale funcția $F(N_f)$ se alege de forma :

$$F(N_f) = KN_f^{\alpha} + C, \tag{32}$$

unde K, α și C sînt constante de material, care se stabilesc experimental.

În cazul încercărilor triaxiale, mărimea K va depinde de un parametru ρ dependent de deformațiile specifice controlate [6] :

$$\rho = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2}. \tag{33}$$

Alegînd relația de dependență sub forma

$$K(\rho) = a\rho + b, \tag{34}$$

relația (32) devine

$$F_f(N_f) = (a\rho + b)\, N_f^{\alpha} + C. \tag{35}$$

Întrucît $\Delta W^t = \Delta W^e + \Delta W^p$, folosind (18), (28) și (35), criteriul de rupere la aboseală (31) ia forma :

$$\left[\frac{1+\nu}{3E}(\bar{\sigma}_a + \bar{\sigma}_m)^2 + \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_{kk}^{max})^2\right] + \left[\frac{2(1-n^*)(2k^*)^{1/n^*}}{1+n^*}(\Delta\bar{\sigma}^*)^{(1+n^*)/n^*} + 2(2k^*)^{-1/n^*}\delta\bar{\sigma}_0^*(\Delta\bar{\sigma}^*)^{1/n^*}\right] = (a\rho + b)N_f^{\alpha} + C, \tag{36}$$

în care $\bar{\sigma}_m < \bar{\sigma}_a$, $\sigma_i^{min} < 0$.

Deoarece $\bar{\sigma}^2 = 3J_2$, $\sigma_{kk} = I_3$, se observă că criteriul (36) este funcție de primii doi invarianți ai tensorului tensiunilor și de proprietățile materialului la solicitări ciclice. Criteriul ia în considerare presiunea

hidrostatică prin tensiunea medie $\overline{\sigma}_m$ și nu depinde de sistemul de axe adoptat.

În cazul cînd tensiunea medie lipsește și materialul corespunde modelului Masing [6], criteriul (36) ia forma

$$\frac{1+\nu}{12E}\left[1+\psi\Delta\overline{\sigma}^{(1-n')/n'}\right]\Delta\overline{\sigma}^2+\frac{(1-2\nu)}{6E}(\sigma_{kk}^{max})^2=(a\rho+b)N_f^{\alpha}+C, \quad (37)$$

în care

$$\psi=\frac{24E(1-n')(2k')^{-1/n'}}{(1+\nu)(1+n')}. \quad (37')$$

În special, în cazul solicitării uniaxiale $\Delta\overline{\sigma}=\Delta\sigma$, $\overline{\sigma}_a+\overline{\sigma}_m=\sigma_a+\sigma_m=\sigma^{max}$, $\overline{\sigma}_{kk}=\sigma^{max}$ egalitatea (36) devine:

$$\left[2\frac{(1+n^*)(2k^*)^{-1/n^*}}{1+n^*}(\Delta\sigma^*)^{(1+n^*)/n^*}+2(2k^*)^{-1/n^*}\delta\sigma_0(\Delta\sigma^*)^{1/n^*}\right]+$$
$$+\frac{(\Delta\sigma/2+\sigma_m)^2}{2E}=K_u N_f^{\alpha}+C_u, \quad (38)$$

unde indicele u se referă la condiția uniaxială de solicitare.

Observînd figura 4, se poate arăta că primul termen dintre parantezele pătrate este egal cu suprafața care corespunde buclei O^*BCDO^* (și care satisface modelul Masing la care lipsește fenomenul de ecruisare ciclică), iar al doilea termen — suprafeței corespunzătoare buclei $OFDO^*O$ (care nu satisface modelul Masing).

În vederea utilizării criteriului propus sînt necesare date referitoare la diagrama $\sigma-\varepsilon$ pentru solicitarea ciclică uniaxială, din care se determină E și n'. În cazul cînd materialul nu satisface modelul Masing este necesar să se cunoască ecuația curbei etalon care permite determinarea lui n^* și $\delta\sigma_0$.

Pentru determinarea constantelor a ș b este necesar să se efectueze încercări la oboseală pentru două valori ale raportului deformațiilor. Una din aceste încercări poate fi încercarea la oboseală la întindere uniaxială, pentru care $\rho=-2\nu/(1+\nu)$, iar a doua — încercarea la oboseală la torsiune pentru care $\rho=2$.

Influența tensiunii medii asupra durabilității la oboseală se poate evalua cu ajutorul ecuației (36).

Pentru un raport dat al deformațiilor, coeficienții din partea dreaptă ai acestei ecuații sînt cunoscuți.

La amplitudini date tensiunilor, valoarea ce se află în partea stîngă a ecuației (36) crește odată cu creșterea tensiunii medii pozitive, ceea ce produce micșorarea lui N_f (exponentul α este negativ).

4. EVALUAREA DURATEI DE FUNCȚIONARE A COMPENSATORILOR LENTICULARI

Compensatorii lenticulari se utilizează în practică în calitatea de:
— compensatori de dilatație în instalațiile de conducte;
— elemente sensibile ale traductoarelor de presiune;
— elemente de protecție în cadrul supapelor de siguranță.

Compensatorii de dilatație cu dimensiuni mici poartă denumirea de silfoane.

Silfoanele sînt supuse la solicitări ciclice, fie datorite variațiilor de temperatură sau presiune, fie datorită solicitărilor mecanice propriu-zise.

În toate cazurile, durata de funcționare în siguranță a silfoanelor constituie o problemă importantă cu repercursiuni directe asupra securității și eficienței instalației din care face parte.

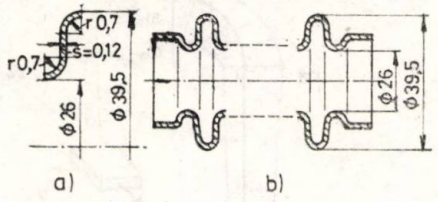


Fig. 5

Din această cauză evaluarea duratei de viață a silfoanelor constituie o problemă tehnică de mare importanță.

Deoarece, prin natura exploatării silfoanelor, solicitările variabile la care sînt supuse au un număr redus de cicluri, calculul duratei de viață se efectuează pentru domeniul oligociclic.

Pentru calculul durabilității la oboseală multiaxială la care sînt solicitate silfoanele se folosesc cele două criterii analizate și precizate prin relațiile (6), respectiv (36) și (37).

Calculul duratei de funcționare se efectuează pentru silfonul de tip Ø 26 × 39,5 (fig. 5) care are o grosime $s = 0{,}12$ mm și o rază a lentilei $r = 0{,}7$ mm. Silfonul este confecționat din oțel W 4541 care are rezistența admisibilă $\sigma_a = 400$ MPa ce corespunde unui coeficient de siguranță $c = 1{,}5$.

Pentru determinarea stării de tensiuni și deformații s-a folosit programul CCL (calculul compensatorilor lenticulari) elaborat în I.P.G. Ploiești [16]. Cu ajutorul programului sînt determinate tensiunile ($\sigma_\varphi, \sigma_\theta$) (fig. 6) și deplasările în punctele semnificative ale lentilei.

Solicitările sînt de două tipuri:

— presiune unitară și deplasare axială nulă;

— presiune nulă și deplasare axială unitară.

Valorile obținute pentru $p = 1$ și $\Delta = 0$, sînt prezentate în figura 6 *a*, *b*, *c*.

Calculul durabilității silfonului se efectuează pentru următoarele amplitudini ale tensiunilor:

1. Pentru silfonul considerat cu ajutorul programului CCL s-au determinat valorile presiunii maxime și ale deformației maxime admisibile $p_{max} = 0{,}319$ MPa și $\Delta_{max} = 0{,}550$ mm. Cu aceste valori, pentru o temperatură de funcționare $t = 200°C$ rezultă [16] $\Delta\sigma_1 = 616$ MPa;

2. Dacă condițiile de montaj prevăd o pretensionare de 50% pe lîngă condițiile prevăzute la punctul 1, rezultă $\Delta\sigma_1 = 816$ MPa;

3. Din figura 6*b* și *c*, pentru punctul situat la exterior ($\sigma_\varphi = 125{,}5$ MPa, $\sigma_\theta = 13{,}4$ MPa) corespunzător parametrilor de lucru : $p = 0{,}075$ MPa ; $\Delta = 0{,}357$ mm rezultă $\Delta\sigma_1 = 227{,}38$ MPa.

4. $\Delta\sigma_1 = 400$ MPa. Această amplitudine a tensiunii corespunde solicitării care produce o tensiune echivalentă egală cu tensiunea admisibilă.

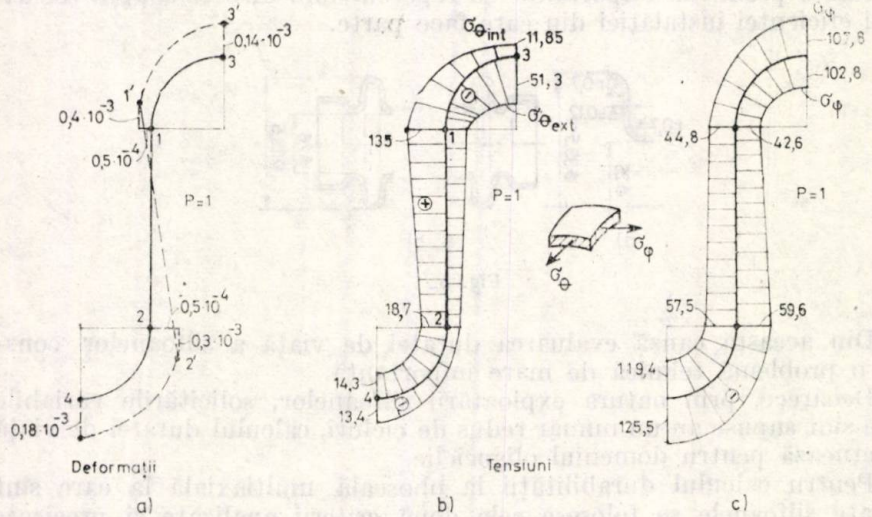


Fig. 6

Pentru primul criteriu (relația 6) se determină deformațiile specifice maxime $\frac{\Delta\varepsilon_1}{2}$ ce au fost trecute în tabelul 1.

Coeficienții relației (6) sînt determinați pentru oțeluri austenitice în lucrarea [18] și au valorile din tabelul 1. Cu ajutorul acestor valori și ale ecuației (6) se obțin valorile lui N din tabelul 1.

Tabelul 1

σ^1_{max} MPa	$\frac{\Delta\varepsilon_1}{2}$	σ'_f MPa	b	ε'_f	c	N cicli ; rel. 6	N relația 37
1	2	3	4	5	6	7	8
616	$2{,}495 \cdot 10^{-3}$	1000	−0,114	0,171	−0,402	7 500	10 358
816	$3{,}208 \cdot 10^{-3}$	1000	−0,114	0,171	−0,402	3 000	4 252
277,38	$1{,}087 \cdot 10^{-3}$	1000	−0,114	0,171	−0,402	420 000	$9{,}34 \cdot 10^5$
400	$1{,}568 \cdot 10^{-3}$	1000	−0,114	0,171	−0,402	60 000	$1{,}02 \cdot 10^5$

Pentru criteriul redat cu relația (37) se utilizează următoarele valori caracteristice pentru oțeluri austenitice : $\alpha = -0{,}516$, $k = 171$ MPa, $n' = 0{,}17$; $K' = 996$ MPa, $E = 2{,}02 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{kt} = 123{,}7$ MPa.

Deoarece pentru încărcări proporționale simple lipsește ecruisarea suplimentară ciclică [18], se aplică relația (35). Criteriul energetic (37) conduce la valorile din coloana 8 a tabelului 1.

5. CONCLUZII

1. Determinarea duratei de funcţionare a pieselor, sau maşinilor şi utilajelor în general, constituie o problemă deosebit de complexă, care necesită multiple cercetări experimentale şi teoretice. Metodele de evaluare a duratei de viaţă a pieselor se grupează, de regulă, în metode care folosesc curba $\sigma - N$ (curba lui Wöhler) şi metode bazate pe mecanica ruperii. Majoritatea determinărilor experimentale în cadrul procedeului $\sigma - N$ sînt efectuate la solicitări simple şi în consecinţă pentru stări plane şi triaxiale de tensiune, informaţiile sînt foarte reduse.

În procedeele bazate pe mecanica ruperii se analizează modul de iniţiere şi propagare a fisurii pornind de la un anumit defect iniţial şi ajungînd la o lăţime de fisură finală, căreia îi corespunde ruperea. Evident, de mare importanţă în această teorie sînt concentrările de tensiuni şi factorii de intensitate care depind atît de forma concentratorului, cît şi de starea de solicitare.

În literatura de specialitate datele experimentale pentru aplicarea procedeului mecanicii ruperii sînt mult mai reduse decît în cazul procedeului bazat pe curba $\sigma - N$.

2. Lucrarea de faţă prezintă două procedee de evaluare a duratei de viaţă, unul bazat pe curba $\sigma - N$ şi celălalt bazat pe energia de deformaţie care sînt aplicate în cazul compensatorilor lenticulari. Ambele procedee au avantajul că folosesec constantele de material rezultate din solicitări la oboseală în cazul solicitărilor uniaxiale.

Se apreciază că pentru solicitările biaxiale şi triaxiale procedeul energetic dă rezultate mai apropiate de realitate, ceea ce face ca el să fie preferat în aplicaţii. Se apreciază că el este valabil atît în domeniul oligociclic, cît şi în domeniul solicitărilor variabile de durată.

3. Aplicarea celor două procedee la silfoane de tip $\varnothing 26 \times 39{,}5$ conduc la durate de funcţionare relativ apropiate pentru solicitările care corespund valorile $\Delta\sigma_1 = 616$ MPa şi $\Delta\sigma_1 = 816$ MPa.

Diferenţele sînt relativ mari pentru valorile $\Delta\sigma_1 = 277$ şi $\Delta\sigma_1 = 400$ MPa, ceea ce arată că ponderea termenului $\Delta\sigma_1$ este diferită în cele două criterii. Se observă că criteriul energetic în toate cazurile indică durate de funcţionare mai mari, ceea ce face ca aplicarea lui să conducă la soluţii mai economice şi în acelaşi timp sigure, deoarece experienţa confirmă mai bine rezultatele lui.

Primit în redacţie la 10 mai 1989

BIBLIOGRAFIE

1. J. A. BANNANTINE, D. F. SOCIE, *Observations of Cracking Behaviour in Tension and Torsion Low Cycle Fatigue*. ASTM Symposium on Low Cycle Fatigue, Directions for the Future.
2. D. CIOCLOV, *Rezistenţa şi fiabilitatea la soclicitări variabile*, Ed.it. Facla, Timişoara, 1975.
3. F. ELLYIN, B. VALAIRE, *Developement of Fatigue Failurs Theories for Multiaxial High Strain Conditions*, SM Archives, **10** (1985).
4. F. ELLYIN, *A Criterion for Fatigue under Multiaxial States of Stress*, Mechanics Reasearch Comunications, **1** (1984).

5. F. ELLYIN, *Crack Growth Rate under Cyclic Loading and Effect of Different Singularity Fields*, Engineering Fracturs Mechanics, **25** 4 (1986).
6. F. ELLYIN, K. GOLOS, *Multiaxial Fatigue Damage*, Teoreticeskie osnovîi injenerih rascetov vol. **4**, 1988, pg. 98.
7. F. ELLYIN, K. GOLOS, *A Constitutive Relation for Multiaxial Stress States under Cyclic Conditions*, Constitutive Low for Engng., Materials — Theory and Applications, Elsevier, New York, 1987.
8. F. ELLYIN, D., KUJAWSKI, *Plastic Strain Energy in Fatigue Failure*, ASME Journal of Pressure Vessel Technology, **106**, 4 (1984).
9. K. GOLOS, K. F. ELLYIN, *A Total Strain Energy Density Theory for Cumulative Fatigue Damage*, ASME Journal of Pressure Vessel Technology.
10. Z. HASHIN, *Fatigue Failure Criteria for Combined Cyclic Stress*, International Journal of Facture, **17**, 2 (1981).
11. E. KREMPL, *The Influence of State of Stress on Low-Cycle Fatigue of Structural Materials: A Literature Survey and interpretative Report*. ASTM Special Tehnical Publications, 549 (1974).
12. A. LASCHET, *Simulation von Antriebssystemen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.
13. D. LEFEBVRE, F. ELLYIN, *Cyclic Response and Inelastic Strain Energy in Low Cycle Fatigue*, Int. J. Fatigue, **16**, 1 (1984).
14. D. L. Mc DIARMID, *Fatigue, Criteria and Cumulative Damage in Fatigue under Multiaxial Stress Conditions*, Ph. D. thesis, The City University, London, UK, 1972.
15. J. L. MORRISON, B. CROSSLAND, J. S. C. PARRY, *The Strenght of Thick Cylinders Subjectit to Repeatid Interval Pressure*, ASME Journal of Engineering for Industry, Mai (1960).
16. N. POSEA, C. MANEA, *Analiza stării de eforturi și deformații ale compensatoarelor lenticulare de dilatație, cu lentile de tip „U", executate monostrat*, Studii și cercetări de mecanică aplicată,
17. R. N. SMITH, P. WATSON, T. H. TOPPER, *A Stress Strain Function for the Fatigue of Metals*, J. of. Materials JMLSA, **5**, 4 (1970).
18. D. SOCIE, *Multiaxial Fatigue Damage Models*, Teoreticeskie osnovîi injenerih rascetov, vol. 3, 1988.
19. D. J. WHITE, B. CROSSLAND. J. L., MORRISON, *Effect of Hydrostatic Pressure on the Direct Stress Fatigue Strenght Steel*, Journal of Mechanical Engineering Science, **1**, 1 (1959).

REGIMUL PULSATORIU LA SCURGEREA FLUIDULUI BIFAZIC PRIN ELEMENTUL DE MĂSURĂ

de AL. D. STAN

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Lucrarea analizează scurgerea unui curent bifazic, printr-un element de măsură, explicînd, în acest fel, apariția oscilațiilor unor parametri hidrodinamici în apropierea organului deprimogen.
Se pune în evidență lățimea benzii înregistratoare a parametrilor hidrodinamici în funcție de elementele medii existente în amonte și în aval de elementul de măsură.
Viteza sunetului în curentul ce traversează elementul de măsură joacă un rol însemnat în apariția oscilațiilor acestor parametri pe elementele înregistratoare.
Realizarea unor benzi practic continue pe elementele înregistratoare face și dificilă aprecierea parametrilor hidrodinamici medii ai curentului de fluid bifazic.

1. INTRODUCERE

În practica exploatării zăcămintelor de petrol și gaze pot apare situații în care prin elementul de măsură se scurg fluide bifazice. Cele mai frecvente cazuri sînt acelea în care acestea sînt formate din petrol și gaze sau apă și gaze.

Ultimul fluid bifazic (apă și gazele) ridică probleme din cele mai dificile cînd se utilizează metoda orificiului pentru determinarea debitului de gaze. S-a constatat că scurgerea unui asemenea fluid duce și la regimul pulsatoriu al elementelor necesare debitului de gaze, ceea ce face ca să apară o înregistrare „în bandă" a acestor parametri.

Înregistrarea în bandă a parametrilor hidrodinamici la elementul de măsură a fost asociată, în mod eronat credem noi, mișcării verticale a fluidului bifazic înainte de traversarea acestui element de măsură.

Experiențele efectuate de către noi în laboratorul de mecanica fluidelor din cadrul IPG Ploiești au arătat că și în situația în care fluidul bifazic, înainte de a traversa elementul de măsură, se scurge orizontal, apar pulsații ale presiunii în apropierea organului deprimogen, ceea ce duce la o înregistrare în bandă a acestui parametru.

Este posibil ca unele variații ale presiunii din coloana verticală a curentului bifazic să fie datorate tocmai prezenței elementului de măsură care induce în acea zonă un regim pulsatoriu.

2. REGIMUL PULSATORIU LA SCURGEREA CURENTULUI BIFAZIC

Măsurarea debitului de gaze prin metoda orificiului presupune cunoașterea căderii de presiune ce se realizează în elementul de măsură ca și presiunea din amonte de element. Căderea de presiune din acest element este în principiu locală și depinde de viteza de scurgere, de regi-

mul de scurgere apreciat prin numărul lui Reynolds, precum și de geometria orificiului care influențează forma liniilor de curent ale mișcării. Existența unei căderi locale de presiune poate fi asimilată unei căderi liniare de presiune într-un tub de curent cu secțiunea constantă S și lungimea l, potrivit formulei clasice [2, 8]

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2} \frac{l}{d} \lambda, \tag{1}$$

unde ρ reprezintă densitatea medie a fluidului din tub; v — viteza medie, iar d este diametrul interior al tubului; λ este coeficientul de rezistență. Masa gazului din tub are, în acest fel, valoarea ρSl. Scurgerea fluidului se produce datorită presiunii diferențiale $p_1 - p_2$; p_1 și p_2 fiind presiunile înregistrate la capetele tubului de curent. Într-un anumit punct al tubului de curent unde se înregistrează presiunea p, masa specifică ρ și viteza medie v, face ca ecuația de continuitate să fie pusă sub forma

$$\rho v = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2. \tag{2}$$

Parametrii cu indicele 1 sînt înregistrați în amonte de elementul de măsură, iar aceia avînd indicele 2 după acest element.

Deoarece presiunea p_1 este mai mare decît presiunea dintr-un punct oarecare p, rezultă că gazul între aceste puncte este accelerat cu accelerația $\dot{v}$.

Se poate admite că $(-\dot{\rho})$ este diminuarea densității în raport cu timpul din volumul de rezonanță V a cantității de masă existentă $S\rho v$[7]

Pe altă parte, se știe că există formula

$$\frac{dp}{d\rho} = s^2, \tag{3}$$

ceea ce face ca să se scrie

$$\dot{p} = s^2 \dot{\rho} = - \frac{s^2 S \rho}{V} v, \tag{4}$$

de unde se deduce și egalitatea

$$\ddot{p} = - s^2 \frac{S\rho}{V} \dot{v}, \tag{5}$$

s este viteza sunetului în fluidul scurs prin elementul de măsură.

Asupra unui element de fluid din tubul de curent care are la capete presiunile p și, respectiv, p_2 acționează forțele:

— de presiune: $S(p - p_2)$;

— de frecare: $S\rho \frac{v^2}{2} \frac{l}{d} \lambda = S \rho_1 v_1 \frac{vl}{2d} \lambda$:

— de inerție: $S\rho l \dot{v}$.

Echilibrul elementului de control considerat duce la scrierea egalității

$$S\rho l\dot{v} + S\frac{\rho_1 v_1 l\lambda}{2d}v = S(p - p_2). \tag{6}$$

Avînd în vedere această egalitate precum și expresia lui v din (4) și aceea a lui $\dot{v}$ dată de (5), va duce la obținerea relației

$$\ddot{p} + \frac{\rho_1 v_1 \lambda}{2\rho d}\dot{p} + \frac{s^2 S}{lV}p = \frac{s^2 S}{lV}p_2. \tag{7}$$

Dacă se admite aproximația $\rho_1 \approx \rho$, și se introduc notațiile

$$2\bar{\lambda} = \frac{v_1\lambda}{2d}\ ;\ \omega_0 = s\sqrt{\frac{S}{lV}}, \tag{8}$$

ecuația (7) se pune sub forma

$$\ddot{p} + 2\bar{\lambda}\dot{p} + \omega_0^2 p = \omega_0^2 p_2. \tag{9}$$

Relația obținută reprezintă ecuația oscilației în prezența frecării sub acțiunea unei forțe exterioare [1].

Coeficientul de amortizare (decrementul) $\bar{\lambda}$ include, cu aproximația admisă, frecarea, iar ω_0 este frecvența oscilațiilor libere ale sistemului în absența frecării.

Forța exterioară este reprezentată de termenul $\omega_0^2 p_2$ care se pune sub forma [6]:

$$\omega_0^2 p_2 e^{-\alpha t}\cos\gamma t = \omega_0^2 p_2 e^{-\alpha t + i\gamma t}, \tag{10}$$

unde α și γ sînt frecvențele proprii ale sistemului.

Cu aceste notații, ecuația (7) are soluția

$$p = b\, e^{-\alpha t}\cos(\gamma t + \delta), \tag{11}$$

unde

$$b = \frac{\omega_0^2 p_2}{\sqrt{(\omega_0^2 + \alpha_0^2 - \gamma^2 + 2\alpha\bar{\lambda})^2 + 4\gamma^2(\alpha + \gamma)^2}} \tag{12'}$$

și

$$\mathrm{tg}\,\delta = -\frac{2\gamma(\alpha + \bar{\lambda})}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\bar{\lambda}}. \tag{12''}$$

Se observă că în cazul unei frecări nule ($\bar{\lambda} = 0$), b și tg δ au valorile

$$b = \frac{\omega_0^2 p_2}{\sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\alpha + \gamma)^2}}, \tag{13'}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = -\frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2}. \tag{13''}$$

Presiunea dată de (11) se reduce în timp, ceea ce face ca factorul perturbator ε să fie considerat de același ordin de mărime ca și α[6]. Din acest motiv, b și $\operatorname{tg}\delta$ date de formulele (13') și, respectiv, (13'') vor deveni

$$b = \frac{\omega_0 p_2}{2\sqrt{\omega_0^2 + 6\varepsilon\omega_0 + 9\varepsilon^2}}, \tag{14'}$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\omega_0 + \varepsilon}{\omega_0}. \tag{14''}$$

Așa cum se știe [6], atunci cînd mișcarea este stabilizată, adică sistemul efectuează oscilații forțate, presiunea are expresia

$$p = b \cos(\gamma t + \delta) \tag{15}$$

și energia sa rămîne constantă.

Dacă se notează cu $I(\gamma)$ cantitatea de energie medie disipată în unitatea de timp în funcție de frecvența forței exterioare, aceasta are valoarea

$$I(\gamma) = 2F, \tag{16}$$

unde F este valoarea medie pe o perioadă de oscilație a funcției de disipație.

Pentru o mișcare liniară, funcția de disipație se reduce la forma

$$F = \bar{\lambda} m \dot{x}^2, \tag{17}$$

unde m reprezintă masa sistemului ce execută oscilația, iar x este deplasarea unui punct material.

Pentru utilizarea ultimei relații, în ecuația (7) se pot efectua transformările

$$p = mx\omega_0^2 \tag{18}$$

și

$$p_2 = mx_2\omega_0^2. \tag{19}$$

Pentru masa sistemului oscilant egală cu unitatea, F are deci expresia

$$F = \bar{\lambda}\dot{x}^2 = \bar{\lambda}\frac{\dot{p}^2}{\omega_0^4} = \frac{\bar{\lambda}}{\omega_0^4} b^2\gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta). \tag{20}$$

Valoarea medie în raport cu timpul a pătratului sinusului este egală cu 1/2, ceea ce face ca

$$I(\gamma) = \frac{2}{2}\frac{\bar{\lambda}}{\omega_0^4} b^2\gamma^2 = \frac{\bar{\lambda}}{\omega_0^4} b^2\gamma^2. \tag{21}$$

Dacă se introduce b dat de (14') și se consideră $\gamma = \omega_0$, rezultă

$$I(\varepsilon) = \frac{\bar{\lambda} p_2^2}{4(\omega_0^2 + 6\omega_0\varepsilon + 9\varepsilon^2)} \tag{22}$$

şi pentru un parametru perturbator nul, $\varepsilon = 0$, rezultă

$$I(0) = \frac{\bar{\lambda} p_2^2}{4\omega_0^2}, \tag{23}$$

iar raportul $I(\varepsilon)/I(0)$ are expresia

$$\frac{I(\varepsilon)}{I(0)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 6\varepsilon\omega_0 + 9\varepsilon^2} = \frac{1}{\left(3\frac{\varepsilon}{\omega_0} + 1\right)^2}. \tag{24}$$

Raportul $I(\varepsilon)/I(0)$ este reprezentat în funcţie de factorul perturbator ε în figura 1.

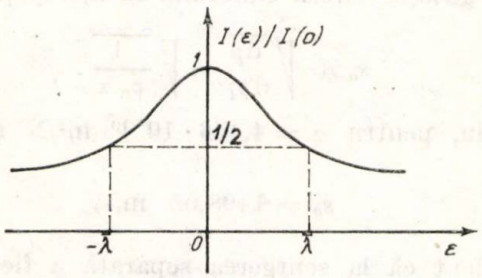


Fig. 1

Se observă cu uşurinţă că pentru $\omega_0 = 0$, raportul $I(\varepsilon)/I(0)$ devine nul. Tot raportul $I(\varepsilon)/I(0)$ este egal cu unitatea dacă ε/ω_0 are valori foarte reduse. Aceasta poate avea loc fie pentru $\varepsilon = 0$, fie pentru parametrul ω_0 foarte mare. Valoarea maximă a lui $I(\varepsilon)$ va fi

$$I(\varepsilon)_{max} = \frac{\bar{\lambda} p_2^2}{4\omega_0^2} = \frac{\bar{\lambda} p_2^2}{s^2} \text{ constantă.} \tag{25}$$

Constanta din ultima egalitate are valoarea $\frac{lV}{S}$. Denotă că parametrul $\frac{\bar{\lambda} p_2^2}{s^2}$ dă mărimea amplitudinii maxime $I(\varepsilon)_{max}$. Cu excepţia constantei semnalate anterior, reiese că amplitudinea maximă depinde separat de produsul $\bar{\lambda} p^2_2$ ca şi de pătratul sunetului în elementul de măsură. O analiză a fiecăreia dintre aceştia se impune pentru a stabili practic lăţimea înregistrărilor în bandă.

Astfel, la scurgerea unui gaz curat prin elementul de măsură, viteza adiabatică a sunetului va fi [4, 5, 8, 9, 10, 11, 12]

$$s_g = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\varkappa RT}. \tag{26}$$

Dacă se asimilează gazul cu metanul pentru care se ia exponentul adiabatic $\varkappa = 1{,}32$, constanta de gaz perfect $R = 519{,}2$ J/kgK la temperatura $T = 293$ K rezultă viteza sunetului în acest gaz

$$s_g = 448{,}1136 \text{ m/s}.$$

În situația scurgerii apei prin același element de măsură, viteza sunetului s_a se calculează avînd în vedere coeficientul de compresibilitatea α. Astfel, cu acest coeficient, densitatea ρ_l a apei la o presiune oarecare p are expresia

$$\rho_l = \rho_0[1 + \alpha(p - p_0)], \tag{27}$$

ρ_0 este denistatea apei la presiunea de referință p_0.

Dacă și acum se păstrează expresia de definiție a sunetului în gaz, formula (26), se găsește viteza sunetului în apă [5],

$$s_a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho_l}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \alpha}}. \tag{28}$$

De exemplu, pentru $\alpha = 4{,}456 \cdot 10^{-10}$ m^2/N și $\rho_0 = 1000$ kg/m^3 rezultă :

$$s_a = 1498{,}05 \text{ m/s}.$$

Apare evident că la scurgerea separată a fiecărui din cele două fluide, vitezele sunetului au valori diferite, dar și termenul $\bar{\lambda} p_2^2$ va fi distinct în cele două situații.

La scurgerea separată a fiecărui fluid, de exemplu apă sau gaze curate, pentru o anumită valoare constantă a parametrului $(\bar{\lambda} p_2^2)$, nu apare înregistrarea în bandă deoarece și viteza sunetului în fiecare caz separat este o mărime constantă, ceea ce face ca și amplitudinea maximă $I(\varepsilon)_{max}$ să prezinte de asemenea, o valoare constantă.

Este evident că amplitudinea maximă $I(\varepsilon)_{max}$ are valori distincte la scurgerea fiecăruia dintre cele două fluide la care ne-am referit. Probabil că și în situația în care s-ar scurge pe rînd prin elementul de măsură separat apă și gaze și de fiecare dată parametrul $\bar{\lambda} p_2^2$ ar fi constant, amplitudinea maximă înregistrată la scurgerea apei ar fi mai mică decît la scurgerea gazului curat. Este posibil ca în situația în care se cunosc proprietățile fizice ale unui fluid bifazic, ceea ce duce la posibilitatea stabilirii lui $\bar{\lambda}$ și a vitezei sunetului în acel fluid, precum și a presiunii p_2, să fie posibilă determinarea amplitudinii maxime $I(\varepsilon)_{max}$ în funcție de aceste proprietăți.

3. INFLUENȚA PARAMETRULUI $\bar{\lambda} p_2^2$ ASUPRA LĂȚIMII DE ÎNREGISTRARE A BENZII

O analiză a parametrului $\bar{\lambda} p_2^2$ asupra amplitudinii maxime $I(\varepsilon)_{max}$ duce la concluzia că și presiunea p_1 din amonte de elementul de măsură

joacă un rol însemnat în determinarea amplitudinii maxime. Astfel, dacă se notează

$$P = p_2^2 \frac{v_1 \lambda}{4d}. \tag{29}$$

Acest parametru se mai pune și sub forma

$$P = (p_1 - \Delta p)^2 \frac{v_1 \lambda}{4d} = (p_1^2 - 2\Delta p \cdot p_1 + \Delta p^2) \frac{v_1 \lambda}{4d}, \tag{30}$$

Δp reprezintă căderea de presiune ce se realizează în elementul de măsură. Cu toate că ambele forme ale lui p sînt echivalente, ultima dintre acestea pune în evidență influența presiunii p_1 și a căderii de presiune Δp, asupra parametrului P. Se observă cu ușurință că mărimea amplitudinii maxime $I(\varepsilon)_{max}$ are valori mai mari pe măsură ce se mărește p_1. În același timp, pentru anumită valoare a presiunii p_1, pe măsură ce se mărește căderea de presiune Δp în elementul de măsură, parametrul P se reduce. Parametrul P, dat de ecuația (30), mai permite o analiză și în raport cu viteza v_1. Astfel, dacă ultima ecuație se pune sub forma:

$$\frac{4d}{\lambda} P = p_1^2 v_1 - 2 p_1 A v_1^3 + A^2 v_1^5 \tag{31}$$

unde a fost introdusă notația

$$A = \frac{\rho_1 l \lambda}{2d},$$

rezultă că P se anulează în punctele în care viteza v_1 are sens fizic și anume:

$$v_1 = 0 \text{ și } v_1 = \sqrt{\frac{p_1}{A}}. \tag{32}$$

Același parametru devine extrem în punctele în care viteza v_1 are valorile

$$v_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \sqrt{\frac{p_1}{A}} \text{ și } v_1 = \frac{\sqrt{15}}{5} \sqrt{\frac{p_1}{A}}. \tag{33}$$

În primul punct, P are valoarea maximă care este

$$P_{max} = P\Big|_{v_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{p_1}{A}}} = 1{,}0894 \sqrt{\frac{p_1}{A}} \frac{\lambda}{4d}, \tag{34}$$

iar în cel de al doilea, P devine minim, avînd valoarea

$$P_{min} = P\Big|_{v_1 = \frac{\sqrt{15}}{5}\sqrt{\frac{p_1}{A}}} = 0. \tag{35}$$

De aici denotă că pentru acele valori ale vitezei curentului de fluid egale cu aproximativ $(\sqrt{5}/5)\sqrt{p_1/A} = 0{,}4472\sqrt{p_1/A}$, indiferent de viteza sunetului prin elementul de măsură, se produc pulsații maxime în vecinătatea organului deprimogen. Pulsațiile au amplitudinea nulă, deci pentru cazul

în care fluidul nu se scurge prin elementul de măsură ($v_1 = 0$), lucru care era de altfel de așteptat, și în situația în care tot viteza v_1 ar fi egală cu $\sqrt{\frac{p_1}{A}}$. Această ultimă valoare a vitezei v_1 necesită unele considerații avînd în vedere că reprezintă, așa cum am mai menționat, singura posibilitate de scurgerea fluidului fără a se produce pulsații în elementul de măsură. Dacă în locul parametrului A se introduce expresia echivalentă și se scrie

$$\frac{p_1}{\rho_1} = RT_1, \tag{36}$$

rezultă că scurgerea cu pulsație nulă depinde în esență de geometria elementului de măsură (d/l) atunci cînd viteza v_1 satisface relația

$$v_1 = \sqrt{2RT_1}\sqrt{\frac{d}{l\lambda}}, \tag{37}$$

R este constanta de gaz perfect.

Pe altă parte, dacă se înlocuiește coeficientul de rezistență λ din relația (1) se găsește căderea de presiune ce trebuie realizată în elementul de măsură pentru a nu se produce pulsații în acest element,

$$\Delta p = 2RT_1\rho_1 = 2p_1. \tag{38}$$

La ultima egalitate s-a ajuns prin utilizarea relației (36).

Rezultatul arată că obținerea unor amplitudini nule prin modificarea parametrului $p_2^2\,\overline{\lambda}$ nu este posibilă deoarece în practică căderea de presiune Δp poate fi cel mult egală cu p_1.

Prin același procedeu ca acela utilizat mai înainte se găsește că parametrul P are valoarea maximă atunci cînd se realizează condiția

$$\Delta p = \frac{p_1}{5}. \tag{39}$$

Acest rezultat, împreună cu observația că debitul masic de fluid ce se scurge prin elementul de măsură este

$$M = \frac{\pi d^2}{4}\rho_1 v_1, \tag{40}$$

duce la valoarea maximă a lui P,

$$P_{max} = 1{,}2179\,\frac{\Delta pS}{lM}, \tag{41'}$$

unde S reprezintă secțiunea elementului de măsură. În raport cu S, P_{max} este independent deoarece aceeași secțiune intră și în expresia debitului masic M.

Deoarece, $P_{min} = 0$, avînd în vedere valoarea maximă a parametrului P, rezultă că lățimea benzii de înregistrare va fi

$$L = P_{max} - P_{min} = 1{,}2179\,\frac{\Delta pS}{lM}. \tag{41''}$$

4. VITEZA SUNETULUI ÎNTR-UN MEDIU BIFAZIC MONOCOMPONENT

Apa care circulă prin elementul de măsură poate fi în cele două faze (gazoasă sau lichidă). Gazele naturale, probabil că sînt doar în prima fază datorită valorilor pe care le au presiunile și temperaturile critice față de acelea ce se înregistrează în elementul de măsură (aproximativ presiuni între 5 și 30 bar și temperaturi situate între 273 și 293 K). Probabil că rar se întîmplă ca în elementul de măsură să se realizeze parametrii termodinamici egali cu aceia critici ai gazelor naturale pentru ca acestea să fie în fază lichidă. Astfel, metanul are presiunea critică egală cu 44,93 bar și temperatura critică 191 K, etanul are aceiași parametri egali cu 47,67 bar și respectiv 306K[8]. În lumina celor arătate și mai ales că gazele naturale din țara noastră au un conținut însemnat de metan, rezultă că prin elementul de măsură practic gazele se află doar în fază gazoasă.

Viteza de propagare a sunetului în apă ca mediu bifazic s_b se determină tot cu formula (3),

$$s_b = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho_b}}, \tag{42}$$

unde ρ_b este densitatea fluidului bifazic adică a apei în stare lichidă și de vapori. În scopul determinării densității ρ_b se definește titlul de vapori ai fluidului bifazic cu ajutorul formulei

$$x = \frac{V_l}{V_l + V_g}, \tag{43}$$

unde V_l este volumul de lichid, iar V_g este volumul de gaz. Densitatea amestecului bifazice ρ_b are expresia

$$\rho_b = \frac{\rho_l V_l + \rho_g V_g}{V_l + V_g} = x\rho_l + (1 - x)\rho_g, \tag{44}$$

ρ_l și ρ_g reprezintă densitatea lichidului și a gazului.

Viteza sunetului în curent bifazic monocomponent s_b va avea deci expresia

$$s_b = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho_b}} = \sqrt{\frac{1}{x\alpha\rho_0 + \dfrac{1-x}{RT_1}}}. \tag{45}$$

Avînd în vedere relațiile (26) și (28), rezultă că s_b se mai scrie

$$s_b = \frac{s_a s_g}{\sqrt{x s_g^2 + (1 - x) s_a^2}}. \tag{46}$$

Se observă imediat că pentru cazul în care titlul $x = 0$ se găsește $s_b = s_g$, iar pentru situația $x = 1$ se obține $s_b = s_a$.

Așa cum se știe [5], viteza adiabatică s_{gr} a gazului este mai mare decît viteza izotermică s_g și, în același timp, verifică mult mai bine rezultatele experimentale

$$s_{gr} = \sqrt{\varkappa}\, s_g , \tag{47}$$

$\varkappa$ este exponentul adiabatic al gazului. Pentru vaporii de apă se poate lua [4] $\varkappa = 1{,}33$.

Datorită acestora, relația (46) se scrie

$$s_b = \frac{\sqrt{\varkappa}\, s_a\, s_{gr}}{\sqrt{x s_{gr}^2 + (1 - x)\, \varkappa s_a^2}} . \tag{48}$$

Și această formulă, ca și (46), satisface cazurile extreme pe care le ia x adică 0 și 1, obținindu-se acum viteza de propagare a sunetului în gazul cu evoluția adiabatică și, respectiv, în lichid. Așa cum se observă din cele prezentate mai înainte, curentul bifazic s-a admis că formează un amestec omogen dar nu există transformări de fază.

Această ultimă ipoteză este greu de admis că are loc în elementul de măsură unde se produc variații însemnate ale parametrilor de stare (presiune și temperatură).

5. VITEZA SUNETULUI ÎN AMESTEC BIFAZIC CU FAZELE SEPARATE

Așa cum am mai precizat, în unele situații apare scurgerea simultană a lichidului și a apei. La o scurgere simultană, dar separată, prin elementul de măsură apar înregistrări ale presiunii p_2 diferite pe elementul înregistrator deoarece și în acest caz simplu se poate admite că în avalul organului deprimogen se înregistrează presiunile p_{2a} pentru cazul cînd se scurge apa și p_{2g} la scurgerea gazului curat. Aceste fluide creează căderile de presiune $(p_1 - p_{2a})$ și, respectiv $(p_1 - p_{2g})$ care se pot calcula pe rînd cu formula (1). Avînd în vedere că la regimuri mari de curgere, așa cum probabil are loc în elementul de măsură, coeficienții de rezistență sînt constanți și egali, ceea ce face să se scrie imediat raportul

$$\frac{p_1 - p_{2a}}{p_1 - p_{2g}} = \frac{\rho_a v_a^2}{\rho_g v_g^2} , \tag{49}$$

v_a și v_g sînt vitezele medii de curgere ale apei și gazului, iar ρ_a și ρ_g densitățile pentru aceleași fluide.

Dacă se introduc notațiile

$$\bar{p}_{2a} = \frac{p_{2a}}{p_1} , \quad \bar{p}_{2g} = \frac{p_{2g}}{p_1} , \quad x = \frac{\rho_a v_a^2}{\rho_g v_g^2} , \tag{50}$$

ultima formulă se pune sub forma

$$\bar{p}_{2g} = 1 + \frac{1}{x}(\bar{p}_{2a} - 1). \tag{51}$$

Reprezentarea presiunii adimensionale $\bar{p}_{2g}$ în funcție de parametrul, adimensional $x \geqslant 0$ și presiunea, de asemenea adimensională, $\bar{p}_{2a}$ este dată în figura 2.

Deși calitativă, reprezentarea funcției $\bar{p}_{2g}$ în raport cu $\bar{p}_{2a}$ și x, aceasta arată că la fracții mici de apă ($v_a < v_g$), $\bar{p}_{2g}$ are valori negative; funcția apropiindu-se asimptotic către minus infinit. Numai pentru fracții mari de apă ($v_a \gg v_g$), $\bar{p}_{2g}$ este comparabilă cu $\bar{p}_{2a}$. Aceste calcule au admis că în elementul de măsură se află pe rînd apa și gazul.

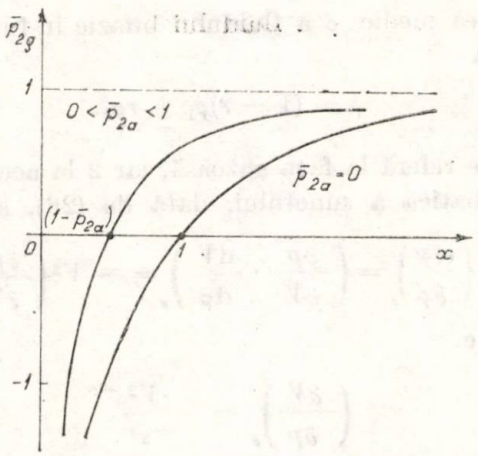


Fig. 2

În realitate, probabil că cel mai frecvent se întîmplă ca cele două fluide să se amestece conducînd la regimurile de curgere prezentate de către literatura de specialitate [2, 3, 8].

6. VITEZA SUNETULUI ÎN CURENTUL BIFAZIC CU TRANSFER INTERFAZIC

Se poate efectua un calcul pentru determinarea vitezei medii s_m dacă în elementul de măsură apa ocupă lungimea y, iar gazul $(l - y)$ care duce la expresia

$$s_m = s_g + (s_l - s_g)\frac{y}{l}. \tag{52}$$

Această formulă a fost dedusă considerînd că lungimile y și $(l - y)$ sînt ocupate de cele două fluide.

În realitate, în cele două porțiuni ale tubului de curent apar și transformări de fază care fac ca viteza sunetului să prezinte modificări importante față de cele două viteze de referință s_g și s_l.

Astfel, se presupune că în masa gazului care reprezintă faza dispersă a mediului bifazic sînt distribuite bule mici de lichid care formează faza

dispersată. Dacă se notează cu r fracţia masică a fazei lichide din sistem, entropia medie a acestora va fi

$$e = e_1(1 - r) + e_2 r, \tag{53}$$

iar volumul specific V al întregului sistem satisface ecuaţia

$$\frac{1}{V} = \frac{1 - r}{V_1} + \frac{r}{V_2} \tag{54}$$

deoarece densitatea medie ρ a fluidului bifazic în funcţie de densităţile ρ_1 şi ρ_2 are forma

$$\rho = (1 - r)\rho_1 + r\rho_2. \tag{55}$$

Indicele 1 se referă la faza gazoasă, iar 2 la aceea lichidă.

Viteza adiabatică a sunetului, dată de (26), satisface şi formele

$$s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\right)_e = -V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_e, \tag{56}$$

de unde se obţine

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e = -\frac{V^2}{s^2}. \tag{57}$$

Indicele e, plasat derivatei $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$, arată că acesta se calculează prin menţinerea entropiei constante.

Avînd în vedere că volumul specific V depinde, în afară de r, şi de entropia e a sistemului, termenul $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e$ se scrie

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_r - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_p \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_r}{\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_p}. \tag{58}$$

Dacă în ultimul termen din relaţia precedentă se utilizează aproximaţiile

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_p = \frac{V_2 - V_1}{r_2 - r_1} \text{ şi } \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_p = \frac{e_2 - e_1}{r_2 - r_1}, \tag{59}$$

rezultă că (58) se scrie

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_r - \frac{V_2 - V_1}{e_2 - e_1}\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_r. \tag{60}$$

Datorită ultimului rezultat obținut, se poate scrie, prin diferențierea relației (54),

$$-\frac{\mathrm{d}V}{V^2} = (1-r)\frac{\mathrm{d}V_1}{V_1^2} + r\frac{\mathrm{d}V_2}{V_2^2}, \tag{61}$$

care, prin împărțire cu diferențiala $\mathrm{d}p$, devine

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1-r}{V_1^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_e + \frac{r}{V_2^2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_e. \tag{62}$$

Așa cum se cunoaște, diferențiala entropiei de are expresia

$$\mathrm{d}e = c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p, \tag{63}$$

ceea ce face să se scrie imediat

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}p} = \frac{c_p}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{64}$$

Pe altă parte, prin introducerea căldurii latente de transformare de la faza 1 la 2

$$q = T(e_2 - e_1) \tag{65}$$

și avînd în vedere că pe curba de transformare dintre faze se utilizează realația Clapeyron-Clausius,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)}, \tag{66}$$

formula (64) se pune

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}p} = -\frac{c_p}{q}(V_2 - V_1) - \frac{R}{p}. \tag{67}$$

Termenul $\frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_e$ are deci forma

$$\frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_e = \frac{1}{V_1^2}\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right) - \frac{(V_2 - V_1)^2}{e_2 - e_1}\frac{c_{p1}}{q} + \frac{R_1}{p}\cdot\frac{V_2 - V_1}{e_2 - e_1}\right] \tag{68}$$

Dacă se mai ține seama și de (64), ultima relație se pune

$$\frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_e = -\frac{1}{R_1 T} + \frac{(V_2 - V_1)^2 T\cdot c_{p1}}{V_1^2 q^2} + \frac{V_2 - V_1}{V_1\cdot q}. \tag{69}$$

O relație asemănătoare se scrie și pentru termenul similar al fazei lichide.

Datorită acestora, viteza sunetului în curentul bifazic, s_b, va avea expresia

$$s_b = \frac{1}{\sqrt{(1-r)A_1 + rA_2}}, \tag{70}$$

unde s-au introdus notațiile

$$A_1 = \frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_e \text{ și } A_2 = \frac{1}{V_2^2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_e. \tag{71}$$

Formula (70) dă viteza sunetului în funcție de fracția masică r. În practică, volumul specific V_2 are valori foarte mici. De exemplu, pentru o densitate a apei egală cu 1000 kg/m³, rezultă $V_2 = 0{,}001$ m³/kg. Volumul specific V_1 al vaporilor de apă este funcție de presiunea și temperatura la care se află. Pentru o temperatură $T = 293$ K și o presiune $p = 15$ bar și constanta de gaz perfect $R_1 = 461{,}92$ J/kgK, rezultă $V_1 = 0{,}0902$ m³/kg. Calculul foarte simplu efectuat mai înainte arată că în practică se poate considera întotdeauna

$$V_1 \gg V_2. \tag{72}$$

Din cauza acestei constatări, viteza sunetului s_{bg} dată de (70), pentru o participare foarte redusă a fracției de apă în curentul bifazic, pentru care se ia $r = 0$, devine

$$s_{bg} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{R_1 T} + \frac{T \cdot c_{p1}}{q^2} - \frac{1}{q}}}, \tag{73}$$

iar pentru celălalt caz extrem, $r = 1$, rezultă viteza sunetului s_{ba} în curentul bifazic,

$$s_{ba} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{R_2 T} + \frac{V_1^2}{V_2^2}\frac{T \cdot c_{p2}}{q^2} - \frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{1}{q}}}. \tag{74}$$

Pentru calculele practice este posibil de înlocuit

$$q = T(e_2 - e_1) = T\left(c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R \ln\frac{p_2}{p_1}\right), \tag{75}$$

unde T_1 și T_2 reprezintă temperaturile pentru stările în care substanța are entropiile e_1 și, respectiv, e_2.

La măsurarea debitelor prin metoda orificiului au loc egalitățile

$$T_1 = T_2 = T, \tag{76}$$

ceea ce face ca q să capete o formă mai simplă

$$q = RT \ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{77}$$

Pentru situația extremă în care $r = 0$, presupunînd vaporii de apă ca un gaz perfect ($R_1 = 461{,}92$ J/kgK, $T = 293$ K, $c_{p1} = 1406{,}56$ J/kgK) la presiunea $p_2 = 15$ bar, rezultă $\rho_1 = 11{,}0829$ kg/m³ și $V_1 = 0{,}0902$ m³/kg, ceea ce duce la viteza sunetului

$$s_{bg} = 58{,}61 \text{ m/s}, \tag{78}$$

Pentru calculul vitezei sunetului în celălalt caz extrem, atunci cînd $r = 1$, tot cu formula stabilită (70) este necesară cunoașterea constantei de gaz perfect a bulelor de apă, asimilîndu-le pe acestea ca un gaz perfect cu constanta R_2.

Determinarea constantei R_2 se face punînd condiția ca viteza sunetului dată de formula (26) să fie egală cu viteza sunetului calculată cu (28).

Din această condiție pentru compresibilitatea apei utilizată și mai înainte și un exponent adiabatic al acesteia $\varkappa = 1{,}33$, rezultă

$$R_2 = 5758{,}84 \text{ J/kgK}.$$

Cu această valoare, tot pentru raportul $\frac{p_1}{p_2} = 1{,}3$ folosit și în cazul anterior, rezultă viteza sunetului în curentul bifazic format numai din bule de apă,

$$s_{ba} = 3{,}22 \text{ m/s}. \tag{79}$$

Căldura specifică a apei s-a luat $c_{p2} = 4182$ J/kgK.

Calculele noastre, deși orientative, arată că vitezele s_{bg} și s_{ba} sînt diferite față de valorile vitezelor s_g și, respectiv, s_a. Valorile diferite ale vitezei s_{ba} față de s_a au fost explicate în [7] prin apariția fenomenului de cavitație. La scurgerea curentului bifazic prin elementul de măsură probabil că viteza medie a sunetului se modifică continuu din cauza zonelor ocupate distinct de către cele două fluide monofazice (apă și gaze) precum și a vaporilor de apă apăruți ca urmare a transformărilor de fază. Din cauza acestei situații este de așteptat ca și în cazul menținerii unei presiuni p_2 constante după organul deprimogen parametrul $I(\varepsilon)_{max}$ să prezinte variații însemnate la scurgerea curentului bifazic.

7. VALABILITATEA GENERALĂ A RELAȚIEI (70)

Ca o dovadă că relația (70) prezintă o valabilitate generală este faptul că situațiile limită obținute pentru $r = 0$ și $r = 1$ dau vitezele sunetului în fluidele monofazice respective pentru care au fost efectuate particularizările. Astfel, dacă se consideră primul dintre cazurile limită semnalate pentru $r = 0$, atunci cînd fluidul monofazic este format din vaporii de apă admiși ca un gaz perfect, din relația (73) se menține doar termenul predominant $\frac{Tc_{p1}}{q^2}$ și viteza sunetului capătă forma

$$s_{bg} = \frac{q}{\sqrt{T \cdot c_{p1}}}, \tag{80}$$

q, dat de forma (77), se poate pune sub o altă formă dacă se admite că în organul deprimogen se realizează o cădere de presiune însemnată. Aceasta este echivalent cu a scrie că $p_1 \gg p_2$. Pe altă parte, se știe că pentru un argument x foarte redus există egalitatea aproximativă

$$\ln (1 + x) \approx x. \tag{81}$$

Datorită acestui rezultat, logaritmul tot din formula (77) se scrie succesiv

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = -\ln \frac{p_2}{p_1} \approx -\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = \frac{p_1 - p_2}{p_1} \approx 1. \tag{82}$$

Pe de altă parte, constanta de gaz perfect R_1 satisface relaţia

$$c_{p1} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R_1. \tag{83}$$

Cu acest rezultat, (80) devine

$$s_{bg} = \frac{R_1 T}{\sqrt{\varkappa R_1 T}} \sqrt{\varkappa - 1} = \sqrt{\varkappa R_1 T} \sqrt{\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa^2}}. \tag{84}$$

Se cunoaşte că tot pentru un argument x redus există egalitatea aproximativă

$$\sqrt{x} \approx \frac{x}{2}, \tag{85}$$

ceea ce face ca radicalul din (84) să se scrie

$$\sqrt{\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa^2}} \approx \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa^2}. \tag{86}$$

Se observă imediat că probabil datorită unor aproximaţii utilizate în lucrarea noastră ($V_2 \gg V_1$) ne-a condus la o viteză a sunetului s_{bg} puţin diferită de valoarea vitezei adiabatice a sunetului $\sqrt{\varkappa R_1 T}$.

Într-adevăr, pentru un exponent $\varkappa = 1{,}40$ rezultă

$$\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa^2} = 0{,}1428,$$

iar pentru $\varkappa = 1{,}30$, acelaşi termen are mărimea 0,1071. Apare clar că pentru $\varkappa = 1$, ceea ce presupune un gaz perfect, în limita aproximaţiilor admise rezultă

$$s_{bg} = s_g. \tag{87}$$

8. REZULTATE OBŢINUTE ÎN LABORATOR ŞI ÎN PRACTICA EXTRACŢIEI GAZELOR NATURALE

În laboratorul de mecanica fluidelor de la Institutul de Petrol şi Gaze Ploieşti s-a circulat apă şi aer (cu exponentul adiabatic $\varkappa = 1{,}406$, $R = 287{,}03$ J/kgK şi $T = 288$ K) în diferite proporţii şi s-au înregistrat pulsaţiile înainte şi după duza cu diametrul de 3,5 mm. Duza introdusă într-un tub cu diametrul interior 0,05m este utilizată în practica de şantier pentru măsurarea debitului de gaze la sondele de gaze.

Rezultatele obţinute în laborator sînt prezentate în figura 3.

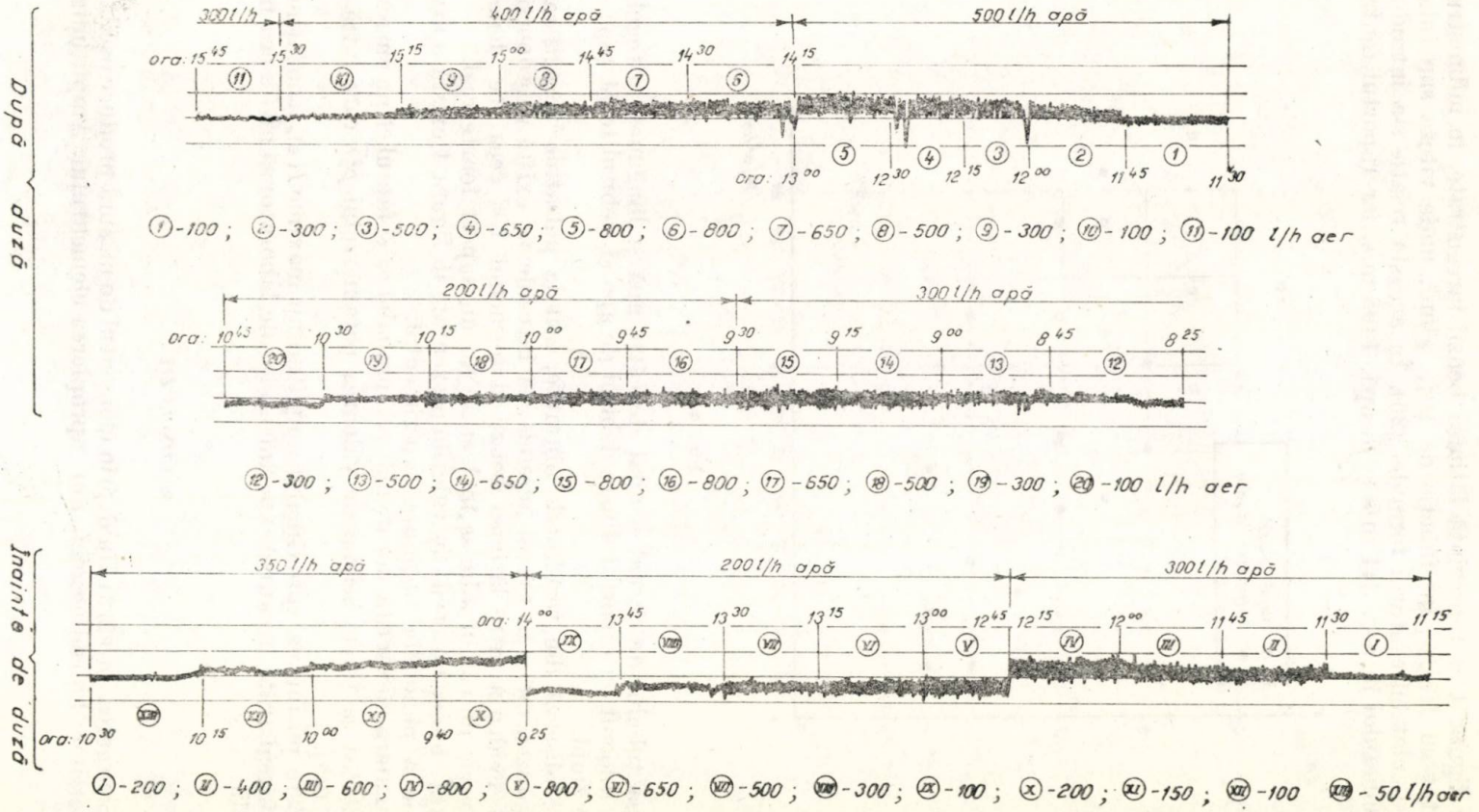

După duză
300 l/h
400 l/h apă
500 l/h apă
ora: 15 45 15 30 15 15 15 00 14 45 14 30 14 15
ora: 13 00 12 30 12 15 12 00 11 45 11 30
① -100 ; ② -300 ; ③ -500 ; ④ -650 ; ⑤ -800 ; ⑥ -800 ; ⑦ -650 ; ⑧ -500 ; ⑨ -300 ; ⑩ -100 ; ⑪ -100 l/h aer
200 l/h apă
300 l/h apă
ora: 10 45 10 30 10 15 10 00 9 45 9 30 9 15 9 00 8 45 8 25
⑫ -300 ; ⑬ -500 ; ⑭ -650 ; ⑮ -800 ; ⑯ -800 ; ⑰ -650 ; ⑱ -500 ; ⑲ -300 ; ⑳ -100 l/h aer
Înainte de duză
350 l/h apă
200 l/h apă
300 l/h apă
ora: 14 00 13 45 13 30 13 15 13 00 12 45 12 15 12 00 11 45 11 30 11 15
ora: 10 30 10 15 10 00 9 40 9 25
Ⅰ -200 ; Ⅱ -400 ; Ⅲ -600 ; Ⅳ -800 ; Ⅴ -800 ; Ⅵ -650 ; Ⅶ -500 ; Ⅷ -300 ; Ⅸ -100 ; Ⓧ -200 ; Ⓧⅰ -150 ; Ⓧⅱ -100 Ⓧⅲ - 50 l/h aer

Fig. 3

În figura 4 se reprezintă lățimea benzii înregistrate, în milimetru, notată tot cu $I(\varepsilon)_{max}$, în funcție de $1/s_b^2$, s^2/m^2, unde viteza sunetului s_b s-a calculat cu ajutorul formulei (26). În această relație s-a introdus viteza sunetului în aer, 341 m/s și în apă, 1498 m/s, iar raportul dintre

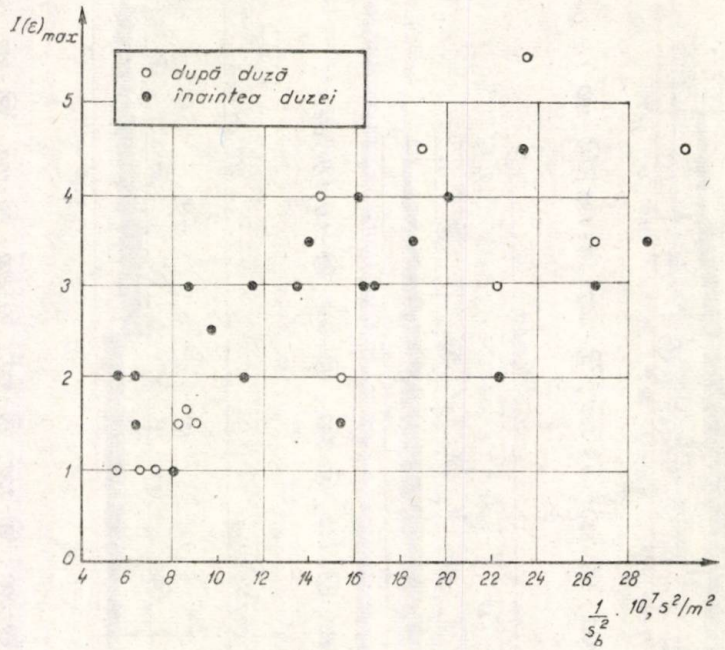


Fig. 4

lungimea tubului de curent ocupat de către apă și lungimea întregului tub s-a înlocuit cu raportul dintre debitul de apă și debitul total (apă + aer) de fluid.

Se observă din rezultatele obținute, atît la pulsațiile înregistrate în fața duzei, cît și în avalul acesteia, că într-adevăr există o proporționalitate evidentă între lățimea benzii și termenul $1/s_b^2$ ceea ce denotă că ipotezele de calcul admise în lucrare au un suport foarte real.

Așa cum se observă din valorile prezentate în figura 4 există o mare dispersie a punctelor obținute experimental.

În afara inexactităților de măsură, probabil că și faptul că nu am avut posibilitatea să ținem seama de valoarea parametrului $p_2^2\overline{\lambda}$ care intră în relația (25).

Este posibil ca aproximarea amplitudinii maxime $I(\varepsilon)_{max}$ cu lățimea benzii înregistrate în cadrul experimentelor de laborator să nu fie cea mai potrivită.

9. CONCLUZII

Scurgerea oricărui fluid prin elementul de măsură produce oscilația parametrilor hidrodinamici din apropierea elementului. Amplitudinea

maximă depinde de viteza sunetului prin curentul de fluid și de termenul $(p_2^2\bar{\lambda})$.

La un curent bifazic ambii parametri menționați sînt variabili ceea ce duce la o înregistrare în bandă a acestor parametri.

Probabil că viteza sunetului are variații mult mai însemnate decît termenul $(p_2^2\bar{\lambda})$, ceea ce face ca lățimea benzii înregistratoare să fie mult mai mare la un curent de fluid bifazic față de acela monofazic. Din cercetările noastre reise că există și un parametru tehnologic care duce la înregistrare în bandă a parametrilor hidrodinamici. Acest element tehnologic este raportul dintre căderea de presiune în elementul de măsură și presiunea din amonte de acest element care ar trebui să fie egal cu 1/5 pentru o lățime maximă a benzii.

Primit în redacție la 20 ianuarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. M. ATANASIU, *Mecanica tehnică*, Edit. Tehnică, București, 1969, p. 362—366.
2. I. CREȚU, AL. D. STAN, *Transportul fluidelor prin conducte*, Edit. Tehnică, București, 1985, p. 26—30, 262—268.
3. G. W. GOVIER, K. AZIZ, *The flow of complex mixtures in pipes*, Van Nostrand Reinold Comp., 1972, p. 532—541.
4. J. P. HOLMAN, *Thermodynamics*, McGraw Hill Book Comp., New York, 1974, p. 76—78
5. V. A. KIRILLIN, V. V. SÎCEV, A. E. SEINDLIN, *Termodinamica*, Edit. Științifică și Enciclopedică, București, 1985, p. 155—157, 180—182.
6. L. LANDAU, L. LIFSITZ, *Mecanica*, Edit. Tehnică, București, 1967, p. 68—79.
7. L. LANDAU, *Mécanique des fluides*, Editions Mir, Moscou, 1971, p. 308—313.
8. T. OROVEANU, V. DAVID, AL. D. STAN, C. TRIFAN, *Colectarea, transportul, depozitarea și distribuția produselor petroliere și gazelor*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1985, p. 19—21, 160—163.
9. O. RUSU, *Propagarea undelor elastice*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985, p. 26—31.
10. AL. D. STAN, M. ALBULESCU, *Posibilități de corecție a debitului de gaze la fracțiuni mari de apă în curentul de gaze*, St. cerc. m. c. apl. **46**, 6 (1987).
11. AL. D. STAN, M. ALBULESCU, *Criterii pentru corecția debitului de gaze determinat prin metoda orificiului în prezența apei*, St. cerc. mec. apl., **47**, 1 (1988).
12. D. ȘTEFĂNESCU, M. MARINESCU, I. GANEA, *Termogazodinamica tehnică*, Edit. Tehnică, București, 1986, p. 331—335.

EFECTUL LUNECĂRII LA BARE CU PEREȚI SUBȚIRI

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi,
Auto, Navale și Aeriene, București,

Se prezintă un procedeu pentru derivarea unui element finit de bară cu pereți subțiri, cu luarea în considerație a efectului deformațiilor de lunecare. Într-o formulare consistentă în deplasări, procedeul introduce, alături de variabilele de bază ale problemei, săgețile din încovoiere și rotirea torsională, trei variabile adiționale reprezentînd deformațiile generate de tensiunile tangențiale. Se obține matricea de rigiditate și matricea maselor echivalente pentru un element de bară cu 12 grade de libertate. În acest fel elementul poate fi introdus cu ușurință în programele scrise pentru modele cu șase coordonate nodale.
Elementul a fost introdus și testat în programul PASAJ [12].

1. INTRODUCERE

Efectul acțiunii forței tăietoare asupra deformațiilor grinzii încovoiate poate fi luat în considerație prin intermediul ipotezei secțiunilor plane nenormale. Introducerea în calcul a efectului lunecărilor, în cazul răsucirii împiedicate a barelor drepte cu pereți subțiri se poate realiza pe baza unei ipoteze asemănătoare.

Se are în vedere în primul rînd domeniul barelor prismatice cu profil deschis la care secțiunea transversală curentă se consideră a fi alcătuită din segmente dreptunghiulare înguste. La acest tip de bară, dacă se neglijează efectul deformațiilor de lucrare care însoțesc torsiunea împiedicată, calculul se face admițîndu-se că funcția de deplanare și derivata funcției de torsiune se confundă. Cu alte cuvinte, a neglija deformațiile de lunecare este același lucru cu a admite valabilitatea ipotezei lui Bernoulli pentru fiecare segment de secțiune în parte. O modalitate de a introduce în calcul efectul acestor deformații constă în înlocuirea ipotezei lui Bernoulli cu ipoteza segmentelor plane nenormale, enunțată astfel: o secțiune transversală inițial plană se deformează astfel încît segmentele sale rămîn plane dar funcția de deplanare nu se identifică cu derivata funcției de torsiune. Admițîndu-se în fapt valabilitatea acestei ipoteze, în referatul [8] a fost formulată o matrice de rigiditate elastică pentru un element cu patru grade de libertate. Potrivit procedeului descris în [8] termenii aferenți torsiunii libere trebuie incluși în matrice în urma unui calcul iterativ.

În cele ce urmează, în cadrul metodei elementelor finite, într-o formulare consistentă în deplasări, se va prezenta matricea de rigiditate precum și matricea maselor echivalente pentru un element de bară cu pereți subțiri. Efectul deformațiilor de lunecare va fi introdus pe baza ipotezei segmentelor plane nenormale. Alte ipoteze avute în vedre,

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 6, 1989, P. 581—596

privind proprietățile materialului, încărcarea barei prin secțiunea transversală, invariabilitatea conturului secțiunii, distribuția eforturilor unitare pe grosimea segmentelor secțiunii etc., sînt de fapt ipotezele care stau la baza teoriei barelor cu pereți subțiri [7]. Pentru a simplifica formularea se admite, la fel ca în [3], că efectele de interacțiune pot fi introduse în calcul prin intermediul relațiilor de cuplare a gradelor de libertate nodală. În sfîrșit, se precizează că se adoptă o reprezentare polinomială pentru variabilele de bază ale problemei; polinom de gradul 1 pentru deplasarea axială și polinoame de gradul al 3-lea pentru săgeți și rotirea torsională. Acest mod de reprezentare a fost utilizat anterior în [2, 5, 3, 9, 1].

2. ENERGIA DE DEFORMAȚIE

Deplasările unui punct oarecare din secțiunea curentă a elementului de bară se pot calcula cu relațiile:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u - y\theta_z + z\theta_y + \omega\beta, \\ \bar{w} &= w - (z - e_z)\theta, \\ \bar{v} &= v + (y - e_y)\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

în care u este deplasarea longitudinală medie; w și v sînt deplasările centrului de lunecare în planul secțiunii; θ este rotirea secțiunii în jurul acestui centru: θ_z și θ_y reprezintă rotirile secțiunii în jurul axelor oz și oy, iar β este funcția de deplanare. Axele oyz (fig. 1*a*) constituie un sistem central principal, iar ω este coordonata sectorială principală.

Pentru început se consideră

$$\theta_z = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x, \quad \theta_y = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x, \quad \beta = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x. \tag{2}$$

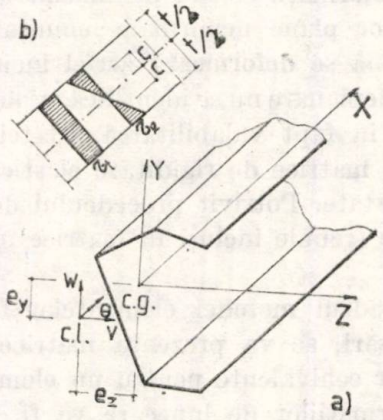


Fig. 1. — Bară cu pereți subțiri profil deschis.

Dacă se admite existența unei stări inițiale de tensiune constantă în toate punctele barei și, corespunzător acesteia, o deformație specifică inițială $\varepsilon_0 = P/EA$, atunci defomația specifică longitudinală, introdu-

cînd și componenta neliniară de ordinul al II-lea aferentă forței axiale [2], se scrie

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2, \tag{3}$$

în care r reprezintă coordonata polară.

Energia de deformație acumulată prin deformarea unui element de bară cu pereți subțiri se determină cu relația

$$\pi = \pi_\sigma + \pi_\tau = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon\sigma dv + \frac{1}{2}\int_v \gamma\tau dv \tag{4}$$

în care π_σ reprezintă energia aferentă tensiunilor normale, iar π_τ cea aferentă tensiunilor tangențiale.

Substituind ε (3) în prima integrală din (4) ținînd seama de legea lui Hooke și neglijînd termenii de ordin superior, rezultă :

$$\pi_\sigma = \frac{EAl}{2}\varepsilon_0^2 + \frac{E}{2}\int_v \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + y^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + z^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \omega^2\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)^2\right] dv + E\varepsilon_0\int_v \left[\frac{du}{dx} - y\frac{d^2w}{dx^2} + z\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dx^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right] dv. \tag{5}$$

După efectuarea integralelor pe secțiune se obține

$$\pi_\sigma = \frac{EAl}{2}\varepsilon_0^2 + \frac{EA}{2}\int_l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{EI_z}{2}\int_l \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx +$$

$$+ \frac{EI_y}{2}\int_l \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{EI_\omega}{2}\int_l \left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{P}{2}\int_l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx +$$

$$+ \frac{P}{2}\int_l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \frac{PI_p}{2A}\int_l \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx, \tag{5'}$$

în care I_z, I_y, I_p și I_ω sînt momente de inerție, A este aria secțiunii transversale, iar l este lungimea elementului.

Tensiunea tangențială τ se calculează cu relația

$$\tau = \tau_t + \tau_1 = \frac{2cM_t}{I_t} - \frac{1}{t}\int_s \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}A = 2cG\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} - \frac{E}{t}\int_s \frac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}A \tag{6}$$

în care M_t este moment de torsiune, I_t este momentul de inerție la torsiune liberă, E și G sînt constantele materialului, iar semnificația lui t și a lui c rezultă din figura 1*b*.

τ_t reprezintă efortul unitar tangențial din răsucire pură. τ_1 este efortul unitar de lunecare corespunzător variației lui σ în lungul axei ox, efort obținut dintr-o condiție de echilibru elementar [7]. Înlocuind τ(6)în π_τ(4), avînd în vedere că $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2$ este zero și apelînd din nou la legea lui Hooke, se obține

$$\pi_\tau = \frac{G}{2}\int_v\left[2c\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \frac{E}{Gt}\int_s\left(y\,\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} - z\,\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3} - \omega\,\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}x^3}\right)\mathrm{d}A\right]^2\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{G}{2}\int_v\left[2c\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \frac{E}{tG}\left(S_z\,\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} - S_y\,\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3} - S_w\,\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}x^3}\right)\right]^2\mathrm{d}v, \tag{7}$$

în care S_y, S_z și S_π sînt momente statice.

Ținînd seama de caracterul coordonatelor de referință și de ipotezele avute în vedere, deci și de faptul că produsul $\tau_t \cdot \tau_1$ este nul (fig. 1*b*), energia de deformație aferentă eforturilor tangențiale, după integrarea pe secțiune, devine

$$\pi_\tau = \frac{GI_t}{2}\int_l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x + \frac{E^2}{2G}\left(\int_A\left(\frac{S_z}{t}\right)^2\mathrm{d}A\right)\int_l\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right)^2\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{E^2}{2G}\left(\int_A\left(\frac{S_y}{t}\right)^2\mathrm{d}A\right)\int_l\left(\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}\right)^2\mathrm{d}x + \frac{E^2}{2G}\left(\int_A\left(\frac{S_w}{t}\right)^2\mathrm{d}A\right)\int_l\left(\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}x^3}\right)^2\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Din cele precizate inițial cu privire la reprezentarea polinomială a variabilelor de bază, rezultă că integranzii ultimelor trei termeni sînt constanți.

Se fac următoarele notații:

$$\gamma_w = \frac{EI_z}{GA_z}\,\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3},\quad \gamma_v = \frac{EI_y}{GA_y}\,\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}\quad \text{și}\quad \gamma_\theta = \frac{EI_w}{GI_t}\,\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}x^3} \tag{9}$$

în care

$$A_z = A/k_z,\quad A_y = A/k_y \text{ și } I_t = I_d/k_\omega. \tag{9'}$$

Constantele secționale k_z, k_y și k_ω se scriu astfel :

$$k_z = \frac{A}{I_z^2}\int_A\left(\frac{S_z}{t}\right)^2 \mathrm{d}A, \quad k_y = \frac{A}{I_y^2}\int_A\left(\frac{S_y}{t}\right)^2 \mathrm{d}A,$$

$$k_\omega = \frac{I_d}{I_\omega^2}\int_A\left(\frac{S_\omega}{t}\right)^2 \mathrm{d}A. \tag{9''}$$

Semnificația lui I_d rezultă mai jos din relația (11).

Substituind în (8) γ_w, γ_v, γ_θ, (9), ținînd seama de (9') și (9''), rezultă

$$\pi_\tau = \frac{GI_t}{2}\int_l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{GA_z}{2}\int_l \gamma_w^2\,\mathrm{d}x + \frac{GA_y}{2}\int_l \gamma_v^2\,\mathrm{d}x + \frac{GI_e}{2}\int_l \gamma_\theta^2\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Contribuția tensiunilor τ_1, constituită din termenii care conțin γ_w, γ_v, γ_θ, inserează, prin intermediul acestora, trei constrîngeri în expresia energiei potențiale. Aceste constrîngeri își au originea în faptul că eforturile de lunecare nu provin din relații constitutive specifice ci din condiții de echilibru elementar. Altfel spus, energia de deformație a fost scrisă cu respectarea ipotezei lui Bernoulli pentru încovoiere și a ipotezei similare din cazul torsiunii cu deplanări împiedicate, ceea ce impune elementului anumite restricții de deformare. Rezultă un element finit mai rigid decît în realitate, fapt care iese în evidență la modurile înalte de vibrație.

În cazul încovoierii, constrîngerile de acest fel pot fi relaxate prin acceptarea ipotezei secțiunilor plane nenormale. Anterior [10, 11], prin adoptarea acestei ipoteze s-a obținut, pentru elementul de bară încovoiată, o soluție „exactă" sub forma unui model deplasare cu patru grade de libertate. Concret, efectul forței tăietoare a fost introdus în expresia energiei prin intermediul termenului doi sau trei din (10), admițînd că γ_w și γ_v nu derivă din variabilele de bază.

Extinzînd domeniul de aplicare a procedeului descris pe larg în [11] la cazul torsiunii împiedicate, se admite că deformațiile de lunecare care însoțesc răsucirea barei sînt independente de variația rotirilor torsionale. Această ipoteză implică definirea energiei de deformație aferente răsucirii prin intermediul a două variabile independente, rotirea torsională și deplanarea din lunecare. Prin urmare, în afara deplanării primare, proporționale cu derivata rotirii θ, se admite existența unei deplanări secundare, independente. În baza ipotezei segmentelor plane nenormale, energia de deformație corespunzătoare deplanării secundare se scrie

$$\pi_\beta = \frac{1}{2}\int_v (h\gamma_\theta)\,(Gh\gamma_\theta)\mathrm{d}v = \frac{GI_d}{2}\int_l \gamma_\theta^2\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

în care γ_θ este unghi de torsiune specific, produsul $h\gamma_\theta$ reprezintă lunecarea la suprafața mediană a profilului, h este perpendiculara dusă din centrul de torsiune pe segmentul curent al secțiunii transversale, iar I_d este momentul de inerție dirijat. În fapt, la scrierea acestei relații s-a admis că tensiunile τ_1 sînt proporționale cu h și repartizate uniform pe segmentele secțiunii. După cum se vede, raportul dintre π_β și ultimul termen din (10) este egal cu k_ω (9″).

În rezumat, dacă se adoptă ipoteza secțiunilor plane nenormale la încovoiere și se acceptă ipoteza segmentelor plane nenormale la torsiune, atunci γ_w, γ_v și γ_θ, cu semnificație de deformații specifice, devin parametri independenți. Aceasta înseamnă că în locul egalităților (2) trebuie să se admită

$$\theta_z = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x + \gamma_w, \quad \theta_y = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x) + \gamma_v, \quad \beta = (\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x) + \gamma_\theta, \tag{12}$$

în care γ_w, γ_v și γ_θ nu depind de x.

Introducînd (12) în (1) și reluînd calculele se obține aceeași expresie (5′) pentru π_σ, însă relațiile (7, 8) nu mai sînt aplicabile. Pentru obținerea energiei de deformație corespunzătoare eforturilor tangențiale se utilizează relația (10) ai cărei termeni trebuie considerați independenți și aditivi. În aceste condiții, k_z, k_y și k_ω (9″) au rolul de a pune în acord cele două ipoteze privind efectul lunecării cu faptul că în realitate eforturile τ_1 nu sînt constante pe segmentele secțiunii transversale.

Extrăgînd din (5′) și (10) termenii corespunzători, energia de deformație acumulată prin torsionarea elementului de bară cu pereți subțiri se scrie astfel :

$$\pi_t = \frac{GI_t}{2}\int_l \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{EI_\omega}{2}\int_l \left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \\ + \frac{GI_e}{2}\int_l \gamma_\theta^2\,\mathrm{d}x + \frac{PI_p}{2A}\int_l \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{13}$$

3. ENERGIA CINETICĂ

Ținînd seama de relațiile (1) și (12), energia cinetică a unui element de bară cu pereți subțiri, care vibrează liber cu frecvența circulară $\tilde{\omega}$, luînd în considerație săgețile, rotirile și deplanarea secțiunii, se scrie

$$T = \frac{\rho\tilde{\omega}}{2}\int_v (\bar{u}^2 + \bar{w}^2 + \bar{v}^2)\,\mathrm{d}v = \frac{\rho A\tilde{\omega}}{2}\int_l \Big[u^2 + v^2 + w^2 + (e_z^2 + e_y^2 + i_p^2)\theta^2 + \\ + 2e_z\theta w + 2e_y\theta v + i_z^2\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \gamma_w\right)^2 + i_y^2\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \gamma_v\right)^2 + \\ + i_\omega^4\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \gamma_\theta\right)^2\Big]\mathrm{d}x, \tag{14}$$

în care

$$i_z^2 = I_z/A, \quad i_y^2 = I_y/A, \quad i_p^2 = I_p/A, \quad i_\omega^4 = I_w/A, \tag{15}$$

ρ reprezintă greutatea specifică a materialului, iar e_z și e_y sînt coordonatele centrului de lunecare.

Dacă nu se iau în considerație vibrațiile axiale și dacă, pentru moment, se neglijează efectul cuplării, ceea ce înseamnă $e_z = e_y = 0$, relația (14) ia forma

$$T = \frac{\rho A \tilde{\omega}}{2} \int_l \left[w^2 + v^2 + i_p^2 \theta^2 + i_z^2 \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \gamma_w \right)^2 + \right.$$

$$\left. + i_y^2 \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \gamma_v \right)^2 + i_\omega^4 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \gamma_\theta \right)^2 \right] \mathrm{d}x. \tag{16}$$

Ultimul termen din (16) constituie aportul deplanării, deplanarea adițională fiind introdusă pe baza ipotezei segmentelor plane nenormale. Termenul în θ^2 introduce aportul torsiunii libere. Ceilalți termeni reprezintă energia aferentă încovoierii după două direcții cu luarea în considerație a efectului forțelor tăietoare.

4. FUNCȚIILE DE FORMĂ

În cazul general de solicitare, făcîndu-se totuși abstracție de deplasarea axială, variabilele independente ale problemei sînt cele trei variabile de bază w, v și θ, împreună cu trei variabile adiționale, deformațiile specifice de lunecare γ_w, γ_v și γ_θ. Relațiile existente între aceste variabile și coordonatele generalizate ale cîmpurilor deplasare se exprimă matriceal prin

$$\left| \begin{matrix} W \\ \gamma_w \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} N_w \\ \bar{N}_w \end{matrix} \right| U_w = \left| \begin{matrix} N1, & N2, & N3, & N4, & N5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & N6 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} W_1 \\ \theta z_1 \\ W_2 \\ \theta z_2 \\ Wi \end{matrix} \right|, \tag{17}$$

$$\left| \begin{matrix} V \\ \gamma_v \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} N_v \\ \bar{N}_v \end{matrix} \right| U_v = \left| \begin{matrix} N1, & -N2, & N3, & -N4, & -N5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & N6 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} V_1 \\ \theta y_1 \\ V_2 \\ \theta y_2 \\ Vi \end{matrix} \right|, \tag{18}$$

$$\begin{vmatrix} \theta \\ \gamma_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_e \\ \bar{N}_e \end{vmatrix} Ue = \begin{vmatrix} N1, & N2, & N3, & N4, & N5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & N6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \beta_1 \\ \theta_2 \\ \beta_2 \\ \theta i \end{vmatrix}, \tag{19}$$

în care indicii 1 și 2 se referă la deplasările secțiunilor de capăt, iar i la gradele de libertate interioare. În figura 2 este reprezentat un element de bară și deplasările secțiunilor de capăt.

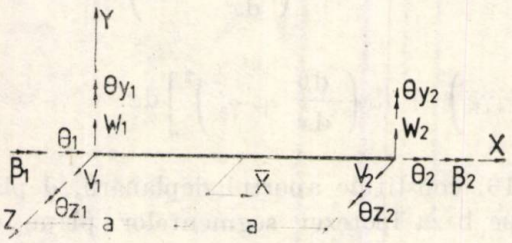


Fig. 2. — Element de bară; deplasări nodale.

Cele șase funcții de formă care intervin în relațiile (17—19) se scriu [10, 11]

$$N1 = 1/2 - 3\bar{x}/(4a) + \bar{x}^3/(4a^3),$$

$$N2 = a/4 - \bar{x}/4 - \bar{x}^2/(4a) - \bar{x}^3/(4a^3),$$

$$N3 = 1/2 + 3\bar{x}/(4a) - \bar{x}^3/(4a^3),$$

$$N4 = -a/4 - \bar{x}/4 + \bar{x}^2/(4a) + \bar{x}^3/(4a^2),$$

$$N5 = \bar{x}/(4a) - \bar{x}^3/(4a^3),$$

$$N6 = 1/2a), \tag{20}$$

în care $\bar{x} = x - a$ și $a = L/2$, L fiind lungimea elementului.

După cum se vede din (19) și (20) cîmpul rotirilor torsionale este descris de un polinom de gradul 3, în care drept coordonate generalizate figurează rotirile de torsiune și deplasările secțiunilor de capăt. Pe lîngă acesta, conform ipotezei adoptate, se admite existența unui cîmp al deplanărilor suplimentare provocate de eforturile de lunecare. Cele două cîmpuri-deplasare sînt cuplate prin intermediul unui grad de libertate adițional care, în fapt, pune în evidență deplanarea reciprocă a secțiunilor de capăt.

Această deplanare corespunde componentei antisimetrice a bimomentului și tensiunilor de lunecare aferente și, după cum rezultă din (20), este constantă pe lungimea elementului.

5. MATRICEA DE RIGIDITATE

Matricele de rigiditate asociate deplasărilor U_w și U_v au fost prezentate anterior [10, 11]. În acest paragraf este examinat numai cazul torsiunii cu deplanări împiedicate.

Înlocuind θ și γ_θ (19) în relația (13) se obține :

$$\pi_t = U_\theta^T \left(\frac{GI_t}{2} \int_l \left| \frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}x} \right|^T \left| \frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x + \frac{EI_\omega}{2} \int_l \left| \frac{\mathrm{d}^2 N_\theta}{\mathrm{d}x^2} \right|^T \left| \frac{\mathrm{d}^2 N_\theta}{\mathrm{d}x^2} \right| \mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \frac{GI_\omega}{2} \int_l |\bar{N}_\theta|^T |\bar{N}_\theta| \, \mathrm{d}x + \frac{PI_p}{2A} \int_l \left| \frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}x} \right|^T \left| \frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x \right) U_\theta. \tag{21}$$

După efectuarea integralelor, energia de deformație aferentă torsiunii se scrie

$$\pi_t = \frac{1}{2} U_\theta^T \bar{K}_\theta U_\theta \tag{22}$$

în care

$$\bar{K}_\theta = \bar{K}_{\theta E} + \bar{K}_{\theta G} \tag{22'}$$

este matricea de rigiditate (5×5) a elementului de bară. Primele trei integrale din (21) conduc la matricea de rigiditate elastică $\bar{K}_{\theta E}$, iar ultima, la matricea de rigiditate geometrică $\bar{K}_{\theta G}$.

Gradul de libertate suplimentar θ_i se elimină prin condensare statică, matricea de condensare R fiind dată de relația [11] :

$$R = \frac{1}{1 + t_\omega} \begin{vmatrix} 1 + t_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + t_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + t_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + t_\omega \\ t_\omega & at_\omega & -t_\omega & at_\omega \end{vmatrix}, \tag{23}$$

în care

$$t_\omega = 12\, EI_\omega / (L^2 GI_e). \tag{24}$$

Aici ca și în (5') cu I_ω s-a notat momentul de inerție sectorial, iar cu I_e, la fel ca în (10), momentul de inerție dirijat redus. L este lungimea elementului.

Matricea redusă K_θ, cu dimensiuni 4×4, se obține din următoarea transformare :

$$K_\theta = R^T (\bar{K}_{\theta E} + \bar{K}_{\theta G}) R = K_{\theta E} + K_{\theta G}. \tag{25}$$

Matricea de rigiditate elastică este reprezentată de relaţia

$$K_{\theta E} = \begin{vmatrix} K1 & K2 & -K1 & K2 \\ K2 & K3 & -K2 & K4 \\ -K1 & -K2 & K1 & -K2 \\ K2 & K4 & -K2 & K3 \end{vmatrix}, \tag{26}$$

în care s-au folosit notaţiile :

$$K1 = \frac{12EI_\omega}{L^3(1+t_\omega)} + \frac{GI_t}{5L(1+t_\omega)^2}(6 + 10t_\varphi + 5t_\omega^2),$$

$$K2 = \frac{6EI_\omega}{L^2(1+t_\omega)} + \frac{GI_t}{10(1+t_\omega)^2},$$

$$K3 = \frac{(4+t_\omega)EI_\omega}{L(1+t_\omega)} + \frac{GI_tL}{60(1+t_\omega)^2}(8 + 10t_\omega + 5t_\omega^2),$$

$$K4 = \frac{(2-t_\omega)EI_\omega}{L(1+t_\omega)} - \frac{GI_tL}{60(1+t_\omega)^2}(2 + 10t_\omega + 5t_\omega^2). \tag{26'}$$

Dacă în (26') se face $I_t = 0$, se obţine matricea dată în [8] pentru cazul în care se neglijează aportul torsiunii Saint-Venant.

Matricea de rigiditate geometrică se calculează cu relaţia

$$K_{\theta G} = \begin{vmatrix} G1 & G2 & -G1 & G2 \\ G2 & G3 & -G2 & -G4 \\ -G1 & -G2 & G1 & -G2 \\ G2 & -G4 & -G2 & G3 \end{vmatrix} \tag{27}$$

împreună cu următoarele notaţii :

$$G1 = \frac{PI_p}{5AL(1+t_\omega)^2}(6 + 10t_\omega + 5t_\omega^2), \quad G2 = \frac{PI_p}{10A(1+t_\omega)^2},$$

$$G3 = \frac{PI_pL}{60A(1+t_\omega)^2}(8 + 10t_\omega + 5t_\omega^2),$$

$$G4 = -\frac{PI_pL}{60A(1+t_\omega)^2}(2 + 10t_\omega + 5t_\omega^2). \tag{27'}$$

Dacă în (27') se ia $t_\omega = 0$, se obţine matricea dată în [2].

6. MATRICEA MASELOR ECHIVALENTE

Substituind (17—19) în (6), extrăgînd apoi termenii corespunzători, se obține energia cinetică aferentă torsiunii cu deplanare împiedicată, sub forma

$$T = \frac{\rho\tilde{\omega}^2 A}{2} U_\theta^T \int_l \left(i_p^2 |N_\theta|^T |N_\theta| + i_\omega^4 \left| \frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}x} + \bar{N}_\theta \right|^T \left| \frac{\mathrm{d}N_\theta}{\mathrm{d}x} + \bar{N}_\theta \right| \right) \mathrm{d}x \, U_\theta. \tag{28}$$

După efectuarea integrării relația (28) devine

$$T = \frac{\tilde{\omega}^2}{2} U_\theta^T \widetilde{M} U_\theta, \tag{29}$$

în care cu $\widetilde{M}$ s-a notat matricea maselor (5×5).

În urma transformării

$$M_\theta = R^T \widetilde{M} R \tag{30}$$

în care R se calculează cu relația (23), se obține matricea redusă a maselor echivalente:

$$M_\theta = \rho A L \begin{vmatrix} M1 & M2 & M3 & -M4 \\ M2 & M5 & M4 & -M6 \\ M3 & M4 & M1 & -M2 \\ -M4 & -M6 & -M2 & M5 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

În (31) au fost folosite următoarele notații:

$$M1 = \frac{i_p^2}{(1+t_\omega)^2}\left(\frac{13}{35} + \frac{7}{10} t_\omega + \frac{1}{3} t_\omega^2\right) + \frac{i_\omega^4}{L^2}\frac{6}{5},$$

$$M2 = \frac{i_p^2 L}{(1+t_\omega)^2}\left(\frac{11}{210} + \frac{11}{210} t_\omega + \frac{1}{24} t_\omega^2\right) + \frac{i_\omega^4}{L}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} t_\omega\right),$$

$$M3 = \frac{i_p^2}{(1+t_\omega)^2}\left(\frac{9}{70} + \frac{3}{10} t_\omega + \frac{1}{6} t_\omega^2\right) - \frac{i_\omega^4}{L^2}\frac{6}{5},$$

$$M4 = \frac{i_p^2 L}{(1+t_\omega)^2}\left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40} t_\omega + \frac{1}{24} t_\omega^2\right) - \frac{i_\omega^4}{L}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} t_\omega\right),$$

$$M5 = \frac{i_p^2 L^2}{(1+t_\omega)^2}\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60} t_\omega + \frac{1}{120} t_\omega^2\right) + i_\omega^4\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} t_\omega + \frac{1}{3} t_\omega^2\right),$$

$$M6 = \frac{i_p^2 L^2}{(1+t_\omega)^2}\left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60}\,t_\omega + \frac{1}{120}\,t_\omega^2\right) + i_\omega^4\left(\frac{1}{30} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\,t_\omega - \frac{1}{6}\,t_\omega^2\right). \tag{31'}$$

Dacă în aceste relații se face $t_\omega = 0$, se obține matricea din referatul [9].

7. CUPLAREA GRADELOR DE LIBERTATE

Componentele matricelor K_θ și M_θ au fost determinate în raport cu deplasările centrelor de greutate și ale centrelor de lunecare aferente secțiunilor de capăt. În vederea asamblării matricelor globale, este necesar ca raportarea tuturor matricelor să se facă la un singur set de deplasări : cele ale centrelor de greutate. Aceasta se realizează, pentru fiecare element de bară, prin transformările

$$K = \Gamma^T \begin{vmatrix} K_w & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & K_\theta \end{vmatrix} \Gamma, \quad M = \Gamma^T \begin{vmatrix} M_w & 0 & 0 \\ 0 & M_v & 0 \\ 0 & 0 & M_\theta \end{vmatrix} \Gamma \tag{32}$$

în care K_θ și M_θ sînt definite de (26) și (31), iar K_w, K_v, M_w și M_v au fost prezentate anterior în [10, 11]. Matricea de constrîngere Γ întrunește relațiile de conexiune liniară existente între gradele de libertate ale celor două centre :

$$\Gamma = \begin{vmatrix} I4 & 0 & -e_z I4 \\ 0 & I4 & e_y I4 \\ 0 & 0 & I4 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

În relația precedentă, $I4$ este matricea unitate, iar e_z și e_y sînt coordonatele centrului de lunecare.

Matricea de rigiditate (12×12) raportată la deplasările centrelor de greutate ale secțiunilor de capăt rezultă din (32) :

$$K = \begin{vmatrix} K_w & 0 & -e_z K_w \\ 0 & K_v & e_y K_v \\ -e_z K_w & e_y K_v & (K_\theta + e_y^2 K_w + e_z^2 K_v) \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Sub această formă, K reprezintă o particularizare a matricei de rigiditate dată în [3].

O relație asemănătoare cu (34) se obține și pentru matricea maselor echivalente :

$$M = \begin{vmatrix} M_w & 0 & -e_z M_w \\ 0 & M_v & e_y M_v \\ -e_z M_w & e_y M_v & (M_\theta + e_y^2 M_v + e_z^2 M_w) \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Se menționează că la relația (35) se poate ajunge direct, fără a recurge la transformarea (32), dacă în expresia energiei cinetice (16) se păstrează termenii care conțin cele două coordonate ale centrului de lunecare. M (35) constituie o generalizare a matricei maselor echivalente dată în [5].

8. BARE CU PROFIL ÎNCHIS

Matricele obținute în paragrafele precedente pot fi folosite și în cazul barelor cu profil închis dacă, pe de o parte, se admite că influența fluxului din răsucire împiedicată asupra deformării secțiunii are ca efect deplanarea secundară reprezentată de γ_θ și, pe de altă parte, se acceptă prezumția potrivit căreia eforturile τ din torsiune liberă și torsiune împiedicată, dau, în expresia energiei potențiale, termeni independenți și aditivi. Evident, constantele secționale sectoriale care rezultă în această situație sînt diferite de cele de la barele cu profil deschis.

Pentru a obține noile constante, limitîndu-ne însă numai la categoria barelor cu profil dublu conex, trebuie să se facă cîteva modificări în cele prezentate anterior.

Coordonata sectorială principală care apare în relația (1) și în continuare, trebuie considerată sub forma ei generalizată, adică

$$\omega = \int_s \left(h - \frac{I_t}{2t\Omega} \right) \mathrm{d}s \tag{36}$$

în care

$$I_t = (2\Omega)^2 / \bar{L}, \quad \bar{L} = \oint \frac{\mathrm{d}s}{t}. \tag{37}$$

În aceste relații, t reprezintă grosimea curentă a peretelui profilului, Ω este aria închisă de conturul median, iar h are același înțeles ca în relația (11). Semnificația lui I_t, aceea de moment de inerție la torsiune, rezultă din primul termen al relației (8), notat $\pi_{\tau l}$, rescris cu ajutorul formulelor lui Bredt astfel:

$$\pi_{\tau l} = \frac{1}{2G} \int_v \tau_t^2 \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2G} \int_v \left(\frac{2G\Omega}{t\bar{L}} \right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \right)^2 t \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{GI_t}{2} \int_l \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x. \tag{38}$$

Invocînd ipoteza segmentelor plane nenormale, energia de deformație corespunzătoare fluxului de forfecare din răsucire cu deplanări împiedicate, notată $\pi_{\tau i}$, se scrie, tot cu ajutorul formulelor lui Bredt, sub forma

$$\pi_{\tau i} = \frac{GI_e}{2} \int_l \gamma_\theta^2 \, \mathrm{d}x \tag{39}$$

în care I_t a fost înlocuit cu $I_e = I_t/k_\omega$ pentru a se ţine seama de neuniformitatea fluxului pe secţiune. În cazul secţiunilor dublu conexe, constanta k_ω, identică cu parametrul $1/\nu$ din [4], se calculează cu relaţia

$$k_\omega = \frac{I_t}{I_\omega^2} \int_A \left(\frac{S_\omega^*}{t} \right)^2 dA \tag{40}$$

în care

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA, \quad S_\omega^* = \frac{1}{\bar{L}} \oint \frac{S_\omega}{t} \, ds - S_\omega, \quad S_\omega = \int_A \omega \, dA. \tag{41}$$

În referatul [4] sînt date relaţiile necesare pentru calculul constantelor secţionale prin sume finite.

Dacă în formularea schiţată aici, pentru elementul de bară cu secţiune dublu conexă, se renunţă la efectul deplanării secundare, se regăsesc principalele particularităţi ale procedeului descris în referatul [1].

9. EXEMPLU DE CALCUL

Pe baza celor arătate în paragrafele anterioare, a fost introdusă în programul PASAJ [12] o procedură de analiză statică şi dinamică a structurilor care au în componenţă bare cu pereţi subţiri. Calculele necesare soluţionării exemplului care urmează au fost efectuate cu ajutorul acestui program.

Pentru o structură cu 10 etaje, avînd nucleul de rezistenţă alcătuit ca în figura 3, se calculează modurile de vibraţie torsională conside-

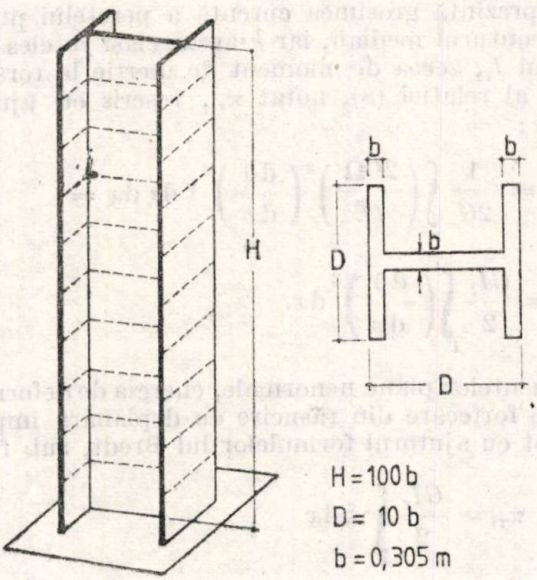


Fig. 3. — Nucleu de rezistenţă din diafragme.

rînd masele concentrate la nivelul planșeelor. Sînt avute în vedere patru ipoteze de calcul:

Ipoteza I — Se neglijează atît contribuția torsiunii uniforme, cît și efectul lunecării din deplanare;

Ipoteza II — Se neglijează contribuția torsiunii uniforme dar se ia în considerație efectul lunecării;

Ipoteza III — Se include contribuția torsiunii uniforme dar se neglijează efectul lunecării.

Ipoteza IV — Se include atît contribuția torsiunii uniforme, cît și efectul lunecării din deplanare.

Inerția de rotație se consideră aceeași la toate nivelele, aleasă astfel încît în ipoteza de calcul IV perioada fundamentală să rezulte egală cu o secundă. Tabelul 1 conține perioadele celor 10 moduri de vibrație, pentru fiecare din cele patru ipoteze avute în vedere.

Tabelul I

Mod	Ip. I	Ip. II	Ip. III	Ip. IV
1	2,2253	2,2361	0,9929	1,0000
2	0,3533	0,3653	0,2646	0,2713
3	0,1256	0,1359	0,1129	0,1208
4	0,0638	0,0737	0,0605	0,0690
5	0,0385	0,0482	0,0374	0,0461
6	0,0259	0,0354	0,0253	0,0343
7	0,0187	0,0283	0,0185	0,0275
8	0,0145	0,0241	0,0143	0,0235
9	0,0120	0,0216	0,0119	0,0212
10	0,0107	0,0203	0,0106	0,0199

Același exemplu de calcul a fost soluționat și în referatul [8]. Rezultatele obținute aici (tabelul 1) și în [8] diferă cu mai puțin de un procent.

10. CONCLUZII

A fost prezentat un procedeu simplificat pentru formularea consistentă a unui element de bară cu pereți subțiri. Efectul deformațiilor de lunecare care însoțesc torsiunea împiedicată a fost introdus în calcul prin intermediul ipotezei segmentelor plane nenormale. Matricele obținute pe această cale pot fi considerate „exacte" în cazul barelor prismatice cu două plane longitudinale de simetrie. Matricele sînt numai „exacte" (nu exacte) deoarece drept funcție de interpolare a rotirilor torsionale a fost utilizat un polinom, nu soluția ecuației diferențiale guvernante.

Pentru simplificarea formulării, în cazul barelor la care linia centrelor de greutate nu coincide cu linia centrelor de lunecare, s-a admis ca efectele de interacțiune existente între eforturile de lunecare să se transfere la nivelul gradelor de libertate exterioare. În acest fel se obține reducerea numărului noilor constante secționale și se elimină necesitatea de a deriva submatricele de cuplare din energia potențială și energia cinetică.

Validarea acestei ipoteze care pe de o parte, conduce la o simplificare substanțială a calculelor, iar pe de altă parte, în cazul barelor scurte, poate introduce erori, trebuie să se facă prin confruntare cu rezultate experimentale.

Se menționează că în cazurile în care tensiunile normale din torsiune sînt nesemnificative, relațiile (34) și (35) furnizează o foarte bună aproximație a soluției exacte.

În formularea prezentată aici s-a presupus că interconectarea nodală se realizează astfel încît liniile centrelor de greutate ale elementelor se întîlnesc la nodurile structurii. În situațiile în care acest deziderat nu corespunde realității apare necesitatea introducerii unor relații de constrîngere după modelul celei utilizate în referatul [3] (a se vedea și [6]).

Primit în redacție la 1 februarie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. A.M. ABDEL-GHAFFAR, *Free Torsional Vibrations of Suspension Bridges*, J. Strict. Div., **105**, 4 (1979).
2. R.H. GALLAGHER, *Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood-Cliffs, New Jersey, 1975.
3. T. KAWAY, *The Application of Finite Element Methods to Ship Structures*, Computers & Structures, **3**, (1973).
4. D. MATEESCU, N. BĂLUȚ, I. CARABA, *Calculul plan și spațial al grinzilor căilor de rulare executate din oțel*. Edit. Academiei, București, 1988, p. 404—411.
5. C. MEI, *Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Section using the Finite Element Method*, Int. J. Mech. Sci., **12** (1970).
6. S.D. MUȘAT, *Legături cinematice între deplasări în metoda elementelor finite*, St. cerc. mec. apl., **47**, 5 (1988).
7. A. PETRE, M. ATANASIU, *Bare cu pereți subțiri*, Edit. Tehnică, București, 1960.
8. J. VASQUEZ, R. RIDDELL, *Thin-Walled Core Element for Multistory Buildings*, J. Strct. Engng., **110**, 5 (1984).
9. F. VENANCIO-FILHO, F. IGUTI, *Vibrations of Grids by Finite Element Method*, Computers & Structures, **3**, (1973).
10. G. ONU, *Influența forței tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă*, St. cerc. mec. apl., **41**, 4 (1982).
11. G. ONU *Shear Effect in Beam Stiffness*, Capitolul 13 în *Civil Engineering Practice. Structures*, Technomic Publ., Lancaster, Pa., 1987.
12. G. ONU, *Linii, suprafețe și spații de influență prin metoda elementelor finite*, St. cerc. mec. apl., **44**, 6 (1985).

ASUPRA VIBRAȚIILOR LONGITUDINALE ÎN BARE ELASTICE OMOGENE, AVÎND FORMA DE TRUNCHI DE CON CIRCULAR

de W. W. KECS
Centrul de Calcul Electronic Petroșani

În lucrare, utilizînd transformata Laplace, se dă soluția în deplasări pentru vibrațiile longitudinale în bare elastice omogene avînd forma de trunchi de con circular, în ipoteza că la capetele barei se cunoaște legea de variație a deplasării. Considerînd condițiile inițiale nule, rezultatele obținute se exemplifică în trei cazuri și anume, după cum la capetele barei deplasările sînt constante, variază liniar sau variază brusc.

1. INTRODUCERE

Dintre barele elastice omogene și izotrope cu secțiune variabilă, o deosebită importanță practică prezintă cele care au formă de trunchi de con circular. Considerat ca un corp elastic unidimensional, vom formula problema mixtă pentru ecuația vibrațiilor longitudinale la care condițiile pe frontieră sînt date în deplasări. Cu ajutorul transformatei Laplace, problema la limită formulată se reduce la o problemă bilocală, care, datorită metodologiei de rezolvare utilizată, admite o soluție unică.

Unele formule stabilite [3] de autor privind transformata Laplace inversă permit rezolvarea efectivă a diferitelor probleme la limită considerate.

2. REZULTATE GENERALE

Ecuația vibrațiilor longitudinale în bare elastice omogene la care secțiunea transversală este variabilă [4] are forma :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c^2}{S(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{X}{\rho}, \tag{2.1}$$

unde

ρ reprezintă densitatea : E — modulul lui Young ; $S(x) \in C^1([0, l])$ — aria secțiunii transversale în punctul $x \in [0, l]$; $X(x, t) \in C^{0,0}([0, l] \times \mathbb{R}_+)$ — densitatea forțelor masice pe unitatea de volum, iar $u(x, t) \in C^{2,2}([0, l] \times \mathbb{R}_+)$ deplasarea ; constanta $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ reprezintă viteza de propagare a vibrațiilor longitudinale.

În cele ce urmează vom considera bara avînd forma unui trunchi de con cu unghiul de deschidere 2α și lungimea l (fig. 1). Axa de simetrie a barei se ia drept axa O_1x. Razele secțiunilor transversale de la capetele barei au expresiile :

$$r_1 = a\,\mathrm{tg}\alpha, \quad r_2 = (a + l)\ \mathrm{tg}\alpha. \tag{2.2}$$

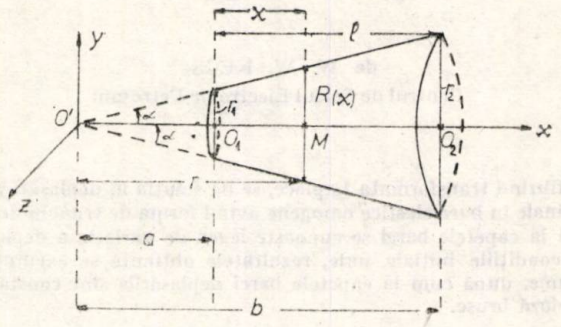


Fig. 1

Originea O' a sistemului de referință O'_{xyz} este luat în vîrful conului. În figura 1 s-a notat :

$$O_1M = x, \quad x \in [0, l], \quad O'M = r, \quad O'O_1 = a, \tag{2.3}$$

unde M reprezintă un punct oarecare al barei.

Raza secțiunii în punctul $x \in [0, l]$ are expresia :

$$R(x) = r_1 + x\operatorname{tg}\alpha, \quad x \in [0, l], \tag{2.4}$$

ceea ce arată că aceasta variază liniar, iar aria secțiunii transversale variază parabolic și anume :

$$S(x) = \pi(r_1 + x\operatorname{tg}\alpha)^2.$$

Remarcăm că ecuația de mișcare (2.1) este scrisă în raport cu variabila $x = O_1M$ a cărei origine de măsurare este capătul O_1 din stînga barei.

Prin explicitarea ecuației (2.1) acesta devine :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2c^2 \operatorname{tg}\alpha}{r_1 + x\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{X}{\rho}. \tag{2.5}$$

În scopul simplificării studiului ecuației de mișcare (2.5) este util ca în locul variabilei x să introducem o nouă variabilă $O'M = r \in [a, b]$ a cărei origine de măsurare este vîrful O' al conului (fig. 1). Între cele două variabile are loc relația :

$$r = a + x, \quad x \in [0, l], \tag{2.6}$$

$$r \in [a, b], \quad b = a + l.$$

cu noua variabilă $r \in [a, b]$, ecuația (2.5) a vibrațiilor :

$$- c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} - \frac{2c^2}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{\tilde{X}}{\rho}, \tag{2.7}$$

unde

$$\tilde{u} = \tilde{u}(r, t) = u(r - a, t), \quad \widetilde{X} = \widetilde{X}(r, t) = X(r - a, t). \tag{2.8}$$

Ținînd seama de relațiile

$$\frac{\partial^2(\tilde{u}r)}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2(\tilde{u}r)}{\partial r^2} = 2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} + r\frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial r^2}, \tag{2.9}$$

ecuația (2.7) capătă forma :

$$\frac{\partial^2(\tilde{u}r)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2(\tilde{u}r)}{\partial r^2} = \frac{r\widetilde{X}}{\rho}, \quad r \in [a, b], \quad t > 0. \tag{2.10}$$

Vom nota

$$\tilde{u}r = U(r, t), \quad \frac{r\widetilde{X}}{\rho} = X_1(r, t), \tag{2.11}$$

cu ajutorul cărora ecuația (2.10) devine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = X_1. \tag{2.12}$$

În legătură cu ecuația (2.5) introducem :

Definiția 1. Numim problemă mixtă pentru ecuația (2.5) determinarea funcției $u(x, t) \in C^{2,2}([0, l]\times\mathbb{R}_+) \cap C^{2,1}([0, l]\times\mathbb{R}_+^+)$, $\mathbb{R}_+^+ = [0, \infty)$ care satisface ecuația (2.5) pentru $t > 0$, condițiile inițiale

$$u(x, t)\Big|_{t=+0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=+0} = u_1(x) \tag{2.13}$$

și condițiile la limită

$$u(x, t)|_{x=0} = f_1(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = f_2(t), \tag{2.14}$$

unde

$$u_0 \in C^2[0, l]), \quad u_1 \in C^1([0, l]); \quad f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}_+^+), \tag{2.15}$$
$$X \in C^0[0, l] \times \mathbb{R}_+).$$

Cu notațiile (2.11), condițiile inițiale (2.13) și condițiile la limită (2.14) devin :

$$U(r, t)|_{t=+0} = U_0(r) = r\tilde{u}_0(r) = ru_0(r - a), \tag{2.13'}$$

$$\frac{\partial U(r,t)}{\partial t}\Big|_{t=+0} = U_1(r) = r\tilde{u}_1(r) = ru_1(r - a); \tag{2.14'}$$

$$U(r,t)|_{r=a} = F_1(t) = a\tilde{u}(a,\ t) = af_1(t),$$

$$U(r,t)|_{r=b} = F_2(t) = b\tilde{u}(b,\ t) = bf_2(t).$$

În consecință, problema mixtă formulată pentru ecuația (2.5) se reduce la determinarea funcției U care să satisfacă ecuația (2.12) precum și condițiile (2.13′) și (2.14′). Pentru rezolvarea problemei, vom aplica transformata Laplace ecuației (2.12) și astfel avem :

$$\frac{d^2\hat{U}}{dr^2} - \omega^2 \hat{U} = F(r,\ p), \tag{2.16}$$

unde

$$L[U(r,t)](p) = \hat{U}(r,p),\ \omega^2 = \frac{p^2}{c^2},$$

$$F(r,\ p) = -\hat{X}_1 - \frac{pU_0(r) + U_1(r)}{c^2},$$

$$\hat{X}_1(r,p) = L[X_1(r,t)](p) = \frac{r}{\rho}[\tilde{X}](p). \tag{2.17}$$

Admițind că funcțiile f_1 și f_2 date de (2.14) au imagine Laplace, atunci din (2.14′) obținem :

$$\hat{U}(r,\ p)|_{r=a} = \hat{F}_1(p) = a\hat{f}_1(p),$$
$$\hat{U}(r,\ p)|_{r=b} = \hat{F}_2(p) = b\hat{f}_2(p). \tag{2.18}$$

Asociind ecuației (2,16) condițiile (2.18) am obținut o problemă bilocală. Pentru obținerea soluției acestei probleme vom determina soluția generală a ecuației (2.16), utilizînd metoda variației constantelor. În acest fel găsim

$$\hat{U}(r,\ p) = A\mathrm{sh}\omega r + B\mathrm{ch}\omega r + \frac{1}{\omega}\int_a^r \mathrm{sh}\omega(r-\tau)F(\tau,\ p)\ d\tau. \tag{2.19}$$

Impunînd funcției $\hat{U}$ condițiile (2.18) vom obține pentru constantele A, B expresiile :

$$A = \frac{F_2(p)\mathrm{ch}\omega a - F_1(p)\mathrm{ch}\omega b}{\mathrm{sh}\omega(b-a)} - \frac{\mathrm{ch}\omega a}{\omega \mathrm{sh}\omega(b-a)}\int_a^b \mathrm{sh}\omega(b-\tau)F(\tau,\ p)d\tau,$$

$$B = \frac{F_1(p)\,\mathrm{sh}\,\omega b - F_2(p)\,\mathrm{sh}\omega a}{\mathrm{sh}\omega(b-a)} + \frac{\mathrm{sh}\omega a}{\omega \mathrm{sh}\omega(b-a)}\int_a^b \mathrm{sh}\omega(b-\tau)F(\tau,p)\,d\tau. \tag{2.20}$$

Substituind (2.20) în (2.19) vom obține pentru problema bilocală (2.16), (2.18) soluția:

$$\hat{U}(r,p) - F_1(p)\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-r)}{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-a)} + F_2(p)\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(r-a)}{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-a)} -$$

$$-c\,\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(r-a)}{p\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-a)}\int_a^a \operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-\tau)F(\tau,p)\,d\tau +$$

$$+\frac{c}{p}\int_a^r \operatorname{sh}\frac{p}{c}(r-\tau)F(\tau,p)\,d\tau. \tag{2.21}$$

Aplicînd transformata Laplace inversă funcției (2.21) și ținînd seamă de notațiile (2.11), (2.18), (2.17), (2.13'), vom obține soluția problemei mixte și anume:

$$\tilde{u}(r,t) = L^{-1}[\hat{U}(r,p)] = \frac{a}{r}f_1(t) * L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-r)}{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-a)}\right] +$$

$$+\frac{b}{r}f_2(t) * L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(r-a)}{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-a)}\right] +$$

$$+cL^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}(r-a)}{p\operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-a)}\int_a^b \operatorname{sh}\frac{p}{c}(b-\tau)\left(\frac{1}{\rho}\tilde{X}(\tau,p) + \frac{p\tilde{u}_0(\tau)+\tilde{u}_1(\tau)}{c^2}\right)d\tau\right] -$$

$$-cL^{-1}\left[\frac{1}{p}\int_a^r \operatorname{sh}\frac{p}{c}(r-\tau)\left(\frac{1}{\rho}\tilde{X}(\tau,p) + \frac{p\tilde{u}_0(\tau)+\tilde{u}_1(\tau)}{c^2}\right)d\tau\right], \tag{2.22}$$

unde produsul de convoluție se efectuează în raprt cu variabila temporală $t \in \mathbb{R}$.

În legătură cu imaginile Laplace ale unor funcţii sau distribuţii care apar în formula (2.22), conform celor arătate în [3], au loc următoarele formule :

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}x}{p^2\operatorname{sh}\frac{p}{c}l}\right]=\theta(t)\frac{tx}{l}+\frac{2l}{c\pi^2}\theta(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{kc\pi t}{l},$$

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}x}{p\operatorname{sh}\frac{p}{c}l}\right]=\frac{x\theta(t)}{l}+\frac{2\theta(t)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi ct}{l},$$

(2.23)

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{c}x}{\operatorname{sh}\frac{p}{c}l}\right]=\frac{2\theta(t)}{cl}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi ct}{l}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta\left(t-\frac{(2k+1)l-x}{c}\right)-\delta\left(t-\frac{(2k+1)l+x}{c}\right)\right],$$

unde $x\in[0,\ l]$ iar $\theta(t)$ reprezintă funcţia lui Heaviside :

$$\theta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

Observăm că din însăşi metodologia expusă a obţinerii soluţiei problemei mixte rezultă că soluţia obţinută este unică atît în clasa funcţiilor $C^{2,2}([0,\ l]\times\mathbb{R}_+)\cap C^{2,1}(0,l]\times\mathbb{R}_+^*)$, cît şi în clasa distribuţiilor temperate $S'(\mathbb{R})$, unde $r\in a,\ b]$ se consideră parametru.

Pentru exemplificarea formulelor (2.21), respectiv (2.22), vom da soluţia problemei mixte în cîteva cazuri particulare importante din punct de vedere aplicativ.

3. APLICAŢII

Vom considera bara în absenţa forţelor masice, condiţii iniţiale nule şi condiţiile la capete (2.14). În consecinţă, $X=0$, $u_0(x)=0$, $u_1(x)=0$, $x\in[0,\ l]$ şi $u(x,\ t)|_{x=0}=f_1(t)$, $u(x,\ t)|_{x=l}=f_2(t)$, unde

$$f_1f_2\in C^0([0,\ \infty)),\ f_1=0,\ f_2=0,\ t<0.$$

Ținînd seamă de (2.22) și (2.23), obținem pentru deplasare expresia:

$$u(x,t)=\frac{a}{x+a}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_1\left(t-\frac{x+2kl}{c}\right)-f_1\left(t-\frac{2l(k+1)+x}{c}\right)\right]+$$

$$+\frac{a+l}{x+a}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_2\left(t-\frac{(2k+1)l-x}{c}\right)-f_2\left(t-\frac{(2k+1)l+x}{c}\right)\right],$$

$$x\in[0,l],\quad t\geqslant 0.$$

În particular prezintă importanță cazurile:

$I_1)$ $f_1=A\theta(t)$, $f_2=B\theta(t)$, unde A, $B\in\mathbb{R}$ și $\theta(t)$ reprezintă funcția lui Heaviside. Deoarece $L[\theta(t)]=\frac{1}{p}$, din (2.22) și (2.23) obținem deplasarea

$$u(x,t)=\frac{a}{x+a}A\left[\frac{l-x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi}{l}(l-x)\sin\frac{kc\pi t}{l}\right]+$$

$$+\frac{a+l}{x+a}B\left[\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{kc\pi t}{l}\right],$$

$$x\in[0,l],\quad t\geqslant 0.$$

$I_2)$ $f_1=At\theta(t)$, $f_2=Bt\theta(t)$.

Deoarece $L[t\theta(t)]=\frac{1}{p_2}$, ținînd seamă de (2.22), (2.23) vom obține pentru deplasare expresia:

$$u(x,t)=\frac{a}{x+a}A\left[\frac{t}{l}(l-x)+\frac{2}{c\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\sin\frac{k\pi(l-x)}{l}\sin\frac{kc\pi t}{l}\right]+$$

$$+\frac{a+l}{x+a}B\left[\frac{tx}{l}+\frac{2}{c\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{kc\pi t}{l}\right],$$

$$x\in[0,l],\quad t\geqslant 0.$$

$I_3)$ $f_1=0$, $f_2=B\delta(t)$.

unde $\delta(t)$ reprezintă distribuția lui Dirac.
În acest caz, ținînd seamă de (2.22) și (2.23), vom obține pentru deplasare expresia:

$$u(x,t)=\frac{a+l}{a+x}B\frac{2}{cl}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi ct}{l},$$

$$x\in[0,l],\quad t\geqslant 0.$$

Primit în redacție la 12 decembrie 1989

BIBLIOGRAFIE

1. H. BATEMAN, A. ERDÉLY, *Tables of integral transforms*, vol. **1**, McGraw-Hill Co., 1954.
2. A. F. ZUBOVA, *An investigation of the oscillation of beams of variable cross section*, Differentialnie uravnenia, **14**, 9 (1978).
3. W. W. KECS, *Determinarea imaginilor Laplace inverse ale unor funcții hiperbolice*, St. cerc. mec. apl., **44**, 5 (1985).
4. S. P. TIMOȘENKO, *Kolebania v injinerom dele*, „Nauka", Moskva, 1967.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

INDEX ALFABETIC

Tomul 48 1989

	Nr.	Pag.
ANDREI, IRINA-CARMEN, Despre stratul limită turbulent incompresibil, cu gradient de presiune	1	35
ANTON, I., IONESCU, D., CĂLIN, G., Optimizarea reţelelor plane de turbine hidraulice. I. Prezentarea metodei	3	237
ANTON, I., IONESCU, D., CĂLIN, G., Optimizarea reţelelor plane de turbine hidraulice. II. Proiectarea reţelei şi a paletei	4	349
BĂTUCĂ, D., Calculul numeric al curgerii permanente a apei din albiile riurilor şi canalelor, bazat pe utilizarea tehnicii elementelor finite	2	179
BOGOS, ŞT., Studiu teoretic asupra caracteristicilor aerodinamice ale unui sistem de hipersustentaţie de tip Fowler. Efectul suflării voletului cu fantă şi recul	1	109
BRATU, P., Analiza experimentală a parametrilor dinamici la ciurul vibrator cu funcţionare în rezonanţă	5	515
BURACU, V., Asupra semiplanului elastic încărcat cu sarcină normală distribuită pe frontieră, cu aplicaţie la problema contactului plan	2	141
CĂLIN, G., v. ANTON, I.	3	237
CĂLIN, G., v. ANTON, I.	4	349
CHIRIACESCU, S. T., Asupra ecuaţiilor curbelor limită de rezistenţă la oboseală	3	279
DAVID, L., Modele numerice în simularea regimului apelor subterane, bazate pe metoda elementelor de frontieră	5	451
DIMA, C., Efecte de perete asupra curgerilor bidimensionale subsonice	1	97
DUBINĂ, D., Consideraţii privind interacţiunea dintre flambaj şi voalare în studiul instabilităţii barelor cu pereţi subţiri	2	157
DUMITRACHE, AL., v. DUMITRESCU, H.	5	487
DUMITRESCU, H., DUMITRACHE, AL., Asupra desprinderii dinamice în turbomaşini	5	487
DUMITRESCU, L. Z., Analiza, sinteza şi optimizarea aripilor delta în zbor supersonic	1	3
FILIMON, I., IANCA, S., Contribuţii la calculul ductilităţii şi capacităţii de absorbţie a energiei la elementele din beton armat folosite în structuri antiseismice	2	201
FRIEDRICH, R., Funcţii de formă pentru elementele finite ierarhice	2	225
FRIEDRICH, F., Reţele de discretizare cu îndesiri locale	5	525
GEORGESCU, ADELINA, v. OPREA, IULIANA	3	263
GEORGESCU, ADELINA, Stabilitatea mişcării lichidelor pe un plan înclinat	5	471
GIURGIUŢIU, V., KALMUŢCHI, P., Calculul modurilor proprii de vibraţie ale palelor de elicopter cu diverse condiţii la limită	1	21
IANCA, S., v. FILIMON, I.	2	201
IONESCU, D., v. ANTON, I.	3	237

	Nr.	Pag.
IONESCU, D., v. ANTON, I.	4	349
IORDACHE, D., v. SOARE, M. V.	5	499
KALMUȚCHI, P., v. GIURGIUȚIU, V.	1	21
KECS, W. W., Asupra vibrațiilor longitudinale în bare elastice omogene, având forme de trunchi de con circular	6	597
MARINESCU, AL., STAICU, ȘT., Asupra manevrei optime de sosire în punctele de libraţie prin metoda tracțiunilor mici	3	249
MARTIN, OLGA, Flambajul panourilor sandwich cu fețe din plăci de plastic laminate, rigidizate cu fibre de carbon	1	79
MOCANU, FELICIA, Studiul desprinderii turbulente a stratului limită pe un profil aerodinamic cu gradient de presiune	1	73
MOȘTEANU, ANISIA, v. PECULEA, M.	4	399
MUNTEANU, M., Asupra echilibrului solidului rigid cu legături elastice triaxiale		
MUNTEANU, M., Axele elasticității în cazul unui solid rigid cu legături elastice triaxiale	2	125
ONU, G., Efectul lunecării la bare cu pereți subțiri	6	581
OPREA, IULIANA, GEORGESCU, ADELINA, Suprafețe neutrale bifurcate într-o problemă de inhibiție a convecției termice datorită unui cîmp magnetic	3	263
OROVEANU, T., SPULBER, I., Asupra curgerii lichidelor calde prin conducte	4	411
PECULEA, M., MOȘTEANU, ANISIA, Compresor cu membrană metalică cu profil de deformare liniarizat	4	399
POSEA, N., PUPĂZESCU, AL., Metode de estimare a durabilității la solicitări multiaxiale în domeniul oligociclic, cu aplicații la compensatori lenticulari	6	547
PUPĂZESCU, AL., v. POSEA, N.	6	547
SOARE, M. V., Asupra unei generalizări a multiplicatorului de impact (I)	2	219
SOARE, M. V., Asupra unei generalizări a multiplicatorului de impact (II)	3	333
SOARE, M. V., IORDACHE, D., Calculul eforturilor de membrană în turnurile de răcire hiperbolice	5	499
SPULBER, I., v. OROVEANU, T.	4	411
STAICU, ȘT., v. MARINESCU, AL.	3	249
STAICU, ȘT., Vibrațiile sistemelor spațiale	4	367
STAICU, ȘT., Ciocnirea oblică plană a două rigide	5	481
STAN, AL. D., Cuplul optim al sistemului piston-cilindrul pompei de adîncime	3	305
STAN, AL. D., Regimul pulsatoriu la scurgerea fluidului bifazic prin elementul de măsură	6	561
TEODORESCU, CONSTANTIN, Asupra performanțelor acustice ale avionului ROMBAC 1 — 11 — 560 și compatibilității acestora cu cerințele capitolului 3 din Anexa 16 — ICAO.	4	419
ȚEPOSU, I., Determinarea componentelor sarcinilor aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor neliniare arbitrare cu variații mici de altitudine și viteză	1	51
ȚURLEA, E., Metoda de determinare experimentală a caracteristicilor de vibrații ale unei pale în rotație	1	103
ULMANU, V., ZECHERU, GH., Determinarea durabilității prăjinilor de foraj pe baza conceptelor mecanicii ruperii materialelor	3	315
UNGUREANU-DAVID, ELENA, Un algoritm de calcul pentru mișcarea tridimensională a unui fluid într-un mediu poros stratificat	6	539
ZECHERU, GH., v. ULMANU, V.	3	315